# Capítulo 7

# Cadeias de Markov

## INTRODUÇÃO

Vejamos as definições e propriedades elementares de vetores e matrizes exigidos para este capítulo.

Entendemos por um *vetor*, $u$, simplesmente uma $n$-upla de números:

$$u = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$$

Os $u_i$ são chamados *componentes* de $u$. Se todos os $u_i = 0$, então $u$ é chamado *vetor nulo*. Por um *múltiplo escalar* de $u$, $ku$, (onde $k$ é um número real), entendemos o vetor que é obtido de $u$, multiplicando-se seus componentes por $k$:

$$ku = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

Notemos que dois vetores são iguais se e somente se suas componentes correspondentes são iguais.

Entendemos por uma *matriz* $A$ um quadrado retangular de números:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

As $m$ $n$-uplas horizontais

$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$ são chamadas de *linhas* de $A$, e as $n$ $m$-uplas verticais, suas *colunas*

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$



Note que o elemento $a_{ij}$, chamado a *ij-ésima-entrada*, aparece na interseção da $i$-ésima linha com a $j$-ésima coluna. Representamos frequentemente tal matriz por $A = (a_{ij})$. Uma matriz com $m$ linhas e $n$ colunas é chamada matriz $m$ por $n$ e escrevemos *mat* $m \times n$; se $m = n$, então é chamada matriz *quadrada* (ou matriz *n-quadrada*). Notamos também que a matriz com uma única linha pode ser olhada como um vetor, e vice-versa.

Agora, suponha que $A$ e $B$ sejam duas matrizes tais que o número de colunas de $A$ é igual ao número de linhas de $B$, isto é, $A$ é uma matriz $m \times p$ e $B$ é uma matriz $p \times n$. Então o produto de $A$ por $B$, denotado por $AB$, é a matriz $m \times n$ cuja entrada $ij$ é obtida multiplicando-se os elementos da $i$-ésima linha de $A$ pelos elementos correspondentes da $j$-ésima coluna de $B$ e somando esses produtos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & c_{ij} & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

onde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$

Se o número de colunas de $A$ não é igual ao número de linhas de $B$, digamos $A$ é $m \times p$ e $B$ é $q \times n$, onde $p \neq q$, então o produto $AB$ não é definido.

Existem casos especiais de multiplicação de matrizes que são de especial interesse. Se $A$ é uma matriz $n$-quadrada, então podemos formar todas as *potências* de $A$:

$$A^2 = AA, \; A^3 = AA^2, \; A^4 = AA^3, \ldots$$

Além disso, se $u$ é um vetor com $n$ componentes, então podemos formar o produto $uA$, que é também um vetor com $n$ componentes. Chamamos $u \neq 0$ um *vetor fixo* (ou *ponto fixo*) de $A$, se $u$ é "fixo à esquerda", isto é, não se altera quando multiplicado por $A$:

$$\boxed{uA = u}$$

Neste caso, para qualquer escalar $k \neq 0$, temos

$$(ku)A = k(uA) = ku$$

Ou seja,

**Teorema 7.1:** Se $u$ é um vetor fixo da matriz $A$, então cada múltiplo escalar não nulo, $ku$, de $u$ é também um vetor fixo de $A$.

**Exemplo 7.1:** $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ ta_1 + ub_1 & ta_2 + ub_2 & ta_3 + ub_3 \end{pmatrix}$

**Exemplo 7.2:** Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, então

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+8 \\ 3+12 & 6+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

**Exemplo 7.3:** $(1, 2, 3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = (1 + 8 + 21, 2 + 10 + 24,$

$3 + 12 + 27) = (30, 36, 42)$

**Exemplo 7.4:** Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Então o vetor $u = (2, -1)$ é um ponto fixo de $A$. Pois,

$$uA = (2, -1)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = (2 \cdot 2 - 1 \cdot 2, 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) =$$

$$= (2, -1) = u$$

Assim, pelo teorema acima, o vetor $2u = (4, -2)$ é também um ponto fixo de $A$:

$$(4, -2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = (4 \cdot 2 - 2 \cdot 2, 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3) = (4, -2)$$

## VETORES DE PROBABILIDADES MATRIZES ESTOCÁSTICAS

Um vetor $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ é chamado *vetor de probabilidade*, se suas componentes são não negativas e somam 1.

**Exemplo 7.5:** Considere os seguintes vetores:

$$u = \left(\frac{3}{4}, 0, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \; v = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right) \text{ e } w = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Então: $u$ não é um vetor de probabilidade, pois sua terceira componente é negativa; $v$ não é um vetor de probabilidade, pois a soma de suas componentes é maior do que 1; $w$ é um vetor de probabilidade.



**Exemplo 7.6:** O vetor não nulo $v = (2, 3, 5, 0, 1)$ não é vetor de probabilidade, pois a soma de suas componentes é $2 + 3 + 5 + 0 + 1 = 11$. Contudo, como as componentes de $v$ são não negativas, $v$ tem um único múltiplo escalar $\lambda v$, que é um vetor de probabilidade; este pode ser obtido de $v$ multiplicando-se cada componente de $v$ pelo inverso da soma de suas componentes:

$$\frac{1}{11}v = \left(\frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{5}{11}, 0, \frac{1}{11}\right).$$

Uma matriz quadrada $P = (p_{ij})$ é chamada *matriz estocástica*, se cada uma de suas linhas é um vetor de probabilidade, isto é, se cada entrada de $P$ é não negativa e a soma das entradas em cada linha é 1.

**Exemplo 7.7:** Considere as seguintes matrizes:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

(i) (ii) (iii)

(i) não é matriz estocástica, pois a entrada na segunda linha e terceira coluna é negativa.

(ii) não é matriz estocástica, pois a soma das entradas na segunda linha não é 1.

(iii) é uma matriz estocástica, pois cada linha é um vetor de probabilidade.

Provaremos (veja Problema 7.10).

**Teorema 7.2:** Se $A$ e $B$ são matrizes estocásticas, então o produto $AB$ é uma matriz estocástica. Conseqüentemente, todas as potências de $A^n$ são matrizes estocásticas.

## MATRIZES ESTOCÁSTICAS REGULARES

Definimos agora uma classe importante de matrizes estocásticas, cujas propriedades serão investigadas a seguir.

**Definição:** Uma matriz estocástica $P$ é considerada *regular* se todas as entradas de alguma potência $P^m$ são positivas.

**Exemplo 7.8:** A matriz estocástica $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é regular, desde que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

tem todas entradas positivas.

**Exemplo 7.9:** Considere a matriz estocástica $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Portanto,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{15}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

De fato, toda potência $A^m$ terá 1 e 0 na primeira linha; logo, $A$ não é regular.

## PONTOS FIXOS E MATRIZES ESTOCÁSTICAS REGULARES

A propriedade fundamental das matrizes estocásticas regulares está contida no seguinte teorema, cuja prova está além dos objetivos desse texto.

**Teorema 7.3:** Seja $P$ uma matriz estocástica regular. Então:

(i) $P$ tem um único vetor fixo $t$ de probabilidade e os componentes de $t$ são todos positivos;

(ii) As entradas das potências $P, P^2, P^3, \ldots$ de $P$ convergem para as entradas correspondentes da matriz $T$, cujas linhas são todas iguais ao vetor fixo $t$;

(iii) Se $p$ é qualquer vetor de probabilidade, então a seqüência de vetores $pP, pP^2, pP^3, \ldots$ converge para o ponto fixo $t$.

**Exemplo 7.10:** Considere a matriz estocástica regular

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Vamos determinar o vetor de probabilidade com duas componentes, que podemos representar por $t = (x, 1 - x)$, de modo que $tP = t$:



$$(x, 1 - x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (x, 1 - x)$$

Multiplicando-se o lado esquerdo da equação da matricial acima, obtemos:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right) = (x, 1 - x)$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = x \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = 1 - x \end{cases} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{3}$$

Assim, $t = (\frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ é o único vetor fixo de probabilidade de $P$. Pelo Teorema 7.3, a seqüência $P, P^2, P^3, \ldots$ converge para a matriz $T$, cujas linhas são o vetor $t$:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}67 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{pmatrix}$$

Apresentamos algumas das potências de $P$, para indicar o resultado acima:

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}50 & 0{,}50 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix};$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}37 & 0{,}63 \end{pmatrix};$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}37 & 0{,}63 \\ 0{,}31 & 0{,}69 \end{pmatrix};$$

$$P^5 = \begin{pmatrix} \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \\ \frac{11}{32} & \frac{21}{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}31 & 0{,}69 \\ 0{,}34 & 0{,}66 \end{pmatrix};$$

**Exemplo 7.11:** Determine o único vetor fixo de probabilidade da matriz estocástica regular.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

**Método 1.** Determinemos um vetor de probabilidade com três componentes, que podemos representar por

$$t = (x,\ y,\ 1 - x - y), \text{ de modo que } tP = t:$$

$$(x,\ y,\ 1-x-y)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = (x,\ y,\ 1-x-y)$$

Multiplicando-se o lado esquerdo da equação matricial acima e igualando-se os componentes correspondentes, obtemos o sistema

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = x \qquad\qquad 3x + y = 1$$

$$x = \frac{1}{5}$$

$$x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = y \quad \text{ou} \quad x - 3y = -1 \quad \text{ou}$$

$$y = \frac{2}{5},$$

$$y = 1 - x - y \qquad\qquad x + 2y = 1$$

Assim, $t = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ é o único vetor fixo de probabilidade de $P$.

**Método 2:** Determinemos primeiro um vetor fixo $u = (x, y, z)$ da matriz $P$:

$$(x,\ y,\ z)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = (x,\ y,\ z) \text{ ou } \begin{cases} \frac{1}{2}z = x \\ x + \frac{1}{2}z = y \\ y = z \end{cases}$$

Sabemos que o sistema tem solução diferente de *zero*; podemos arbitrariamente designar um valor para uma das incógnitas. Seja $z = 2$. Então, pela primeira equação $x = 1$, e pela terceira



equação $y = 2$. Assim, $u = (1, 2, 2)$ é um ponto fixo de $P$. Mas todo múltiplo de $u$ é um ponto fixo de $P$. Portanto, multiplicamos $u$ por $\frac{1}{5}$, e obtemos o desejado vetor fixo de probabilidade

$$t = \frac{1}{5}u = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

## CADEIAS DE MARKOV

Consideremos agora uma seqüência de ensaios cujos resultados, $x_1, x_2, \ldots$ satisfazem as seguintes propriedades:

(i) Cada resultado pertence a um conjunto finito de resultados $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, chamado o *espaço dos estados* do sistema; se o resultado do $n$-ésima tentativa é $a_i$ dizemos que o sistema se encontra no estado $a_i$ no instante $n$.

(ii) O resultado de qualquer ensaio depende no máximo do resultado do ensaio imediatamente anterior e não de qualquer outro dos precedentes; a cada par de estados $(a_i, a_j)$ está associada a probabilidade $p_{ij}$ de que $a_j$ ocorre imediatamente após ter ocorrido $a_i$.

A processo estocástico com as propriedades acima é chamado *Cadeia de Markov* (finita). Os números $p_{ij}$, chamados *probabilidades de transição*, podem ser dispostos segundo a matriz

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

chamada *matriz de transição*.

Assim a cada estado $a_i$ corresponde a $i$-ésima linha $(p_{i1}, p_{i2}, \ldots p_{im})$ da matriz de transição $P$, se o sistema está no estado $a_i$, então esse vetor-linha representa as probabilidades de todos os possíveis resultados do próximo ensaio, de forma que é um vetor de probabilidade. Conseqüentemente,

**Teorema 7.4:** A matriz de transição $P$ da cadeia de Markov é uma matriz estocástica.

**Exemplo 7.12:** Um homem diariamente vai para o trabalho de carro ou de trem. Suponha que ele nunca toma o trem 2 dias seguidos; mas, se vai de carro para o trabalho, no dia seguinte é tão provável que vá de trem quanto de automóvel.

O espaço de estados do sistema é $\{t(\text{trem}), d(\text{carro})\}$. Este processo estocástico é uma cadeia de Markov, pois o resultado em qualquer dia depende somente do que aconteceu no dia anterior. A matriz de transição da cadeia de Markov é

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} t & d \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

A primeira linha da matriz corresponde ao fato de que ele nunca toma o trem duas vezes seguidas, de modo que definitivamente vai de carro no dia seguinte ao que tomou o trem. A segunda linha da matriz corresponde ao fato de que no dia seguinte ao que foi de carro, ele vai novamente de carro ou tomará o trem com probabilidades iguais.

**Exemplo 7.13:** Três crianças $A$, $B$ e $C$ estão arremessando uma bola uma para outra. $A$ sempre arremessa a bola para $B$ e $B$ sempre arremessa a bola para $C$; mas é tão provável que $C$ lance a bola para $B$ quanto para $A$. Seja $X_n$ a $n$-ésima pessoa a arremessar a bola. O espaço de estado do sistema é $\{A, B, C\}$. Esta é uma cadeia de Markov, pois a pessoa que arremessa a bola, num dado instante não é influenciada por aquelas que a arremessaram anteriormente. A matriz de transição da cadeia de Markov é representada abaixo.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

A primeira linha da matriz corresponde ao fato de que $A$ sempre arremessa a bola para $B$. A segunda linha corresponde ao fato de que $B$ sempre arremessa a bola para $C$. A última linha corresponde ao fato de que $C$ arremessa a bola para $A$ ou $B$ com probabilidades iguais (e não fica com a bola).

**Exemplo 7.14:** Uma escola tem 200 meninos e 150 meninas. Um estudante após outro é selecionado para se submeter a um exame de vista. Seja $X_n$ o sexo do $n$-ésimo estudante examinado. O espaço de estado do processo estocástico é $\{m(\text{macho}); f(\text{fêmea})\}$. Contudo, este processo não é uma cadeia de Markov, pois, por exemplo, a probabilidade de que a terceira pessoa seja do sexo feminino não depende apenas do resultado do segundo ensaio mas também, do primeiro.



**Exemplo 7.15:** Um homem se encontra em algum ponto inteiro no eixo dos $x$ compreendido entre a origem e o ponto 5. Em cada etapa ele anda para o ponto imediatamente à esquerda com probabilidade $q = 1 - p$, ou para o ponto imediatamente à direita com o ponto $p$, a menos que esteja na origem O ou no ponto 5. Neste último caso ele caminhará para o ponto imediatamente à direita ou à esquerda, respectivamente. Seja $X_n$ sua posição após $n$ etapas. Esta é uma Cadeia de Markov com espaço de estados $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cada linha da matriz, exceto a primeira e a última, corresponde ao fato de que o homem se move do estado $a_i$ para o estado $a_{(i+1)}$ com probabilidade $p$ ou volta para o estado $a_{i-1}$ com probabilidade $q = 1 - p$. A primeira linha corresponde ao fato de que o homem deve se mover do estado $a_0$ para o estado $a_1$, e a última linha de que o homem deve se mover do estado $a_5$ para o estado $a_4$.

## PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO EM VÁRIAS ETAPAS

A entrada $p_{ij}$ na matriz de transição $P$ da cadeia de Markov é a probabilidade de que o sistema passe do estado $a_i$ para o estado $a_j$ em uma etapa: $a_i \to a_j$. Questão: Qual é a probabilidade, representada por $p_{ij}^{(n)}$, de o sistema passar de um estado $a_i$ para o estado $a_j$ em exatamente $n$ etapas:

$$a_i \to a_{k_1} \to a_{k_2} \to \dots \to a_{k_{n-1}} \to a \to a_j$$

O seguinte teorema responde a esta questão: aqui, os $p_{ij}^{(n)}$ estão dispostos na mesma matriz $P^{(n)}$ chamada *matriz de transição em n etapas*:

**Teorema 7.5:** Seja $P$ a matriz de transição da cadeia de Markov. Então a matriz de transição em $n$ etapas é igual a $n$-ésima potência de $P$, ou seja, $P^{(n)} = P^n$.

Suponha agora que, em algum instante arbitrário, a probabilidade de que o sistema esteja no estado $a_i$ seja $p_i$; representamos essas probabilidades através do vetor $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ que é chamado *distribuição de probabilidade* do sistema naquele instante. Em particular, denotemos por

$$\boxed{p^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_m^{(0)})}$$

a *distribuição de probabilidade inicial*, isto é, a distribuição segundo a qual o processo inicia, e denotemos por

$$\boxed{p^{(n)} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_m^{(n)})}$$

a *distribuição de probabilidades na n-ésima etapa*, isto é, a distribuição após as $n$ primeiras etapas.

Vale o seguinte teorema:

**Teorema 7.6:** Seja $P$ a matriz de transição de uma cadeia de Markov. Se $p = (p_i)$ é a distribuição de probabilidade do sistema em algum instante arbitrário, então $pP$ é a distribuição de probabilidade do sistema na etapa seguinte e $pP^n$ é a distribuição de probabilidades do sistema após as $n$ etapas seguintes. Em particular,

$$p^{(1)} = p^{(0)}P,\ p^{(2)} = p^{(1)}P,\ p^{(3)} = p^{(2)}P,\ \ldots,\ p^{(n)} = p^{(0)}P^n$$

**Exemplo 7.16:** Considere a cadeia de Markov do Exemplo 7.12, cuja matriz de transição é

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} t & d \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Aqui $t$ representa o estado de ir para o trabalho de trem e $d$ de ir de carro. Pelo Exemplo 7.8,

$$P^4 = P^2 \cdot P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix}$$



Assim a probabilidade de que o sistema passe do estado $t$ para o estado $d$ em exatamente 4 etapas é $\frac{5}{8}$, isto é, $p_{td}^{(4)} = \frac{5}{8}$. Da mesma forma,

$$p_{tt}^{(4)} = \frac{3}{8},\quad p_{dt}^{(4)} = \frac{5}{16} \quad e \quad p_{dd}^{(4)} = \frac{11}{16}.$$

determinando as probabilidades iniciais

Agora suponha que no primeiro dia de trabalho, o homem lançou um dado e foi para o trabalho de carro somente se ocorreu um 6. Em outras palavras, $p^{(0)} = (\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$ é a distribuição de probabilidade inicial. Então

$$p^{(4)} = p^{(0)}P^4 = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right) \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix} = \left(\frac{35}{96}, \frac{61}{96}\right)$$

é a distribuição de probabilidade após 4 dias; isto é,

$$p_t^{(4)} = \frac{35}{96} \quad e \quad p_d^{(4)} = \frac{61}{96}.$$

**Exemplo 7.17:** Considere a cadeia de Markov do Exemplo 7.13, cuja matriz de transição é

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Suponha que $C$ foi a primeira pessoa a receber a bola, isto é, suponha que $p^{(0)} = (0, 0, 1)$ é a distribuição de probabilidade inicial. Então,

$$p^{(1)} = p^{(0)}P = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$p^{(2)} = p^{(1)}P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$p^{(3)} = p^{(2)}P = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

Assim, depois de três arremessos, a probabilidade de que $A$ tenha a bola é $\frac{1}{4}$, de que $B$ tenha a bola é $\frac{1}{4}$ e de que $C$ tenha a bola é $\frac{1}{2}$:

$$p_A^{(3)} = \frac{1}{4}, \quad p_B^{(3)} = \frac{1}{4} \quad e \quad p_C^{(3)} = \frac{1}{2}$$

**Exemplo 7.18:** Considere o passeio aleatório do exemplo 7.15. Suponha que o homem começa no ponto 2; encontre a distribuição de probabilidade após 3 etapas e após 4 etapas, isto é, $p^{(3)}$ e $p^{(4)}$. Agora, $p^{(0)} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ é a distribuição inicial de probabilidade. Então,

$$p^{(1)} = p^{(0)}P = (0, q, 0, p, 0, 0)$$

$$p^{(2)} = p^{(1)}P = (q^2, 0, 2pq, 0, p^2, 0)$$

$$p^{(3)} = p^{(2)}P = (0, q^2 + 2pq^2, 0, 3p^2q, 0, p^3)$$

$$p^{(4)} = p^{(3)}P = (q^2 + 2pq^3, 0, pq^2 + 5p^2q^2, 0, 3p^3q + p^3, 0)$$

Assim, após 4 etapas, ele está na origem com probabilidade $q^2 + 2pq^3$.

## DISTRIBUIÇÃO ESTACIONÁRIA DE UMA CADEIA DE MARKOV REGULAR

Suponha que uma cadeia de Markov seja regular; isto é, que sua matriz de transição $P$ seja regular. Pelo Teorema 7.3, a seqüência das matrizes de transição em $n$ etapas converge para a matriz $T$, cujas linhas são iguais ao único vetor fixo de probabilidade, $t$, de $P$; portanto, a probabilidade $P_{ij}^{(n)}$ de que $a_j$ ocorre para um $n$ suficientemente grande independe do estado inicial $a_i$ e é aproximadamente igual à componente $t_j$ de $t$. Em outras palavras,

**Teorema 7.7:** Suponha que a matriz de transição $P$, de uma cadeia de Markov, seja regular. Então para $n$ suficientemente grande, a probabilidade de que qualquer estado $a_j$ ocorra, é aproximadamente igual à correspondente $t_j$ do único vetor fixo de probabilidade, $t$, de $P$, para todo $j$.



Assim vemos que o efeito do estado inicial ou da distribuição inicial do processo desaparece conforme o número de etapas aumente.

Além disso, toda seqüência de distribuição de probabilidade converge para o vetor fixo de probabilidade, $t$, de $P$, chamado *distribuição estacionária* da cadeia de Markov.

**Exemplo 7.19:** Considere a cadeia de Markov do Exemplo 7.12, cuja matriz de transição é:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} t & d \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Pelo Exemplo 7.10, o único vetor fixo de probabilidade da matriz acima é $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Assim, após um número suficientemente grande de dias, o homem irá para o trabalho de trem com probabilidade $\frac{1}{3}$ e irá para o trabalho de automóvel com probabilidade $\frac{2}{3}$.

**Exemplo 7.20:** Considere a cadeia de Markov do Exemplo 7.13, cuja matriz de transição é:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pelo Exemplo 7.11, o único vetor fixo de probabilidade da matriz acima é $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$. Assim, após um número suficientemente grande de etapas, a bola será lançada para $A$ com probabilidade 0,2 e para $B$ e $C$ com probabilidade 0,4.

## ESTADOS ABSORVENTES

Um estado $a_i$ de uma cadeia de Markov é chamado *absorvente* se o sistema permanece no estado $a_i$ uma vez que este tenha sido visitado. Assim, um estado $a_i$ é chamado absorvente se somente se a $i$-ésima linha da matriz de transição, $P$, tem um 1 na diagonal principal e zeros nas outras posições. (A *diagonal principal* de uma matriz $A = (a_{ij})$ $n$-quadrada é constituída pelas entradas $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$).

**Exemplo 7.21:** Suponha que a seguinte matriz seja uma matriz de transição de uma cadeia de Markov:

$$P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

Os estados $a_2$ e $a_5$ são absorventes, pois a segunda e quinta linha, têm um 1 na diagonal principal.

**Exemplo 7.22:** (Passeio aleatório com barreiras absorventes.) Considere o passeio aleatório do Exemplo 7.15, sendo que agora supomos que o homem permaneça em qualquer dos extremos assim que os alcance. Esta é também uma cadeia de Markov e a matriz de transição é dada por

$$P = \begin{array}{c} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

Chamamos este processo de passeio aleatório com barreiras absorventes, pois o $a_0$ e o $a_5$ são estados absorventes. Neste caso, $p_0^{(n)}$ representa a probabilidade de que o homem atinja o estado $a_0$ no máximo em $n$ etapas. Da mesma forma, $p_5^{(n)}$ representa a probabilidade de que ele atinja o estado $a_5$ no máximo em $n$ etapas.

**Exemplo 7.23:** Um jogador tem $x$ dólares. Ele aposta um dólar por vez, e ganha com probabilidade $p$ e perde com probabilidade $q = 1 - p$. A partida termina quando ele perde todo seu dinheiro, isto é, está com 0 dólares ou quando ganha $N - x$ dólares, isto é, tem $N$ dólares. Este jogo é idêntico ao do passeio aleatório do exemplo precedente, exceto que aqui as barreiras absorventes são 0 e $N$.



**Exemplo 7.24:** Um homem lança uma moeda não viciada até que ocorram 3 caras sucessivamente. Seja $X_n = k$ se, na $n$-ésima tentativa, a última coroa ocorreu na $(n - k)$-ésima tentativa, isto é, $X_n$ representa a maior seqüência de caras finais da $n$-ésima tentativa. Este processo é uma cadeia de Markov com espaço estado $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, onde $a_i$ significa que a seqüência de caras tem comprimento $i$. A matriz de transição é

$$\begin{array}{c} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

Cada linha, exceto a última, corresponde ao fato de que a seqüência de caras é interrompida pela ocorrência de uma coroa ou é aumentada de 1 pela ocorrência de uma cara. A última linha corresponde ao fato de que o jogo termina, se três caras são obtidas em seguida. Note que $a_3$ é um estado absorvente.

Seja $a_i$ um estado absorvente de uma cadeia de Markov com matriz de transição $P$. Então, para $j \neq i$, a probabilidade de transição em $n$-etapas $p_{ij}^{(n)}$ é igual a 0 qualquer que seja $n$. Isto é, toda potência de $P$ tem uma entrada nula, e portanto $P$ não é regular. Assim,

**Teorema 7.8:** Se uma matriz estocástica $P$ tem um número 1 na diagonal principal, então $P$ não é regular (a menos que $P$ seja uma matriz $1 \times 1$).

## PROBLEMAS RESOLVIDOS

### MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

7.1 Seja $u = (1, -2, 4)$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Determine $uA$.

O produto do vetor $u$ com três componentes pela matriz $3 \times 3$ $A$ é ainda um vetor com 3 componentes. Para obter o primeiro componente de $uA$, multiplicamos os elementos de $u$ pelos elementos correspondentes da primeira coluna de $A$ e somamos:

$$(1, -2, 4)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 4 \cdot 4, \ , \ )$$
$$= (17, \ , \ )$$

Para obter a segunda componente de $uA$, multiplicamos os elementos de $u$ pelos elementos correspondentes da segunda coluna de $A$ e somamos:

$$(1, -2, 4)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (17, 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 1, \ ) =$$
$$= (17, 3, \ )$$

Para obter a terceira componente de $uA$, multiplicamos os elementos de $u$ pelos elementos correspondentes da terceira coluna de $A$ e somamos:

$$(1, -2, 4)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (17, 3, 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 5 + 4 \cdot 6) =$$
$$= (17, 3, 13)$$

Ou seja, $uA = (17, 3, 13)$.

7.2 Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

Determine (i) $AB$, (ii) $BA$.

(i) Como $A$ é $2 \times 2$ e $B$ é $2 \times 3$, o produto $AB$ é uma matriz $2 \times 3$. Para obter a primeira linha de $AB$, multiplicamos os elementos da primeira linha $(1, 3)$ de $A$ pelos elementos correspondentes de cada coluna $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ de $B$ e somamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 6 \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ & & \end{pmatrix}$$



Para obter a segunda linha de $AB$, multiplicamos os elementos da segunda linha $(2, -1)$ de $A$ pelos elementos correspondentes de cada coluna de $B$ e somamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) & 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix}$$

Assim, $AB = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix}$

(ii) Note que $B$ é $2 \times 3$ e $A$ é $2 \times 2$. Como "os números internos" 3 e 2 não são iguais, isto é, o número de colunas de $B$ não é igual ao número de linhas de $A$, o produto $BA$ não é definido.

7.3 Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ Encontre (i) $A^2$, (ii) $A^3$.

(i) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 & 4 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

(ii) $A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 9 + 2 \cdot (-8) & 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 17 \\ 4 \cdot 9 + (-3) \cdot (-8) & 4 \cdot (-4) + (-3) \cdot 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{pmatrix}$$

## VETORES DE PROBABILIDADES E MATRIZES ESTOCÁSTICAS

7.4 Dos vetores abaixo quais são vetores de probabilidade?

(i) $u = \left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$. (ii) $v = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

(iii) $w = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$.

Um vetor é um vetor de probabilidade, se seus componentes são não negativos e somam 1.

(i) $u$ não é um vetor de probabilidade, pois sua terceira componente é negativa.

(ii) $v$ não é um vetor de probabilidade, pois a soma de suas componentes é maior do que 1.

(iii) $w$ é um vetor de probabilidade, pois suas componentes são não negativos e somam 1.

**7.5** Multiplique cada vetor por um escalar apropriado para obter um vetor de probabilidade:

(i) $(2, 1, 0, 2, 3)$, (ii) $(4, 0, 1, 2, 0, 5)$,

(iii) $(3, 0, -2, 1)$, (iv) $(0, 0, 0, 0, 0)$.

(i) A soma dos componentes é $2 + 1 + 0 + 3 + 2 = 8$; portanto, multiplicamos o vetor, isto é, cada componente por $\frac{1}{8}$ para obter o vetor de probabilidade $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{8})$.

(ii) A soma dos componentes é $4 + 0 + 1 + 2 + 0 + 5 = 12$; portanto, multiplicamos o vetor, isto é, cada componente por $\frac{1}{12}$ para obter o vetor de probabilidade $(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, 0, \frac{5}{12})$.

(iii) A primeira componente é positiva e a terceira é negativa; portanto, é impossível multiplicar o vetor por um escalar para formar um vetor com componentes não negativas. Assim, nenhum múltiplo escalar do vetor é um vetor de probabilidade.

(iv) Cada múltiplo escalar do vetor nulo é o vetor nulo cujos componentes somam 0. Assim, nenhum múltiplo do vetor nulo é um vetor de probabilidade.

**7.6** Encontre um múltiplo de cada vetor que seja um vetor de probabilidade:

(i) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 0, 2, \frac{5}{6}\right)$ (ii) $\left(0, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}\right)$

Multiplicamos primeiramente cada vetor por um escalar para que as frações sejam eliminadas.

(i) Primeiro multiplicamos o vetor por 6 para obter $(3, 4, 0, 12, 5)$. Em seguida multiplicamos por $\frac{1}{(3 + 4 + 0 + 12 + 5)} = \frac{1}{24}$ para obter $(\frac{1}{8}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{24})$, que é um vetor de probabilidade.

(ii) Primeiro multiplicamos o vetor por 30 para obter $(0, 20, 30, 18, 25)$. Então multiplicamos por $\frac{1}{(0 + 20 + 30 + 18 + 25)} = \frac{1}{93}$ para obter $(0, \frac{20}{93}, \frac{30}{93}, \frac{18}{93}, \frac{25}{93})$, que é um vetor de probabilidade.



**7.7** Quais das seguintes matrizes são matrizes estocásticas?

(i) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (ii) $B = \begin{pmatrix} \frac{15}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

(iii) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (iv) $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

(i) $A$ não é uma matriz estocástica, pois não é uma matriz quadrada.

(ii) $B$ não é uma matriz estocástica, pois a soma dos componentes na última linha é maior do que 1.

(iii) $C$ é uma matriz estocástica.

(iv) $D$ não é uma matriz estocástica, pois a entrada na primeira linha e segunda coluna é negativa.

**7.8** Seja $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ uma matriz estocástica e $u = (u_1, u_2, u_3)$ um vetor de probabilidade. Mostre que $uA$ é também um vetor de probabilidade.

$$uA = (u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = (u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3,$$

$$u_1b_1 + u_2b_2 + u_3b_3, \quad u_1c_1 + u_2c_2 + u_3c_3)$$

como os $u_i$, $a_i$, $b_i$ e $c_i$ são não negativos e os produtos e somas de números não negativos são não negativos, as componentes de $uA$ são não negativas como desejamos. Portanto, precisamos apenas mostrar que a soma das componentes de $uA$ é 1. Aqui usamos o fato de que $u_1 + u_2 + u_3$, $a_1 + b_1 + c_1$, $a_2 + b_2 + c_2$ e $a_3 + b_3 + c_3$ são iguais a 1:

$$u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 + u_1b_1 + u_2b_2 + u_3b_3 + u_1c_1 + u_2c_2 + u_3c_3 =$$

$$= u_1(a_1 + b_1 + c_1) + u_2(a_2 + b_2 + c_2) + u_3(a_3 + b_3 + c_3) =$$

$$= u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot 1 + u_3 \cdot 1 = u_1 + u_2 + u_3 = 1$$

**7.9** Prove: Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz estocástica de ordem $n$ e $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ é um vetor de probabilidade, então $uA$ é também um vetor de probabilidade.

A prova é semelhante à do problema acima para o caso de $n = 3$:

$$uA = (u_1, u_2, ..., u_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (u_1a_{11} + u_2a_{21} + ... + u_na_{n1}, u_1a_{12} + u_2a_{22} + ... + u_na_{n2}, ...,$$
$$u_1a_{1n} + u_2a_{2n} + ... + u_na_{nn})$$

Como os $u_i$ e $a_{ij}$ são não negativos, as componentes de $uA$ são também não negativas. Assim, somente precisamos provar que a soma dos componentes de $uA$ é igual a 1:

$$u_1a_{11} + u_2a_{21} + ... + u_na_{n1} + u_1a_{12} + u_2a_{22} + ... + u_na_{n2} + ... +$$
$$+ u_1a_{1n} + u_2a_{2n} + ... + u_na_{nn} = u_1(a_{11} + a_{12} + ... + a_{1n}) +$$
$$+ u_2(a_{21} + a_{22} + ... + a_{2n}) + ... + u_n(a_{n1} + a_{n2} + ... + a_{nn}) =$$
$$= u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot 1 + ... + u_n \cdot 1 = u_1 + u_2 + ... + u_n = 1$$

**7.10** Prove o Teorema 7.2: Se $A$ e $B$ são matrizes estocásticas, então o produto $AB$ é uma matriz estocástica. Portanto, todas as potências $A^n$ são matrizes estocásticas.

A $i$-ésima linha $s_i$ da matriz produto $AB$ é obtida pela multiplicação da $i$-ésima linha $r_i$ de $A$ pela matriz $B$: $s_i = r_iB$. Como cada $r_i$ é um vetor de probabilidade e $B$ é uma matriz estocástica, pelo problema anterior, $s_i$ é também um vetor de probabilidade. Portanto, $AB$ é uma matriz estocástica.

**7.11** Prove: Sejam $p = (p_1, p_2, ..., p_m)$ um vetor de probabilidade, e $T$ uma matriz cujas linhas são todas iguais ao vetor $t = (t_1, t_2, ..., t_m)$. Então $pT = t$.

Usando o fato de que $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$, temos

$$pT = (p_1, p_2, ..., p_m)\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_m \\ t_1 & t_2 & \dots & t_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_m \end{pmatrix}$$



$$= (p_1t_1 + p_2t_1 + ... + p_mt_1, p_1t_2 + p_2t_2 + ... + p_mt_2, ...,$$
$$p_1t_m + p_2t_m + ... + p_mt_m) =$$
$$= ((p_1 + p_2 + ... + p_m)t_1, (p_1 + p_2 + ... + p_m)t_2, ... (p_1 + p_2 + ... + p_m)t_m)$$
$$= (1 \cdot t_1, 1 \cdot t_2, ..., 1 \cdot t_m) = (t_1, t_2, ..., t_m) = t$$

## MATRIZES ESTOCÁSTICAS REGULARES E VETORES FIXOS DE PROBABILIDADE

**7.12** Encontre o único vetor fixo de probabilidade da matriz estocástica regular

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$, a que matriz tende $A^n$?

Precisamos de um vetor de probabilidade $t = (x, 1 - x)$, de modo que $tA = t$:

$$(x, 1 - x)\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (x, 1 - x)$$

Multiplicando-se o lado esquerdo da equação da matriz acima e igualando as componentes correspondentes obtemos as duas equações:

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = x, \qquad \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = 1 - x$$

Resolvendo cada equação, obtemos $x = \frac{2}{3}$. Assim, $t = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ é o vetor desejado.

Para verificar a resposta calculamos o produto $tA$:

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}, \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

A matriz $A^n$ tende à matriz $T$, cujas linhas são todas iguais ao vetor fixo $t$:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

**7.13** (i) Mostre que o vetor $u = (b, a)$ é um vetor fixo da matriz $2 \times 2$

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

(ii) Use o resultado de (i) para encontrar o único vetor fixo de probabilidade de cada uma das matrizes abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

(i) $uP = (b, a) \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} = (b - ab + ab,\ ab + a - ab) = (b, a) = u.$

(ii) Por (i), $u = (1, \frac{2}{3})$ é um vetor fixo de $A$. Multiplicamos $u$ por 3 para obter o vetor fixo $(3, 2)$ de $A$ que não tem frações. Então multiplicamos $(3, 2)$ por $\frac{1}{(3+2)} = \frac{1}{5}$ para obter o único vetor fixo de probabilidade desejado $(\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$.

Por (i), $u = (\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ é um vetor fixo de $B$. Multiplicamos $u$ por 6 para obter o vetor fixo $(4, 3)$, e então multiplicamos por $\frac{1}{(4+3)} = \frac{1}{7}$ para obter o único vetor fixo de probabilidade $(\frac{4}{7}, \frac{3}{7})$.

Por (i), $u = (0{,}8,\ 0{,}3)$ é um vetor fixo de $C$. Portanto, $(8, 3)$ e o vetor de probabilidade $(\frac{8}{11}, \frac{3}{11})$ são também vetores fixos de $C$.

**7.14** Encontre o único vetor fixo de probabilidade da matriz estocástica regular

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Método 1:** Procuramos um vetor de probabilidade $t = (x, y, 1-x-y)$, de modo que $tP = t$

$$(x, y, 1-x-y) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (x, y, 1-x-y)$$



Multiplicamos o lado esquerdo da equação matricial acima, e igualamos as componentes correspondentes para obter o sistema de três equações

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = x \\ \frac{1}{4}x + 1 - x - y = y \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = 1 - x - y \end{cases}$$

Ou

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + 8y = 4 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases}$$

Escolha duas quaisquer das equações e resolva para $x$ e $y$, obtendo $x = \frac{4}{11}$ e $y = \frac{4}{11}$. Verificamos a solução, substituindo $x$ e $y$ na terceira equação. Como $1 - x - y = \frac{3}{11}$, o vetor fixo de probabilidade desejado é

$$t = \left(\frac{4}{11}, \frac{4}{11}, \frac{3}{11}\right)$$

**Método 2:** Procuramos qualquer vetor fixo $u = (x, y, z)$ da matriz $P$:

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (x, y, z)$$

Multiplicamos o lado esquerdo da equação matricial acima, e igualamos as componentes correspondentes, obtendo o sistema de três equações:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = x \\ \frac{1}{4}x + z = y \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = z \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 4y + 4z = 0 \\ x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

Sabemos que o sistema tem uma solução diferente de zero; portanto, podemos atribuir arbitrariamente um valor para um dos elementos desconhecidos. Ponha $y = 4$. Então, pela primeira equação, $x = 4$, e pela terceira equação, $z = 3$. Assim, $u = (4, 4, 3)$ é um vetor fixo de $P$. Multiplicamos $u$ por $\frac{1}{(4+4+3)} = \frac{1}{11}$ e obtemos $t = \frac{1}{11}u = (\frac{4}{11}, \frac{4}{11}, \frac{3}{11})$, que é o vetor de probabilidade e também vetor fixo de $P$.

**7.15** Encontre o único vetor fixo de probabilidade da matriz estocástica regular

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

A que matriz tende $P^n$?

Procuramos primeiro qualquer vetor fixo $u = (x, y, z)$ da matriz $P$:

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = (x, y, z)$$

Multiplicamos o lado esquerdo da equação matricial e igualamos as componentes correspondentes, obtendo os sistema de três equações:

$$\begin{cases} \frac{1}{6}y = x \\ x + \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}z = y \\ \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = z \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 6x \\ 6x + 3y + 4z = 6y \\ y + z = 3z \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 6x \\ 6x + 4z = 3y \\ y = 2z \end{cases}$$

Sabemos que o sistema tem uma solução diferente de zero; portanto, podemos atribuir arbitrariamente um valor para um dos elementos desconhecidos. Ponha $x = 1$. Então, pela primeira equação, $y = 6$, e pela última equação, $z = 3$. Assim, $u = (1, 6, 3)$ é um vetor fixo de $P$. Como $1 + 6 + 3 =$



$P^n$ tende para a matriz $T$ cujas linhas são iguais ao vetor fixo de $t$:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

**7.16** Se $t = (\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0)$ é um vetor fixo da matriz estocástica $P$, por que $P$ não é regular?

Se $P$ é regular então, pelo Teorema 7.3, $P$ tem um único vetor fixo de probabilidade, cujas componentes são todas positivas. Como as componentes do vetor fixo de probabilidade dado não são todas positivas, $P$ não pode ser regular.

**7.17** Quais das seguintes matrizes estocásticas são regulares?

(i) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ (iv) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Lembremos que uma matriz estocástica é regular, se uma potência da matriz tem somente entradas positivas.

(i) $A$ não é regular, porque existe um 1 na diagonal principal (na segunda linha).

(ii) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = a matriz identidade I.

$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B$

Assim, cada potência par de $B$ é a matriz identidade $I$ e cada potência ímpar de $B$ é a matriz $B$. Conseqüentemente, cada potência de $B$ tem entradas nulas e portanto $B$ não é regular.

(iii) $C$ não é regular, porque existe um 1 na diagonal principal

(iv) $D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ e $D^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{32} & \frac{41}{64} & \frac{13}{64} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}$

Como todas as entradas de $D^3$ são positivas, $D$ é regular.

## CADEIAS DE MARKOV

**7.18** Os hábitos de estudo de um estudante são os seguintes: se estuda uma noite, tem 70% de certeza que não estudará na noite seguinte. Em contrapartida, se não estuda uma noite, tem 60% de certeza de que não estudará também na noite seguinte. Com que freqüência ele estuda numa seqüência suficientemente grande de dias?

Os estados do sistema são $S$ (estudar) e $T$ (não estudar). A matriz de transição é

$$P = \begin{array}{c|cc} & S & T \\ \hline S & 0{,}3 & 0{,}7 \\ T & 0{,}4 & 0{,}6 \end{array}$$

Para descobrirmos o que acontece no final de um número suficientemente grande de dias, devemos determinar o único vetor fixo de probabilidades $t$ de $P$. Pelo problema 7.13, $u = (0{,}4,\ 0{,}7)$ é um vetor fixo de $P$ e assim, $t = (\frac{4}{11}, \frac{7}{11})$ é o vetor de probabilidade desejado. Assim, após um número suficientemente grande de dias ele estuda $\frac{4}{11}$ das vezes.

**7.19** Um psicólogo faz os seguintes assentamentos a respeito do comportamento de camundongos submetidos a um programa particular de alimentação: para qualquer ensaio particular, 80% dos camundongos que se dirigiram para a direita no experimento anterior, se dirigirão para a direita neste ensaio, e 60% dos que se dirigiram para a esquerda no experimento anterior, se dirigirão para a direita neste ensaio. Se 50% se dirigiram para a direita no primeiro ensaio, o que poderia ele prever com respeito (i) ao segundo ensaio, (ii) ao terceiro ensaio, (iii) e ao milésimo ensaio?

Os estados do sistema são $R$ (direita) e $L$ (esquerda). A matriz de transição é

$$P = \begin{array}{c|cc} & R & L \\ \hline R & 0{,}8 & 0{,}2 \\ L & 0{,}6 & 0{,}4 \end{array}$$



A distribuição de probabilidade para o primeiro ensaio é $p = (0{,}5,\ 0{,}5)$. Para calcular a distribuição de probabilidade para a etapa seguinte, isto é, o segundo ensaio, multiplicamos $p$ pela matriz de transição $P$:

$$(0{,}5,\ 0{,}5)\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} = (0{,}7,\ 0{,}3)$$

Assim, no segundo ensaio, sua previsão é que 70% dos ratos irão para a direita e 30% para a esquerda. Para calcular a distribuição de probabilidades do terceiro ensaio multiplique a do segundo por $P$:

$$(0{,}7,\ 0{,}3)\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} = (0{,}74,\ 0{,}26)$$

Assim, no terceiro ensaio sua previsão é que 74% dos ratos irão para a direita e 26% irão para a esquerda.

A distribuição de probabilidade para o milésimo ensaio é essencialmente a distribuição de probabilidade estacionária da cadeia de Markov, isto é, o único vetor fixo de probabilidade $t$ da matriz de transição $P$. Pelo Problema 7.13, $u = (0{,}6,\ 0{,}2)$ é um vetor fixo de $P$ e, portanto, $t = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) = (0{,}75,\ 0{,}25)$. Ele prevê que, no milésimo ensaio, 75% dos camundongos irão para a direita e 25% irão para a esquerda.

**7.20** Dada a matriz de transição de $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ com distribuição inicial de probabilidade $p^{(0)} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, defina e calcule: (i) $p^{(3)}_{21}$ (ii) $p^{(3)}$ (iii) $p^{(3)}_2$

(i) $p^{(3)}_{21}$ é a probabilidade de passar do estado $a_2$ para o estado $a_1$ em três etapas. Isto pode ser obtido a partir da matriz de transição em três etapas $P^{(3)}$; portanto, calculemos primeiro $P^{(3)}$.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Então $p^3_{21}$ é a entrada na segunda linha e primeira coluna de $P^3$:

$$p^3_{21} = \frac{7}{8}.$$

(ii) $p^{(3)}$ é a distribuição de probabilidade do sistema após 3 etapas. Isto pode ser obtido calculando-se sucessivamente $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ e então $p^{(3)}$:

$$p^{(1)} = p^{(0)}P = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)$$

$$p^{(2)} = p^{(1)}P = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\tfrac{5}{6}, \tfrac{1}{6}\right)$$

$$p^{(3)} = p^{(2)}P = \left(\tfrac{5}{6}, \tfrac{1}{6}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\tfrac{11}{12}, \tfrac{1}{12}\right)$$

Entretanto, como a matriz de transição em 3 etapas $P^3$ já foi calculada em (i), $p^{(3)}$ pode também ser obtido como segue:

$$p^{(3)} = p^{(0)}P^3 = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tfrac{7}{8} & \tfrac{1}{8} \end{pmatrix} = \left(\tfrac{11}{12}, \tfrac{1}{12}\right)$$

(iii) $p_2^{(3)}$ é a probabilidade de que o processo esteja no estado $a^2$ após 3 etapas; é que a segunda componente da distribuição de probabilidade $p^{(3)}$: $p_2^{(3)} = \tfrac{1}{12}$.

**7.21** Dada a matriz de transição $P = \begin{pmatrix} 0 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e a distribuição de probabilidade inicial $p^0 = \left(\tfrac{2}{3}, 0, \tfrac{1}{3}\right)$, determine: (i) $p_{32}^{(2)}$ e $p_{13}^{(2)}$, (ii) $p^{(4)}$ e $p_3^{(4)}$, (iii) o vetor a que tende $p^0P^n$, (iv) a matriz a que tende $P^n$

(i) Calcule primeiro a matriz de transição em duas etapas $P^2$:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{4} & \tfrac{3}{4} & 0 \\ \tfrac{1}{4} & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{4} \\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$



Então $p_{32}^{(2)} = \tfrac{1}{2}$ e $p_{13}^{(2)} = 0$, já que estes números correspondem a entradas em $P^2$.

(ii) Para calcular $p^{(4)}$, use a matriz de transição $P^2$ e a distribuição de probabilidade inicial $p^{(0)}$.

$$p^{(2)} = p^{(0)}P^2 = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 0\right) \quad \text{e} \quad p^{(4)} = p^{(2)}P^2 = \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{7}{12}, \tfrac{1}{6}\right)$$

Já que $p_3^{(4)}$ é a terceira componente de $p^{(4)}$, $p_3^{(4)} = \tfrac{1}{6}$.

(iii) Pelo Teorema 7.3, $p^{(0)}P^n$ tende ao único vetor fixo de probabilidade $t$ de $P$. Para obter $t$, primeiro determine algum vetor fixo $u = (x, y, z)$:

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} 0 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (x, y, z) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}y = x \\ \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y + z = y \\ \tfrac{1}{2}x = z \end{cases}$$

Determine qualquer solução positiva do sistema de equações acima. Ponha $z = 1$; então, pela terceira equação, $x = 2$ e pela primeira equação, $y = 4$. Assim, $u = (2, 4, 1)$ é um ponto fixo de $P$, de modo que $t = \left(\tfrac{2}{7}, \tfrac{4}{7}, \tfrac{1}{7}\right)$. Em outras palavras, $p^{(0)}P^n$ tende a $\left(\tfrac{2}{7}, \tfrac{4}{7}, \tfrac{1}{7}\right)$.

(iv) $P^{(n)}$ tende para a matriz $T$, cujas linhas são cada uma o vetor fixo de probabilidade de $P$; portanto, $P^n$ tende a

$$\begin{pmatrix} \tfrac{2}{7} & \tfrac{4}{7} & \tfrac{1}{7} \\ \tfrac{2}{7} & \tfrac{4}{7} & \tfrac{1}{7} \\ \tfrac{2}{7} & \tfrac{4}{7} & \tfrac{1}{7} \end{pmatrix}$$

**7.22** O território de um vendedor é constituído de três cidades, $A$, $B$ e $C$. Ele nunca vende na mesma cidade em dias sucessivos. Se vende na cidade $A$, no dia seguinte vende na cidade $B$. Contudo, se vende em $B$ ou em $C$, então no dia seguinte é duas vezes mais provável que ele venda em $A$ de que na outra cidade. Após um número suficientemente grande de dias com que freqüência ele vende em cada uma das cidades?

A matriz de transição do problema é a seguinte:

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

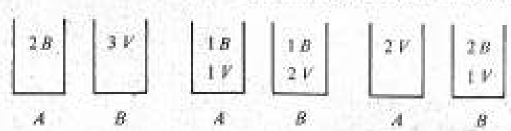
Procuramos o único vetor fixo de probabilidade $t$ da matriz $P$. Determine primeiro um vetor fixo qualquer, $u = (x, y, z)$:

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = (x, y, z) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = x \\ x + \frac{1}{3}z = y \\ \frac{1}{3}y = z \end{cases}$$

Ponha $z = 1$. Então, pela terceira equação, $y = 3$ e pela primeira equação, $x = \frac{8}{3}$. Assim, $u = (\frac{8}{3}, 3, 1)$. Da mesma forma $3u = (8, 9, 3)$ é um vetor fixo de $P$. Multiplicando-se $3u$ por $\frac{1}{(8 + 9 + 3)} = \frac{1}{20}$, obtemos o vetor fixo de probabilidade $t = (\frac{2}{5}, \frac{9}{20}, \frac{3}{20}) = (0{,}40, 0{,}45, 0{,}15)$. Assim, após um número suficientemente grande de dias, ele vende 40% das vezes na cidade $A$, 45% das vezes em $B$ e 15% das vezes em $C$.

**7.23** Existem duas bolas brancas em uma urna $A$ e 3 vermelhas na urna $B$. Em cada etapa do processo uma bola é selecionada de cada urna e as duas bolas selecionadas são trocadas de lugar. Seja $a_i$ o número de bolas vermelhas na urna $A$. (i) Encontre a matriz de transição $P$. (ii) Qual é a probabilidade de que existam 2 bolas vermelhas na urna $A$ após 3 etapas? (iii) Após um número suficientemente grande de etapas, qual é a probabilidade de que existam 2 bolas vermelhas na urna $A$?

(i) Existem três estados, $a_0$, $a_1$ e $a_2$ descritos pelo seguinte diagrama:






Se o sistema está no estado $a_0$, então a bola branca deve ser selecionada da urna $A$ e a bola vermelha da urna $B$, de modo que o sistema deve se mover para o estado $a_1$. Conseqüentemente, a primeira linha da matriz de transição é $(0, 1, 0)$.

Suponha que o sistema está no estado $a_1$. Este pode se mover para o estado $a_0$ se e somente se uma bola vermelha é selecionada da urna $A$ e uma bola branca da urna $B$; a probabilidade de que isto ocorra é $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Assim, $p_{10} = \frac{1}{6}$. O sistema pode se mover do estado $a_1$ para $a_2$ se e somente se uma bola branca é selecionada da urna $A$ e uma bola vermelha da urna $B$; a probabilidade de que isto ocorra é $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Assim, $p_{12} = \frac{1}{3}$. Conseqüentemente, a probabilidade de que o sistema permaneça no estado $a_1$ é $p_{11} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. Assim, a segunda linha da matriz de transição é $(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$. (Note que $p_{11}$ pode também ser obtida do fato de que o sistema permanece no estado $a_1$ se uma bola branca é retirada de cada urna, com probabilidade $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, ou uma bola vermelha é retirada de cada uma, com probabilidade $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$; assim, $p_{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.)

Agora suponha que o sistema está no estado $a_2$. Uma bola vermelha deve ser retirada da urna $A$. Se uma bola vermelha é selecionada da urna $B$, com probabilidade $\frac{1}{3}$, então o sistema permanece no estado $a_2$; e se uma bola branca é selecionada da urna $B$, com probabilidade $\frac{2}{3}$, então o sistema se move para o estado $a_1$. Note que o sistema não pode nunca se mover para o estado $a_0$. Assim, a terceira linha da matriz de transição é $(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Ou seja,

$$P = \begin{array}{c} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_0 & a_1 & a_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

(ii) O sistema começa no estado $a_0$, isto é, $p^{(0)} = (1, 0, 0)$. Assim:

$$p^{(1)} = p^{(0)}P = (0, 1, 0), \quad p^{(2)} = p^{(1)}P = (\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}),$$

$$p^{(3)} = p^{(2)}P = (\tfrac{1}{12}, \tfrac{23}{36}, \tfrac{5}{18}).$$

Conseqüentemente, a probabilidade de que existam 2 bolas vermelhas na urna $A$ depois de 3 etapas é

(iii) Procuramos o único vetor fixo de probabilidade $t$ da matriz de transição $P$. Determine primeiro qualquer vetor fixo $u = (x, y, z)$:

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = (x, y, z) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \frac{1}{6}y = x \\ x + \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}z = y \\ \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = z \end{cases}$$

Ponha $x = 1$. Então, pela primeira equação, $y = 6$ e pela terceira equação, $z = 3$. Portanto, $u = (1, 6, 3)$. Multiplique $u$ por $\frac{1}{(1 + 6 + 3)} = \frac{1}{10}$ e obtenha o único vetor fixo de probabilidade desejado $t = (0{,}1,\ 0{,}6,\ 0{,}3)$. Assim, após um número suficientemente grande de etapas, 30% das vezes haverá 2 bolas vermelhas na urna $A$.

Note que após um número suficientemente grande de etapas a distribuição de probabilidade é a mesma como se 5 bolas fossem colocadas na urna e 2 fossem selecionadas aleatoriamente para por-se na urna $A$.

7.24 Um jogador tem Cr$ 2,00. Ele aposta Cr$ 1,00 de cada vez e ganha Cr$ 1,00 com probabilidade $\frac{1}{2}$. Ele pára de jogar, se perder os Cr$ 2,00 ou ganhar Cr$ 4,00. (i) Qual é a probabilidade de que ele perca seu dinheiro após no máximo 5 jogadas? (ii) Qual é a probabilidade de que o jogo dure mais que 7 jogadas?

Este é um passeio aleatório com barreiras absorventes em 0 e 6 (veja os Exemplos 7.22 e 7.23). A matriz de transição é

$$P = \begin{array}{c} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$



com distribuição de probabilidade inicial $p = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$, já que ele começa com Cr$ 2,00.

(i) Procuramos $p_0^{(5)}$, a probabilidade de que o sistema esteja no estado $a_0$ após 5 etapas. Calcule a distribuição de probabilidade em 5 etapas $p^{(5)}$.

$$p^{(1)} = p^{(0)}P = (0, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0, 0, 0)$$

$$p^{(2)} = p^{(1)}P = (\tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{4}, 0, 0)$$

$$p^{(3)} = p^{(2)}P = (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{3}{8}, 0, \tfrac{1}{8}, 0)$$

$$p^{(4)} = p^{(3)}P = (\tfrac{3}{8}, 0, \tfrac{5}{16}, 0, \tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{16})$$

$$p^{(5)} = p^{(4)}P = (\tfrac{3}{8}, \tfrac{5}{32}, 0, \tfrac{9}{32}, 0, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{16})$$

Assim $p_0^{(5)}$, a probabilidade de que ele não tenha dinheiro depois da quinta partida é $\frac{3}{8}$.

(ii) Calcule $p^{(7)}$:

$$p^{(6)} = p^{(5)}P = (\tfrac{29}{64}, 0, \tfrac{7}{32}, 0, \tfrac{13}{64}, 0, \tfrac{1}{8})$$

$$p^{(7)} = p^{(6)}P = (\tfrac{29}{64}, \tfrac{7}{64}, 0, \tfrac{27}{128}, 0, \tfrac{13}{128}, \tfrac{1}{8}).$$

A probabilidade de que o jogo dure mais de 7 jogadas, isto é, a probabilidade de que o sistema não esteja nos estados $a_0$ ou $a_6$, após 7 etapas é

$$\frac{7}{64} + \frac{27}{128} + \frac{13}{128} = \frac{27}{64}$$

7.25 Considere lançamentos sucessivos de um dado não viciado. Seja $X$ o maior número observado nos $n$ primeiros lançamentos.

(i) Encontre a matriz de transição $P$ da cadeia de Markov. A matriz é regular?

(ii) Encontre $p^{(1)}$, a distribuição de probabilidade após o primeiro lançamento.

(iii) Encontre $p^{(2)}$ e $p^{(3)}$.

(i) O espaço de estados da cadeia de Markov é (1, 2, 3, 4, 5, 6). A matriz

Logo, a distribuição de probabilidade no instante $k + 1$ é

$$p^* = \left( \sum_{i=1}^{m} p_i p_{i1},\ \sum_{i=1}^{m} p_i p_{i2},\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{m} p_i p_{im} \right)$$

Entretanto, este vetor é precisamente o produto do vetor $p = (p_i)$ pela matriz $P = (p_{ij})$: $p^* = pP$.

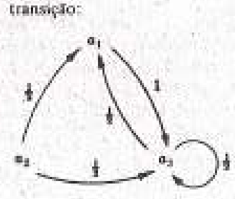
**7.28** Provar o Teorema 7.5: Seja $P$ a matriz de transição da cadeia de Markov. Então a matriz de transição em $n$ etapas é igual à $n$-ésima potência de $P$:

$$P^{(n)} = P^n.$$

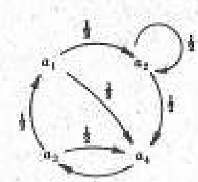
Suponha que o sistema esteja no estado $a_i$ no instante $k$. Determinemos a probabilidade $p_{ij}^{(n)}$ de que o sistema esteja no estado $a_j$ no instante $k + n$. Agora a distribuição de probabilidade do sistema no instante $k$, visto que o sistema está no estado $a_i$, é o vetor $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, o qual tem um 1 na $i$-ésima posição e zero nas outras. Pelo problema precedente, a distribuição de probabilidade no instante $k + n$ é o produto $e_i P^n$. Mas $e_i P^n$ é a $i$-ésima linha da matriz $P^n$. Assim, $p_{ij}^{(n)}$ é a $j$-ésima componente da $i$-ésima linha de $P^n$, e assim $P^{(n)} = P^n$.

## PROBLEMAS DIVERSOS

**7.29** As probabilidades de transição da cadeia de Markov podem ser representadas por um diagrama, chamado *diagrama de transição*, onde uma probabilidade positiva $p_{ij}$ é representada por uma flecha do estado $a_i$ para o estado $a_j$. Determine a matriz de transição de cada um dos seguintes diagramas de transição:



(i)



(ii)

(i) Note primeiramente que o espaço de estados é $\{a_1, a_2, a_3\}$ e assim a



$$P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

A $i$-ésima linha da matriz é obtida achando aquelas flechas que provém de $a_i$ no diagrama; o número atribuído para a flecha de $a_i$ para $a_j$ é o $j$-ésimo componente da $i$-ésima linha. Assim, a matriz de transição é

$$P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

(ii) O espaço de estado é $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. A matriz de transição é

$$P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

**7.30** Suponha que a matriz de transição de uma cadeia de Markov seja

$$P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

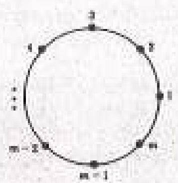
A cadeia de Markov é regular?

Note que se o sistema entra uma vez no estado $a_1$ ou no estado $a_2$, então ele nunca pode se mover para o estado $a_3$ ou estado $a_4$, isto é, o sistema permanece no subespaço de estados $\{a_1, a_2\}$. Assim, em resumo, $p_{13}^{(n)} = 0$ para todo $n$ e então toda potência $P^n$ conterá uma entrada nula. Logo, $P$ não é regular.

**7.31** Suponha que $m$ pontos num círculo são numerados de 1 a $m$, na direção anti-horária. Uma partícula realiza um "passeio aleatório" no círculo; ele se move uma unidade na direção anti-horária com a probabilidade $p$ ou uma unidade no sentido horário com probabilidade $q = 1 - p$. Determine a matriz de transição desta cadeia de Markov.

O espaço de estado é $\{1, 2, ..., m\}$. O diagrama abaixo à direita pode ser usado para obter a matriz de transição que aparece à esquerda.

$$P = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & m-2 & m-1 & m \\ 1 & 0 & p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & q \\ 2 & q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ m-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ m & p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q & 0 \end{array}$$




## PROBLEMAS SUPLEMENTARES

### MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZ

**7.32** Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ Calcule $\mu A$, se

(i) $u = (1, -3, 2)$, (ii) $u = (3, 0, -2)$, (iii) $u = (4, -1, -1)$.

**7.33** Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ Calcule $AB$ e $BA$.

**7.34** Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ Calcule $A^2$ e $A^3$.

**7.35** Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \dots \end{pmatrix}$ Calcule $A^n$



### VETORES DE PROBABILIDADE E MATRIZES ESTOCÁSTICAS

**7.36** Quais dos vetores abaixo são vetores de probabilidade?

(i) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ (ii) $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ (iii) $(\frac{1}{12}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{4})$.

**7.37** Determine um múltiplo escalar de cada um dos vetores que seja vetor de probabilidade:

(i) $(3, 0, 2, 5, 3)$ (ii) $(2, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 1)$ (iii) $(\frac{1}{3}, 2, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3})$.

**7.38** Quais das matrizes são estocásticas?

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (v) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

### MATRIZES ESTOCÁSTICAS REGULARES E VETORES FIXOS DE PROBABILIDADE

**7.39** Determine o único vetor fixado de probabilidade de cada uma das matrizes:

(i) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$

**7.40** (i) Determine o único vetor fixo de probabilidade $t$ de

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) A que matrizes tende $P^n$? (iii) A que vetor tende $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ tende

**7.41** Determine o único vetor fixado de probabilidade $t$ de cada uma das matrizes:

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (ii) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

**7.42** (i) Determine o único vetor fixo de probabilidade fixo $t$ de

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(ii) A que matriz tende $P^n$?

(iii) A que vetor tende $(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})P^n$?

(iv) A que vetor tende $(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})P^n$?

**7.43** (i) Sendo $t = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ um ponto fixo da matriz estocástica $P$, é ela regular?

(ii) Sendo $t = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ um ponto fixo da matriz estocástica $P$, é ela regular?

**7.44** Quais dessas matrizes estocásticas são regulares?

(i) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**7.45** Mostre que $(cf + ce + de, af + bf + ae, ad + bd + bc)$ é um ponto fixo da matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1-a-b & a & b \\ c & 1-c-d & d \\ e & f & 1-e-f \end{pmatrix}$$



## CADEIAS DE MARKOV

**7.46** São os seguintes os hábitos de um fumante: se ele fuma cigarros com filtro uma semana, muda para cigarros sem filtros na semana seguinte com probabilidade 0,2. Por outro lado, se fuma cigarros sem filtros numa semana, tem uma probabilidade de 0,7 de fumar cigarros sem filtros na semana seguinte. Após um número suficientemente grande de dias, com que frequência ele fuma cigarros com filtros?

**7.47** A sorte de um jogador segue o seguinte padrão: se ele vence um jogo, a probabilidade de vencer o próximo é 0,6. Contudo, se perde um jogo, a probabilidade de perder o próximo é 0,7. No primeiro jogo, ele tem chances iguais de vencer ou perder.

(i) Qual é a probabilidade de vencer o segundo jogo?

(ii) Qual é a probabilidade de vencer o terceiro jogo?

(iii) Após um número suficientemente grande de jogos, qual é sua frequência de vitórias?

**7.48** Para uma cadeia de Markov, a matriz de transição é $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ com distribuição inicial de probabilidade $p^{(0)} = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$. Determinar:

(i) $p_{21}^{(2)}$; (ii) $p_{12}^{(2)}$; (iii) $p^{(2)}$; (iv) $p_1^{(2)}$

(v) A que vetor tende $p^{(0)}P^n$; (vi) A que matriz tende $P^n$.

**7.49** Para uma cadeia de Markov, a matriz de transição é

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

e a distribuição inicial de probabilidade é $p^{(0)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Determine:

(i) $p_{13}^{(2)}$; (ii) $p_{23}^{(2)}$; (iii) $p^{(2)}$; (iv) $p_1^{(2)}$.

**7.50** Todo ano um homem troca seu carro por um novo. Se tem um Buick, ele o troca por um Plymouth. Se tem um Plymouth, troca-o por um Ford. Contudo, se tem um Ford é tão provável que o troque por um novo Ford como por um Buick ou um Plymouth. Em 1955 ele comprou seu primeiro carro, que era um Ford.

(i) Achar a probabilidade de que ele tenha um (*a*) Ford 1957, (*b*) um Buick 1957, (*c*) Plymouth 1958, (*d*) Ford 1958.

(ii) Após um número suficientemente grande de anos, com que frequência ele terá tido um Ford?

**7.51** Existem duas bolas brancas na urna $A$ e quatro bolas vermelhas na urna $B$. Em cada etapa do processo, uma bola é selecionada de cada urna e as duas bolas selecionadas são intercambiadas. Seja $X_n$ o número de bolas vermelhas na urna $A$ após $n$ trocas. (i) Determine a matriz de transição $P$. (ii) Qual é a probabilidade de que existam duas bolas vermelhas na urna $A$ após 3 etapas? (iii) Após um número suficientemente grande de etapas, qual é a probabilidade de que existam duas bolas vermelhas na urna $A$?

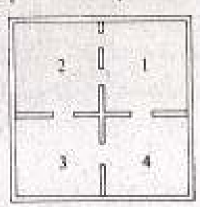
**7.52** Resolva o problema precedente para o caso em que existem 3 bolas brancas na urna $A$ e 3 vermelhas na urna $B$.

**7.53** Uma moeda não viciada é lançada até que ocorram 3 caras seguidas. Seja $X_n$ o comprimento da seqüência de caras terminando no $n$-ésimo lançamento. (Veja o Exemplo 7.24). Qual é a probabilidade de que existam pelo menos 8 lançamentos da moeda?

**7.54** Um jogador tem 3 dólares. Em cada partida, ele perde um dólar com probabilidade $\frac{3}{4}$, mas ganha 2 dólares com probabilidade $\frac{1}{4}$. Ele pára de jogar, se perder seus três dólares ou se ganhar pelo menos 3 dólares.

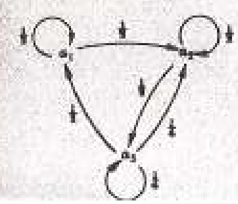
(i) Determine a matriz de transição da cadeia de Markov.
(ii) Qual é a probabilidade de que existam pelo menos 4 partidas?

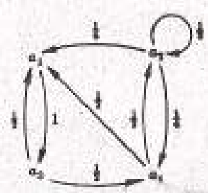
**7.55** O diagrama ao lado mostra quatro compartimentos com portas ligando um ao outro. Um rato em qualquer dos compartimentos tem igual probabilidade de passar através de suas portas. Encontre a matriz de transição da cadeia de Markov.




**PROBLEMAS DIVERSOS**

**7.56** Encontre a matriz de transição correspondente a cada um dos diagramas:







**7.57** Desenhe um diagrama de transição para cada uma das matrizes de transição:

$$\text{(i)}\ P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{(ii)}\ P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

**7.58** Considere o vetor $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ que tem um 1 na $i$-ésima posição e zeros nas demais. Mostre que $e_iA$ é a $i$-ésima linha da matriz $A$ (sempre que o produto for definido).

## RESPOSTAS DOS PROBLEMAS SUPLEMENTARES

**7.32** (i) $(-1, -1, 12)$, (ii) $(-7, -10, 3)$, (iii) $(-5, -11, 10)$

**7.33** $AB = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 17 & -10 \end{pmatrix}$, $\quad BA = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 13 \\ -3 & -9 & 9 \\ -5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$

**7.34** $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\quad A^3 = \begin{pmatrix} 26 & 18 \\ 27 & -1 \end{pmatrix}$

**7.35** $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**7.36** Somente (iii).

**7.37** (i) $(\frac{3}{13}, 0, \frac{2}{13}, \frac{5}{13}, \frac{3}{13})$

(ii) $(\frac{8}{18}, \frac{2}{18}, 0, \frac{1}{18}, \frac{3}{18}, 0, \frac{4}{18})$

(iii) $(\frac{4}{45}, \frac{24}{45}, \frac{6}{45}, 0, \frac{3}{45}, \frac{8}{45})$

**7.38** Somente (ii) e (iv)

**7.39** (i) $(\frac{6}{11}, \frac{5}{11})$, (ii) $(\frac{10}{19}, \frac{9}{19})$, (iii) $(\frac{5}{13}, \frac{8}{13})$, (iv) $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

**7.40** (i) $t = (\frac{4}{13}, \frac{8}{13}, \frac{1}{13})$, (iii) $t = (\frac{4}{13}, \frac{8}{13}, \frac{1}{13})$

**7.41** (i) $t = (\frac{2}{9}, \frac{6}{9}, \frac{1}{9})$, (ii) $t = (\frac{5}{15}, \frac{6}{15}, \frac{4}{15})$