Teorema 3. Sejam as variáveis aleatórias $X, X_1, \cdots, Y$ todas definidas no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Se $E(Y)$ existe, $|X_n| \leq |Y|$ e $X_n \to X$, então existem $E(X)$ e $E(X_n)$, para todo n e $E(X_n) \uparrow E(X)$.

O Teorema 2, prova em que outras circuntâncias o limite comuta com a esperança, isto é esperança (limite) = limite (esperança). Este teorema é usulamente denominado de *teorema da convergência dominada*. Você entende o porquê do nome?

Exercícios

TEOREMAS LIMITE

1. A capacidade máxima de um elevador é 2000kg. Supondo que o peso de um passageiro tem distribuição N(70kg, 100kg^2), use a **média amostral** para calcular:
   (a) a probabilidade de 30 passageiros pesarem além do limite;
   (b) o número máximo n de passageiros, de modo que a capacidade não seja ultrapassada em pelo menos metade das vezes.

2. Amostras independentes de tamanhos 10 e 15 são tiradas de uma variável aleatória normalmente distribuída, com esperança 20 e variância 3. Qual é a probabilidade de que as médias difiram, em valor absoluto, em mais de 0.3?

3. Dadas duas amostras $(X_1, \cdots, X_n)$, $(Y_1, \cdots, Y_n)$ ambas provenientes de uma mesma população $N(\mu, 1)$, qual é a distribuição de:
   (a) Médias amostrais, $\overline{X}$ e $\overline{Y}$.
   (b) Diferença de médias $\overline{X} - \overline{Y}$.
   (c) Soma de médias $\overline{X} + \overline{Y}$.
   (d) Média das médias $(\overline{X} + \overline{Y})/2$.

4. Um corredor procura controlar seus passos em uma corrida de 100 metros. Seus passos distribuem-se normalmente com média 0.97 metros e desvio padrão 0.1 metro. Determine a probabilidade de que 100 passos difiram de 100 metros por não mais de 5 metros.

5. Arredondam-se 20 números para o inteiro mais próximo e somam-se os números resultantes. Suponha que os erros individuais de arredondamentos são independentes e se distribuem uniformemente em $(-1/2, 1/2)$. Determine a probabilidade de que a soma obtida difira da soma dos vinte números originais por mais do que 3.

6. Fregueses chegam em certo supermercado segundo um processo de Poisson com intensidade média de dez por minuto. Seja $T_1, T_2, \cdots$ os tempos entre chegadas de fregueses, de modo que $T_1 + \cdots + T_n$ é o tempo de chegada do n-ésimo freguês.
   (a) Utilizando o Teorema Central do Limite, ache um número entre 0 e 1 que seja aproximadamente igual à probabilidade do milésimo freguês chegar depois de 100 minutos.
   (b) Como você calcularia o valor *exato* da probabilidade no item (a)? (Não se aceita uma integral no espaço de dimensão 1000).

7. Sejam $X_1, X_2, \cdots$ variáveis aleatórias independentes tais que $X_k \sim B(n_k, p)$, $0 < p < 1$, p fixo. Qual a distribuição de probabilidade de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$?

8. Usando a desigualdade de Tchebycheff estime uma cota superior para a probabilidade de que uma variável aleatória tendo média μ e desvio padrão σ se desvie de μ por menos que 3σ.

9. Seja uma seqüência de variáveis aleatórias $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uniformemente distribuídas no interval (0,1), (0,2), etc. O que acontece com sua média aritmética quando n cresce?

10. Variáveis aleatórias $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são uniformemente distribuídas, respectivamente, nos intervalos (-1,1), (-2,2), etc. Verifique se a média aritmética das variáveis aleatórias converge em probabilidade a zero quando n cresce.

11. Suponha que 30 dispositivos eletrônicos $D_1, D_2, \cdots, D_{30}$ estejam empregados da seguinte maneira: tão logo D_1 falhe, D_2 entra em operação; quando D_2 falha, D_3 entrará em operação, etc. Suponha que a duração até falhar D_i seja uma variável aleatória exponencialmente distribuída com parâmetro $\beta = 0.1\text{hora}^{-1}$. Seja T o tempo total da operação dos 30 dispositivos. Qual é a probabilidade de que T ultrapasse 350 horas?

12. Um computador, ao adicionar números arredonda cada número para o inteiro mais próximo. Admita-se que todos os erros de arredondamento sejam independentes e uniformemente distribuídos sobre (-0.5,0.5).

    (a) Se 1500 números forem adicionados, qual é a probabilidade de que a magnitude do erro total ultrapasse 15?

    (b) Quantos números poderão ser adicionados juntos de modo que a magnitude do erro total seja menor do que 10, com probabilidade 0.90?

13. Suponha que X_i, $i = 1, 2, \cdots, 50$ sejam variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição de Poisson de parâmetro $\beta = 0.03$. Faça $S = X_1 + \cdots + X_{50}$.

    (a) Empregando o Teorema Central do Limite, calcule $P(S \geq 3)$.

    (b) Compare a resposta do item anterior com o valor exato dessa probabilidade.

14. A distribuição dos comprimentos dos elos da corrente de uma bicicleta tem distribuição normal com média 2cm e variância 0.01cm^2. Para que uma corrente se ajuste à bicicleta, deve ter comprimento total entre 58 e 61cm. Qual a probabilidade de que uma corrente com 30 elos não se ajuste à bicicleta? E com 29 elos?