# PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS ÚTEIS EM SISTEMAS COMPUTACIONAIS:

- NÚMERO DE JOBS ESPERANDO PARA SEREM PROCESSADOS, $N_t$
- TEMPO DE RESPOSTA EM UM SISTEMA ON-LINE, $T_R$
- TEMPO ENTRE MENSAGENS RECEBIDAS, $T_E$

$N_9 \neq N_{12}$

NA VERDADE, TEM-SE UMA FAMÍLIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS $\{N_t, t \in T\}$, ONDE $T$ É O CONJUNTO DE TODOS OS TEMPOS DURANTE O DIA NO QUAL O CENTRO DE COMPUTAÇÃO ESTÁ OPERANDO. MESMA OBSERVAÇÃO PARA $T_R$ E $T_E$.

**DEFINIÇÃO.** UMA FAMÍLIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS $\{X(t), t \in T\}$ É CHAMADA UM PROCESSO ESTOCÁSTICO.

$T$, CONJUNTO DE ÍNDICES

$\forall\, t \in T$, $X(t)$ É UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

$T$ É USUALMENTE REFERENCIADO COMO PARÂMETRO TEMPO.

O CONJUNTO DE TODOS OS POSSÍVEIS VALORES QUE AS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS PODEM ASSUMIR É CHAMADO ESPAÇO DE ESTADOS E CADA UM DESSES VALORES É CHAMADO ESTADO DO PROCESSO.

## CLASSIFICAÇÃO DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

a) ESPAÇO DE PARÂMETROS

$T = \{0, 1, 2, \dots\}$ OU $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

**PROCESSO COM PARÂMETRO DISCRETO**

USUALMENTE DENOTADO POR $\{X_n\}$.

$T = \{t : -\infty < t < +\infty\}$ OU $T = \{t : t \geq 0\}$

**PROCESSO COM PARÂMETRO CONTÍNUO**

USUALMENTE INDICADO POR $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ OU $\{X(t), t \geq 0\}$.

b) ESPAÇO DE ESTADOS

**DISCRETO,** SE FINITO OU CONTÁVEL

**CONTÍNUO,** SE NÃO-NUMERÁVEL

**EX. 1.** TEMPO DE ESPERA DE UMA CONSULTA A UMA BASE DE DADOS, $\{W(t), t \geq 0\}$.

ESPAÇO DE PARÂMETROS: CONTÍNUO

" " ESTADOS: "

**EX. 2.** NÚMERO DE MENSAGENS QUE CHEGAM NO PERÍODO DE 0 A $t$, $\{N(t), t \geq 0\}$.

ESPAÇO DE PARÂMETROS: CONTÍNUO

" " ESTADOS: DISCRETO

EX. 3. $\{X_n, n = 1, 2, \ldots, 7\}$ TEMPO MÉDIO DE EXECUÇÃO DE UM JOB NO N-ÉSIMO DIA DA SEMANA.

ESPAÇO DE PARÂMETROS: DISCRETO

" " ESTADOS: CONTÍNUO

EX. 4. $\{X_n, n = 1, \ldots, 366\}$ NÚMERO DE JOBS PROCESSADOS EM UM CPD NO N-ÉSIMO DIA DO ANO.

ESPAÇO DE PARÂMETROS: DISCRETO

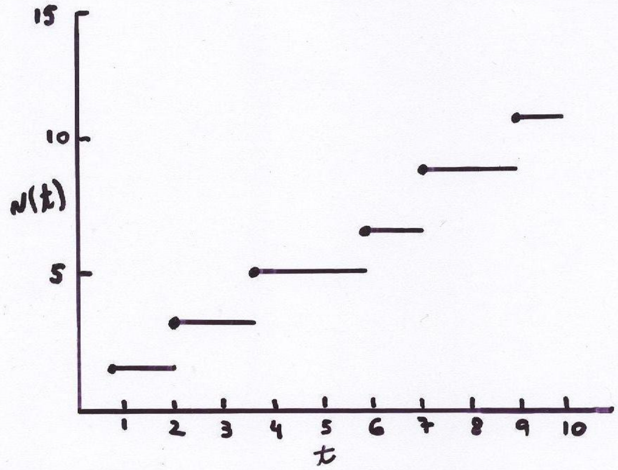
" " ESTADOS: "

PROCESSO DE CONTAGEM (COUNTING PROCESS)

SEJAM OS EVENTOS:

- UMA CHAMADA TELEFÔNICA NUMA CENTRAL DE RESERVAS DE UMA COMPANHIA AÉREA;
- A OCORRÊNCIA DE UMA FALHA POR SOFTWARE OU HARDWARE EM UM SISTEMA.

TAIS EVENTOS PODEM SER DESCRITOS POR UMA FUNÇÃO DE CONTAGEM $N(t)$ DEFINIDA PARA TODO $t > 0$ COMO O NÚMERO DE EVENTOS QUE OCORRERAM DEPOIS DO TEMPO 0 MAS NÃO MAIS TARDE DO QUE O TEMPO $t$.




**DEFINIÇÃO.** $\{N(t), t \geq 0\}$ CONSTITUE UM PROCESSO DE CONTAGEM SE:

(1) $N(0)=0$,

(2) $N(t)$ ASSUME SOMENTE VALORES INTEIROS NÃO-NEGATIVOS,

(3) $s < t \Rightarrow N(s) \leq N(t)$,

(4) $N(t)-N(s)$ É O NÚMERO DE EVENTOS QUE OCORRERAM EM $[s,t)$.

A PRÓXIMA DEFINIÇÃO FORMALIZA A IDÉIA DE "UMA QUANTIDADE PEQUENA COM RESPEITO A OUTRA". VANTAGEM: TORNA POSSÍVEL INDICAR ESSE FATO SEM ESPECIFICAR O EXATO RELACIONAMENTO ENTRE AS DUAS QUANTIDADES.

**DEFINIÇÃO.** $f$ É $o(h)$ SE $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.

**DEFINIÇÃO.** UM PROCESSO ESTOCÁSTICO $\{X(t), t \geq 0\}$ COM PARÂMETRO CONTÍNUO TEM:

a) INCREMENTOS INDEPENDENTES

SE EVENTOS OCORRENDO EM INTERVALOS DE TEMPO QUE NÃO SE SOBREPÕEM SÃO INDEPENDENTES. ISTO É SE $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ NÃO SE SOBREPÕEM $X(b_1) - X(a_1), \ldots, X(b_n) - X(a_n)$ SÃO V. A. INDEPENDENTES.

b) INCREMENTOS ESTACIONÁRIOS

$X(t+h) - X(s+h)$ TEM A MESMA DISTRIBUIÇÃO QUE $X(t) - X(s)$ PARA CADA ESCOLHA $s$ E $t$, $s<t$ E $h>0$. ISTO É, A DISTRIBUIÇÃO DE $X(t) - X(s)$ DEPENDE APENAS DO COMPRIMENTO DO INTERVALO E NÃO DOS POSSÍVEIS VALORES DE $s$ E $t$.

## PROCESSO DE POISSON (POISSON PROCESS)

**DEFINIÇÃO.** UM PROCESSO DE CONTAGEM $\{N(t), t \geq 0\}$ É UM PROCESSO DE POISSON COM TAXA $\lambda > 0$ SE:

(1) O PROCESSO TEM INCREMENTOS INDEPENDENTES

(2) " " " " ESTACIONÁRIOS

(3) $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$

(PROBABILIDADE DA OCORRÊNCIA DE EXATAMENTE 1 EVENTO EM QUALQUER INTERVALO DE TEMPO DE COMPRIMENTO $h$)

(4) $P(N(h) \geq 2) = o(h)$

(PROBABILIDADE DA OCORRÊNCIA DE MAIS DO QUE 1 EVENTO EM QQUER INTERVALO DE TEMPO DE COMPRIMENTO $h$)

**TEOREMA.** SEJA $\{N(t), t \geq 0\}$ UM PROCESSO DE POISSON COM TAXA $\lambda > 0$. ENTÃO A VARIÁVEL ALEATÓRIA DESCREVENDO O NÚMERO DE EVENTOS EM QQUER INTERVALO DE TEMPO DE COMPRIMENTO $t > 0$, TEM UMA DISTRIBUIÇÃO DE POISSON COM PARÂMETRO $\lambda t$,

$$P(Y = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

ENTÃO O NÚMERO MÉDIO DE EVENTOS OCORRENDO EM QQUER INTERVALO DE TEMPO DE COMPRIMENTO $t$ É $\lambda t$; E O NÚMERO MÉDIO DE EVENTOS OCORRENDO POR UNIDADE DE TEMPO É $\frac{\lambda t}{t} = \lambda$.

O PRÓXIMO TEOREMA MOSTRA OUTRO IMPORTANTE ATRIBUTO DO PROCESSO DE POISSON, QUE É SUA RELAÇÃO COM A DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL.

**TEOREMA.** SEJA $\{N(t), t \geq 0\}$ UM PROCESSO DE POISSON COM TAXA $\lambda$. SEJAM $0 < t_1 < \ldots$ TEMPOS SUCESSIVOS DE OCORRÊNCIAS DE EVENTOS, E SEJAM OS TEMPOS ENTRE OCORRÊNCIAS (OU CHEGADAS) $\{\tau_n\}$, $\tau_1 = t_1$, $\tau_2 = t_2 - t_1, \ldots$ ENTÃO $\{\tau_n\}$ SÃO MUTUAMENTE INDEPENDENTES E IDENTICAMENTE DISTRIBUÍDAS SEGUNDO EXPONENCIAIS COM MÉDIA $1/\lambda$.

O PRÓXIMO TEOREMA MOSTRA QUE A RECÍPROCA DO ÚLTIMO TAMBÉM VALE.

**TEOREMA.** SEJA $\{N(t), t \geq 0\}$ UM PROCESSO DE CONTAGEM TAL QUE OS TEMPOS ENTRE CHEGADAS DE EVENTOS, $\{\tau_n\}$, SEJAM V.A.I.I SEGUNDO EXPONENCIAIS CADA UMA COM MÉDIA $1/\lambda$. ENTÃO $\{N(t), t \geq 0\}$ SEGUE UM PROCESSO DE POISSON COM TAXA $\lambda$.

O PROCESSO DE POISSON É UM CASO ESPECIAL DE UM TIPO MAIS GERAL DE PROCESSO QUE É IMPORTANTE PARA TEORIA DAS FILAS, O QUAL SERÁ VISTO A SEGUIR.

## PROCESSO DE NASCIMENTO-E-MORTE (BIRTH-AND-DEATH PROCESS)

A IDÉIA INTUITIVA ATRÁS DE UM PROCESSO DE NASCIMENTO-E-MORTE É A DE ALGUM TIPO DE "POPULAÇÃO" QUE ESTÁ GANHANDO NOVOS MEMBROS ATRAVÉS DE NASCIMENTOS, E PERDENDO VELHOS MEMBROS ATRAVÉS DE MORTES. A POPULAÇÃO, PARA A MAIOR PARTE DAS APLICAÇÕES DESSES PROCESSOS EM COMPUTAÇÃO, É A DOS USUÁRIOS (CUSTOMER) EM UMA FILA DE ESPERA. NATURALMENTE A PALAVRA USUÁRIOS É GENÉRICA. OS USUÁRIOS QUE CHEGAM CORRESPONDEM AOS NASCIMENTOS, E OS QUE PARTEM, APÓS SEREM ATENDIDOS, ÀS MORTES.

**DEFINIÇÃO.** SEJA UM PROCESSO ESTOCÁSTICO COM PARÂMETRO CONTÍNUO $\{X(t),\ t \geq 0\}$ E COM ESPAÇO DE ESTADO DISCRETO $0, 1, \ldots$. SUPONHA QUE ESTE PROCESSO DESCREVE UM SISTEMA QUE ESTÁ NO ESTADO $E_n$, $n = 0, 1, \ldots$ NO TEMPO $t$ SE E SÓ SE $X(t) = n$ (O SISTEMA TEM UMA POPULAÇÃO DE $n$ ELEMENTOS OU USUÁRIOS NO TEMPO $t$). ENTÃO, O SISTEMA É DESCRITO POR UM PROCESSO DE NASCIMENTO-E-MORTE SE EXISTEM TAXAS DE NASCIMENTO NÃO-NEGATIVAS $\{\lambda_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$ E TAXAS DE MORTE

$\{\mu_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ TAL QUE OS SEGUINTES POSTULADOS (ALGUMAS VEZES CHAMADOS "NEAREST-NEIGHBOR" HIPÓTESES SÃO SATISFEITOS):

(1) AS ÚNICAS MUDANÇAS DE ESTADO PERMITIDAS SÃO: DE $E_n$ PARA $E_{n+1}$, $n \geq 1$

DE $E_n$ " $E_{n-1}$, $n \geq 1$

DE $E_0$ " $E_1$

(SOMENTE 1 NASCIMENTO OU 1 MORTE OCORRE NO TEMPO $t$ E NÃO OCORRE MORTE SE O SISTEMA ESTÁ VAZIO)

(2) SE NO TEMPO $t$ O SISTEMA ESTÁ NO ESTADO $E_n$, A PROB. QUE ENTRE $t$ E $t+h$ A TRANSIÇÃO DO ESTADO $E_n \longrightarrow E_{n+1}$ OCORRA É $\lambda_n h + o(h)$ E A TRANSIÇÃO $E_n \longrightarrow E_{n-1}$ TEM PROB. $\mu_n h + o(h)$.

(PROB. DE TRANSIÇÃO, ISTO É, DE NASCIMENTO OU MORTE EM UM PEQUENO INTERVALO DE TEMPO QUANDO O TAMANHO DA POPUL. É $n$).

(3) A PROB. QUE NO INTERVALO DE TEMPO ENTRE $t$ E $t+h$ MAIS QUE UMA TRANSIÇÃO OCORRA É $o(h)$.

(A PROB. DE MAIS DE 1 NASC. OU 1 MORTE NUM INTERVALO DE TEMPO MTO. PEQUENO É DESPREZÍVEL)

QUANDO DESCREVE-SE UM SISTEMA DE FILAS COMO UM PROCESSO DE NASCIMENTO E MORTE O ESTADO $E_n$ CORRESPONDE A $n$ USUÁRIOS NO SISTEMA OU ESPERANDO OU RECEBENDO SERVIÇO.

## CADEIAS DE MARKOV (MARKOV CHAINS)

### PROCESSO DE MARKOV (MARKOV PROCESS)

UM PROCESSO ESTOCÁSTICO $\{X(t), t \in T\}$ É UM PROCESSO DE MARKOV SE PARA QUALQUER CONJUNTO $n+1$ VALORES $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1}$ NO CONJUNTO DE ÍNDICES E QUALQUER CONJUNTO $\{u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}\}$ DE $n+1$ ESTADOS TEM-SE

$$P(X(t_{n+1}) = u_{n+1} \mid X(t_1) = u_1, \ldots, X(t_n) = u_n) =$$

$$P(X(t_{n+1}) = u_{n+1} \mid X(t_n) = u_n).$$

INTUITIVAMENTE ISTO INDICA QUE O FUTURO DO PROCESSO DEPENDE SOMENTE DO ESTADO PRESENTE E NÃO DE TODA SUA HISTÓRIA.

### CADEIA DE MARKOV

UM PROCESSO DE MARKOV COM ESPAÇO DE ESTADO DISCRETO.

## CLASSIFICAÇÃO DE PROCESSOS DE MARKOV

| | ESPAÇO DE ESTADO | |
|---|---|---|
| TIPO DE PARÂMETRO | DISCRETO | CONTÍNUO |
| TEMPO DISCRETO | CADEIA DE MARKOV COM TEMPO DISCRETO | PROCESSO DE MARKOV COM TEMPO DISCRETO |
| TEMPO CONTÍNUO | CADEIA DE MARKOV COM TEMPO CONTÍNUO | PROCESSO DE MARKOV COM TEMPO CONTÍNUO |

DESDE QUE UMA CADEIA DE MARKOV TEM ESPAÇO DE ESTADO DISCRETO, OS ESTADOS SÃO ROTULADOS POR $\{E_0, E_1, \dots\}$ OU, POR CONVENIÊNCIA NOTACIONAL, $\{0, 1, \dots\}$.

PARA UMA CADEIA DE MARKOV EM TEMPO DISCRETO É CONVENIENTE PENSAR QUE O PROCESSO FAZ TRANSIÇÕES DE ESTADO NOS TEMPOS $t_n$, $n = 1, 2, \dots$. ESTA CADEIA COMEÇA EM UM ESTADO INICIAL $i$, QDO $t = t_0$ $(X_0 = i)$ E FAZ UMA TRANSIÇÃO DE ESTADO NO PRÓXIMO PASSO $(X_1 = j)$

AS PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO EM 1 PASSO SÃO DEFINIDAS POR

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \quad n, i, j = 0, 1, \dots$$

E GERALMENTE DEPENDEM DE $n$.

CADEIAS DE MARKOV CUJAS PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO NÃO DEPENDEM DE $m$, $P_{ij}$, SÃO DITAS COMO TENDO PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO ESTACIONÁRIAS OU QUE SÃO HOMOGÊNEAS NO TEMPO.

AS PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO PODEM SER EXIBIDAS EM FORMA DE UMA MATRIZ QUADRADA CHAMADA MATRIZ DE PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO DA CADEIA,

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \cdots \\ \cdots & & \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} \cdots \\ \cdots & & \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} P_{ij} \geq 0 \quad i,j = 0,1,\ldots \\ \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1, \quad i = 0,1,\ldots \end{array}$$

EX. SEJA UMA SEQÜÊNCIA DE EXPERIMENTOS DE BERNOULLI ONDE A PROB. DE SUCESSO EM CADA EXPERIM. É $p$ E A DE FALHA $q$, $p+q=1$. SEJA O ESTADO DO PROCESSO NA $n$-ÉSIMA REPETIÇÃO DO EXPER. COMO SENDO O NÚMERO DE SUCESSOS ININTERRUPTOS ATÉ ESTE INSTANTE.

$X$ = # DE SUCESSOS ININTERRUPTOS ATÉ A $n$-ÉSIMA REPETIÇÃO DO EXP.

SFSSF, $n=5$, $X_0=1$, $X_1=0$, $X_2=1$, $X_3=2$, $X_4=0$

CALCULANDO AS PROB. DE TRANSIÇÃO, $P_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$

$$P_{00} = P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = P(X_1 = 0 \mid X_0 = 0) = P(X_2 = 0 \mid X_1 = 0) = P(X_3 = 0 \mid X_2 = 0) \ldots\ldots = q$$

$$P_{01} = P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0) = P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) = P(X_3 = 1 \mid X_2 = 0) \ldots = p$$

TRANSIÇÕES EM 1 PASSO

$$P_{10} = P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1) = P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) = P(X_2 = 0 \mid X_1 = 1) = P(X_3 = 0 \mid X_2 = 1) \ldots = 0$$

$$P_{11} = P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1) = P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) = P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) \ldots = 0$$

$$P_{04} = P(X_{\underline{n+1}} = 4 \mid X_{\underline{n}} = 0) = 0 \quad \ldots$$

∴ MATRIZ DE PROB. DE TRANSIÇÃO:

$$P = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & \ldots \\ q & 0 & p & 0 & \ldots \\ q & 0 & 0 & p & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \end{bmatrix}$$

PROB. DE TRANSIÇÃO INDEPENDEM DE $n$ ⇒ CADEIA DE MARKOV É HOMOGÊNEA NO TEMPO

CALCUL. AS PROB. DE TRANSIÇÃO EM m-PASSOS:

DESEJAMOS CALCULAR $P'(X_m = j \mid X_0 = i)$, $m \geq 1$

DEFININDO $P^m(i,j) = P(X_m = j \mid X_0 = i)$

$P^m$ É CHAMADA FUNÇÃO DE TRANSIÇÃO EM $m$ ETAPAS

QUANDO $m=1$, $P'(i,j) = P(i,j)$

POR DEF,

$$P^0(i,j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

PARA $m=2$ TEM-SE

$$P(X_2 = j \mid X_0 = i) = \frac{P(X_2 = j, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} = \frac{\sum_z P(X_2 = j, X_1 = z, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} =$$

$$\frac{\sum_z P(X_0 = i)\, P(X_1 = z \mid X_0 = i)\, P(X_2 = j \mid X_1 = z)}{P(X_0 = i)}$$

$$= \sum_z P(i,z)\, P(z,j)$$

AS PROB. DE TRANSIÇÃO EM $n$-PASSOS PODEM SER CALCULADAS USANDO AS EQUAÇÕES DE CHAPMAN-KOLMOGOROV QUE SÃO

$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{n} P_{kj}^{m} \quad \forall\ n, m, i, j \geq 0$$

NO PROBLEMA, $P^{(n)} = P^n$

**EX.** CONSIDERE UM SISTEMA DE COMUNICAÇÃO QUE TRANSMITE OS DÍGITOS 0 E 1 ATRAVÉS DE VÁRIOS ESTÁGIOS. EM CADA ESTÁGIO, A PROBA. DE QUE O MESMO DÍGITO SEJA RECEBIDO OU TRANSMITIDO PELO PRÓXIMO ESTÁGIO É 0.75. QUAL É A PROB. DE QUE UM 0 QUE ENTROU NO 1º ESTÁGIO SEJA RECEBIDO COMO 0 NO 5º ESTÁGIO?

OBJETIVO: $P^4_{00}$ $\qquad\qquad P_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$

MATRIZ DE TRANSIÇÃO:

$$P = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$$

$$\therefore P^4 = \begin{bmatrix} 0.53125 & 0.46875 \\ 0.46875 & 0.53125 \end{bmatrix} \quad e \quad P^4_{00} = 0.53125$$

**DEFINIÇÃO** SEJAM $i$ E $j$ DOIS ESTADOS NÃO NECESSARIAMENTO DISTINTOS. DIZ-SE QUE $i$ CONDUZ A $j$ OU $j$ É ACESSÍVEL A PARTIR DE $i$ SE $\exists n \geq 0$ Tq $P^n(i,j) > 0$.
SE TODO ESTADO É ACESSÍVEL A PARTIR DE ALGUM A CADEIA É DITA IRREDUTÍVEL.

**DEF.** SEJAM $i$ E $j$ ESTADOS NÃO NECESSARIAMENTE DISTINTOS. SE $i \to j$ E $j \to i$, ENTÃO $i$ E $j$ SÃO COMUNICANTES ($i \leftrightarrow j$). ISTO É, $i \leftrightarrow j$ SE $\exists n \geq 0$, $m \geq 0$ TAL QUE $P^n(i,j) > 0$ E $P^m(j,i) > 0$.

**DEFINIÇÃO.** O ESTADO $i$ É DITO PERIÓDICO COM PERÍODO $d>1$ SE $P_{ii}^{n}>0$ SOMENTE PARA $n=d, 2d, \ldots$ ONDE $d$ É O MAIOR INTEIRO QUE VERIFICA A PROPRIEDADE. SE $d=1$, $i$ É APERIÓDICO.

**DEFINIÇÃO.** PARA CADA $i$ SEJA $f_i^{(n)}$ A PROB. DE QUE O 1º RETORNO AO ESTADO $i$ OCORRA EM $n$ PASSOS OU TRANSIÇÕES DEPOIS DE DEIXAR $i$, ISTO É

$$f_i^{(n)} = P(X_n = i,\ X_k \neq i\ \forall k = 0, \ldots, n-1 \mid X_0 = i)$$

ONDE $f_i$ É A PROB. DE RETORNAR AO ESTADO $i$,

$$f_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_i^{(n)}.$$

SE $f_i < 1$, $i$ É UM ESTADO TRANSIENTE

SE $f_i = 1$, " " " " RECORRENTE E NESTE CASO O TEMPO MÉDIO DE RECORRÊNCIA A $i$ É

$$m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_i^{(n)}$$

SE $m_i = \infty$, $i$ É NULO RECORRENTE (RECURRENT NULL)

" $m_i < \infty$, $i$ " RECORRENTE POSITIVO OU RECORRENTE NÃO-NULO

SEJA $\pi_j^{(n)}$ A PROB. DE QUE A CADEIA DE MARKOV DISCRETA $\{X_n\}$ ESTEJA NO ESTADO $j$ NO $n$-ÉSIMO PASSO,

$$\pi_j^{(n)} = P(X_n = j) \quad , \quad j \geq 0$$

A DISTRIBUIÇÃO INICIAL DOS ESTADOS 0,1,.... É

$$\pi_j^{(0)} = P(X_0 = j), \quad j = 0,1,....$$

$\pi_j^{(0)}$ É COMUMENTE CHAMADA DE DISTRIBUIÇÃO INICIAL DA CADEIA

CLARO QUE $0 \leq \pi_j^{(0)} \leq 1$ E $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j^{(0)} = 1$

DEFINIÇÃO UMA CADEIA DE MARKOV DISCRETA É DITA COMO TENDO UMA DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE ESTACIONÁRIA $\pi = (\pi_1, \pi_2, ....)$ SE A EQUAÇÃO MATRICIAL $\pi = \pi P$ É SATISFEITA ONDE CADA $\pi_i \geq 0$ E $\sum_i \pi_i = 1$.

A EQUAÇÃO MATRICIAL $\pi = \pi P$ PODE SER ESCRITA COMO O SISTEMA DE EQUAÇÕES

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \quad , \quad j = 0,1,..$$

UMA CADEIA DE MARKOV TEM UMA DISTRIBUIÇÃO DE PROB. LIMITE $\pi = (\pi_1, \pi_2, ....)$ SE

$$\lim_{n \to \infty} \pi_j^{(n)} = \lim_{n \to \infty} P(X_n = j) = \pi_j \quad , \quad j = 0,1,...$$

UMA CADEIA DE MARKOV DISCRETA QUE SEJA IRREDUTÍVEL, APERIÓDICA E ONDE TODOS OS ESTADOS SEJAM RECORRENTES POSITIVOS É DENOMINADA DE ERGÓDICA.

PARA UMA CADEIA DE MARKOV ERGÓDICA AS DISTRIBUICÕES DE PROB. ESTACIONÁRIA E LIMITE SÃO AS MESMAS. TAIS DISTRIBUIÇÕES DE PROB. SÃO CHAMADAS DISTRIBUIÇÕES DE EQUILÍBRIO OU ESTÁVEIS (EQUILIBRIUM OR STEADY STATE DISTRIBUTIONS)

EX. NO ÚLTIMO EXEMPLO VISTO COMO A CADEIA DE MARKOV É IRREDUTIVE E APERIÓDICA, É TAMBÉM ERGÓDICA.

CALCULANDO A DISTRIBUIÇÃO DE PROB. DE EQUILÍBRIO

CONDIÇÃO: $\sum_i \pi_i = 1$

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \;, \; j = 0, 1, \ldots$$

$\therefore \; \pi_0 + \pi_1 = 1$

$\pi_0 = 0.75\pi_0 + 0.25\pi_1 \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = \pi_1 = 0.5$

$\pi_1 = 0.25\pi_0 + 0.75\pi_1$

I.E. SE OS DADOS PASSAM ATRAVÉS DE MUITOS ESTÁGIOS A SAÍDA INDEPENDE DA ENTRADA ORIGINAL E CADA DÍGITO RECEBIDO É IGUALMENT PROVÁVEL DE SER 0 OU 1

EXEMPLO: S. LIPSCHUTZ # 7.50 (253)

Todo ano um homem troca seu carro por um novo. Se tem um Buick, ele o troca por um Plymouth. Se tem um Plymouth, troca-o por um Ford. Contudo, se tem um Ford é tão provável que o troque por um novo Ford como por um Buick ou um Plymouth.
Em 1955 ele comprou seu primeiro carro, que era um Ford.

(i) Achar a probabilidade de que ele tenha:
   (a) Ford, 1957;
   (b) Buick, 1957;
   (c) Plymouth 1958;
   (d) Ford, 1958.

(ii) Após um número suficientemente grande de anos, com que freqüência ele terá tido um Ford?

$P^{(0)}$ = matriz de probabilidades de transição iniciais

$$P^{(0)} = \begin{array}{c} \\ B \\ P \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B & P & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$p^{(0)}$ = vetor de probabilidades iniciais.

$p^{(0)} = (0, 0, 1)$, Ford em 1955.

(ii) $p^{(2)} = p^{(0)} P^2$

$$= (0,0,1)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$$

(a) ∴ prob. de 2 anos depois ter um Ford é $\boxed{p_3^{(2)} = \frac{4}{9}}$

(b) Buick em 1957: $\boxed{p_1^{(2)} = \frac{1}{9}}$

(c) $p^{(3)} = p^{2} P = \left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

$$= \left(\frac{4}{27}, \frac{7}{27}, \frac{18}{27}\right)$$

∴ Plymouth, 1958, $\boxed{p_2^{(3)} = \frac{7}{27}}$

(d) Ford, 1958, $\boxed{p_3^{(3)} = \frac{18}{27}}$

(iii) encontrando o vetor fixo de probab.:

$$(x, y, z) P = (x, y, z)$$

$$(z/3,\ x + z/3,\ y + z/3) = (x, y, z)$$

$x = 1 \Rightarrow\ t' = (1, 2, 3)\ \therefore\ t = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}\right)$

∴ $t_3 = \frac{1}{2}$ ∴ terá tido um Ford $\boxed{\text{50\% das vezes.}}$