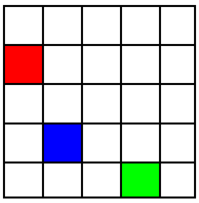
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) - Centro de Informática (CIn)
Graduação em Ciência e Engenharia da Computação
Matemática Discreta (IF670) - 2ª Mini-Prova (2009.1)

1. (1,0) Prove que

$$\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2$$

de duas maneiras:

a. usando argumento combinatorial



Considere o quadrado de lado *n* (para ilustrar, usaremos um quadrado de lado 5). Sendo um ponto (a,b) interno ao quadrado, há duas possibilidades:

I) a ≠ b → Para formarmos os pares (a,b), precisamos escolher dois valores de *n* possibilidades. Aqui surge um problema: os conjuntos {1,4} e {4,1} são iguais, mas os pontos (1,4) e (4,1) não (no nosso exemplo, os pontos representados pela cor vermelha e verde, respectivamente). Logo, nesse caso há o total de 2*C(n,2) possibilidades.

II) a = b → Neste caso podemos escolher apenas um valor de *n* possibilidades. Logo, temos C(n,1) casos. Esse caso corresponde ao ponto marcado de azul (no nosso exemplo, o ponto (2,2)).

Somando as possibilidades de I) e de II) e aplicando a identidade de Pascal:

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} = \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2}$$

Como sabemos que num quadrado de lado n há n^2 possibilidades de escolhermos um ponto interno a ele, temos que:

$$\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2 \quad \textbf{OK}$$

b. usando a fórmula algébrica para os coeficientes binomiais.

$$\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}=n^2 \therefore \binom{n}{2}+\binom{n}{2}+\binom{n}{1}=n^2 \therefore 2\binom{n}{2}+\binom{n}{1}=n^2$$

$$2\frac{n!}{2!(n-2)!}+\frac{n!}{1!(n-1)!}=n^2 \therefore \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}+\frac{n(n-1)!}{(n-1)!}=n^2$$

$$n(n-1)+n=n^2 \therefore n^2-n+n=n^2 \therefore n^2=n^2 \textbf{ OK}$$

2. (0,5) Aplique o teorema binomial para provar a seguinte identidade:

$$3^n=\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+...+2^{n-1}\binom{n}{n-1}+2^n\binom{n}{n}$$

É dado pelo Teorema Binomial que:

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+...+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+\binom{n}{n}y^n$$

Fazendo $x=1$ e $y=2$ obtemos:

$$(1+2)^n=\binom{n}{0}1^n+\binom{n}{1}1^{n-1}2+\binom{n}{2}1^{n-2}2^2+...+\binom{n}{n-1}1.2^{n-1}+\binom{n}{n}2^n$$

$$3^n=\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+...+2^{n-1}\binom{n}{n-1}+2^n\binom{n}{n} \textbf{ OK}$$

3. (0,5) Quantos estudantes vindos de um dos 27 estados do Brasil devem ingressar na universidade para garantir que existem pelo menos 100 que vieram do mesmo estado? Justifique sua resposta.

Pelo *Princípio da Casa dos Pombos*, se N objetos são colocados em k caixas, então existe no mínimo uma caixa que contém pelo menos $\lceil N/k \rceil$ objetos.

Neste caso as caixas estão representadas pelos estados do Brasil e os objetos pelos estudantes. Logo, temos que $k=27$ e desejamos saber o menor N tal que $\lceil N/27 \rceil=100$.

Dessa forma, dados quaisquer 28 estudantes (27 * 1 + 1), pelo menos 2 serão do mesmo estado. Como queremos que pelo menos 100 sejam do mesmo estado, basta fazermos $N=(27*99)+1 \therefore N=2674$.