Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) - Centro de Informática (CIn)
Graduação em Ciência e Engenharia da Computação

Matemática Discreta (IF760)

3ª Mini-prova (2009-1) – 12 de maio de 2009

1. (1,0) Sejam *R* e *S* relações binárias em um conjunto *A*. *R* e *S* são simétricas. Determine se as seguintes relações também são simétricas. Justifique cada resposta apresentando uma prova quando a afirmativa for verdadeira, ou um contra-exemplo, caso seja falsa.

a) $R \cup S$ b) R^n c) R'

a) $R \cup S$

Uma relação T num conjunto A é simétrica se $(a,b) \in T \rightarrow (b,a) \in T$, para $a,b \in A$. Como neste caso a relação é R U S, temos que provar que: $(a,b) \in R \cup S \rightarrow (b,a) \in R \cup S$, para $a,b \in A$.

1. Como $(a,b) \in R \cup S$ ao menos uma das duas possibilidades deve ocorrer:

I) $(a,b) \in R$: como R é simétrica, temos que $(b,a) \in R$.

II) $(a,b) \in S$: como S é simétrica, temos que $(b,a) \in S$.

2. Em ambas as possibilidades, é garantida a presença do par (b,a). Logo, $(b,a) \in R \cup S$.

b) R^n

Provaremos que $(a,b) \in R^n \rightarrow (b,a) \in R^n$, para $a,b \in A$ por indução.

1. Caso base: n = 1 $\rightarrow R^1 \therefore R$

Trivial, pois é dado na questão que R é simétrica.

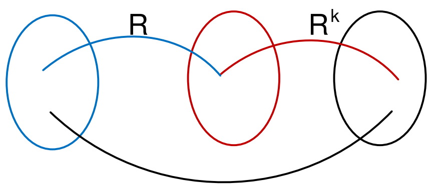
2. Hipótese Indutiva: n = k $\rightarrow R^K$ é simétrica.

3. Caso indutivo: n = k + 1 $\rightarrow (a,b) \in R^{k+1} \rightarrow (b,a) \in R^{k+1}$, para $a,b \in A$

I. Pela definição de potência de uma relação, se $(a,b) \in R^{k+1}$ então existe um *x* do domínio tal que $(a,x) \in R$ e $(x,b) \in R^k$ (pois $R^{k+1} = R^k \circ R$).

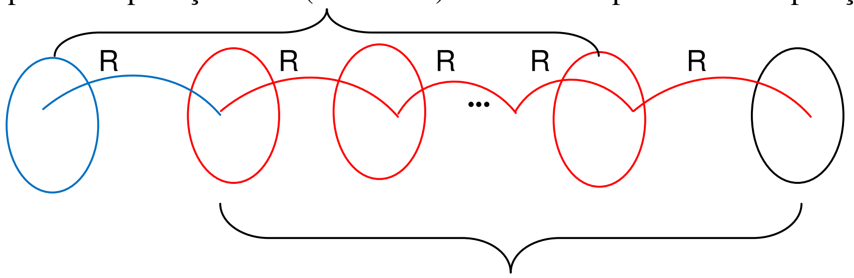
II. Como R é simétrica e pela H.I. R^K também é simétrica, temos que $(x,a) \in R$ e $(b,x) \in R^k$.

III. Porém, sabemos que R^{k+1} também é igual a $R \circ R^k$.

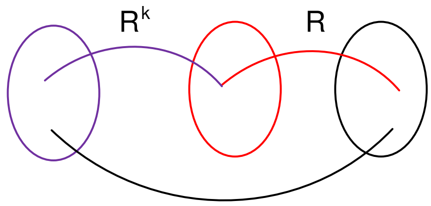


$R^{k+1} = R^k \circ R$

agrupando a aplicação de *R* (azul claro) com as *k* - 1 primeiras composições



desmembrando as *k* composições



$R^{k+1} = R \circ R^k$

IV. Finalmente, como $(b,x) \in R^k$, $(x,a) \in R$ e $R^{k+1} = R \circ R^k$, temos que $(b,a) \in R^{k+1}$ e portanto R^{k+1} é simétrica.

c) *R'*

Temos que provar que $(a,b) \in R' \rightarrow (b,a) \in R'$, para $a,b \in A$.

1. Pela definição de complemento de uma relação, como $(a,b) \in R'$, temos que $(a,b) \notin R$.
2. Se $(a,b) \notin R$ então $(b,a) \notin R$. Afinal, caso contrário R não seria simétrica já que teríamos o par (b,a) e não teríamos o par (a,b).
3. Como $(b,a) \notin R$, pela definição de complemento de uma relação, temos que $(b,a) \in R'$.

2. (1,0) Uma relação binária *R* em um conjunto *A* é uma *quase-ordem* em *A* se *R* é reflexiva e transitiva. Seja *R* uma quase-ordem em *A*. Mostre que $R \cap R^{-1}$ é uma relação de equivalência.

Para provarmos que uma relação num conjunto é de equivalência, devemos provar que ela é reflexiva, simétrica e transitiva. Lembrando que a definição de relação inversa é a seguinte: $R^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in R\}$.

1. Reflexiva: $(a,a) \in R \cap R^{-1}$ para todo elemento $a \in A$.
    a. Como R é reflexiva, $(a,a) \in R$, para todo elemento $a \in A$.
    b. Pela definição de relação inversa, como todo par da forma (a,a) pertence a R, então $(a,a) \in R^{-1}$, para todo elemento $a \in A$.

c. Finalmente, como os pares da forma (a,a) pertencem a ambas as relações (R e sua inversa), então esses pares pertencerão à intersecção delas. Ou seja: $(a,a) \in R \cap R^{-1}$ para todo elemento $a \in A$ e portanto está provado que a relação é reflexiva.

2. Simétrica: $(a,b) \in R \cap R^{-1} \rightarrow (b,a) \in R \cap R^{-1}$, para $a, b \in A$.
   a. Como $(a,b) \in R \cap R^{-1}$ então $(a,b) \in R$. Se temos o par (a,b) em R, então temos o par (b,a) na sua inversa.
   b. Uma vez que $(a,b) \in R \cap R^{-1}$,então $(a,b) \in R^{-1}$. Já que temos o par (a,b) na inversa de R, teremos o par (b,a) em R.
   c. Como o par (b,a) o ocorre em R e na sua inversa, ele ocorrerá na intersecção. Ou seja, $(b,a) \in R \cap R^{-1}$ e provamos que a relação é simétrica.
3. Transitiva: $(a,b) \in R \cap R^{-1} \wedge (b,c) \in R \cap R^{-1} \rightarrow (a,c) \in R \cap R^{-1}$, para $a, b, c \in A$.
   a. Se $(a,b) \in R \cap R^{-1} \wedge (b,c) \in R \cap R^{-1}$, então $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$. Como R é transitiva, $(a,c) \in R$.
   b. Se $(a,b) \in R \cap R^{-1} \wedge (b,c) \in R \cap R^{-1}$, então $(a,b) \in R^{-1} \wedge (b,c) \in R^{-1}$. Pela definição de relação inversa temos que $(b,a) \in R \wedge (c,b) \in R$. Como R é transitiva e nela temos os pares (c,b) e (b,a) então $(c,a) \in R$. Se $(c,a) \in R$ então $(a,c) \in R^{-1}$.
   c. Como o par (a,c) ocorre em ambas as relações, também ocorrerá na intersecção. Ou seja, $(a,c) \in R \cap R^{-1}$ e provamos que a relação é transitiva.