Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Centro de Informática (CIn)

# Matemática Discreta (IF670)

**Segunda Mini-Prova (2009-2) - 11/09/2009**

**(1,0) 1.** Use um argumento combinatório para provar a seguinte identidade.

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2$$

Considere um conjunto **S** com cardinalidade *2n*. Dividiremos o conjunto **S** em dois conjuntos **A** e **B,** ambos com cardinalidade *n*.

Para escolhermos *n* elementos de **S**, temos as seguintes possibilidades:

- nenhum elemento de **A** e *n* elementos de **B**: $\binom{n}{0} \times \binom{n}{n}$
- *1* elemento de **A** e *n-1* elementos de **B**: $\binom{n}{1} \times \binom{n}{n-1}$
- ...
- *n-1* elementos de **A** e *1* elemento de **B**: $\binom{n}{n-1} \times \binom{n}{1}$
- *n* elementos de **A** e nenhum elemento de **B**: $\binom{n}{n} \times \binom{n}{0}$

Somando todas as possibilidades:

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0} \times \binom{n}{n} + \binom{n}{1} \times \binom{n}{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} \times \binom{n}{1} + \binom{n}{n} \times \binom{n}{0}$$

Porém, sabemos que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$. Aplicando essa identidade no segundo fator de cada produto, obtemos:

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0} \times \binom{n}{n-n} + \binom{n}{1} \times \binom{n}{n-(n-1)} + \ldots + \binom{n}{n-1} \times \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \times \binom{n}{n-0}$$

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0} \times \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \times \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} \times \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \times \binom{n}{n}$$

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2$$

**(1,0) 2.** Dê uma prova para o teorema binomial usando indução matemática.

O teorema binomial afirma que para $n$ não-negativo:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

Prova por indução:

- Caso base: n = 0

$$(x+y)^0 = \binom{0}{0} x^{0-0} y^0 \;\therefore 1 = 1 \quad \text{OK}$$

- Passo indutivo:
  - Hipótese indutiva (HI): n = k

$$(x+y)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{k-i} y^i$$

$$(x+y)^k = \binom{k}{0} x^k y^0 + \binom{k}{1} x^{k-1} y^1 + \ldots + \binom{k}{k-1} x^1 y^{k-1} + \binom{k}{k} x^0 y^k$$

  - Tese: n = k + 1

$$(x+y)^{k+1} = \underbrace{(x+y)^k}_{HI}(x+y)$$

Substituindo a hipótese indutiva:

$$(x+y)^{k+1} = \left[\binom{k}{0} x^k y^0 + \binom{k}{1} x^{k-1} y^1 + \ldots + \binom{k}{k-1} x^1 y^{k-1} + \binom{k}{k} x^0 y^k\right](x+y)$$

$$(x+y)^{k+1} = \binom{k}{0} x^k y^0 (x+y) + \binom{k}{1} x^{k-1} y^1 (x+y) + \ldots + \binom{k}{k-1} x^1 y^{k-1} (x+y) + \binom{k}{k} x^0 y^k (x+y)$$

$$(x+y)^{k+1} = \binom{k}{0} x^{k+1} y^0 + \overbrace{\binom{k}{0} x^k y^1 + \binom{k}{1} x^k y^1}^{Pascal} + \underbrace{\binom{k}{1} x^{k-1} y^2 + \ldots}_{Pascal} + \overbrace{\binom{k}{k-1} x^2 y^{k-1}}^{Pascal} + \underbrace{\binom{k}{k-1} x^1 y^k + \binom{k}{k} x^1 y^k}_{Pascal} + \binom{k}{k} x^0 y^{k+1}$$

$$(x+y)^{k+1} = \overbrace{\binom{k}{0} x^{k+1} y^0} + \binom{k+1}{1} x^k y^1 + \ldots + \binom{k+1}{k} x^1 y^k + \underbrace{\binom{k}{k} x^0 y^{k+1}}$$

Apenas o primeiro e o último termo não foram agrupados usando identidade de Pascal. Entretanto, sabemos que:

$$\binom{k}{0} = \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{0} = \binom{k+1}{k+1}$$

Logo, substituindo os coeficientes do primeiro e do último termo ficamos com:

$$(x+y)^{k+1} = \binom{k+1}{0} x^{k+1} y^0 + \binom{k+1}{1} x^k y^1 + \ldots + \binom{k+1}{k} x^1 y^k + \binom{k+1}{k+1} x^0 y^{k+1}$$

$$(x+y)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} x^{(k+1)-i} y^i \quad \text{OK}$$