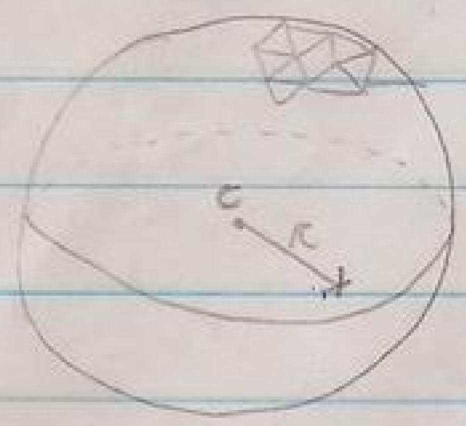
UM POUCO DE TRANSFORMAÇÕES AFINS

NÃO TODA A 1ª PARTE

- FARIN → (CURVAS E SUPERFÍCIES) → 1ª PARTE 006.6 F225c (CTG) / 511.42 N974 (MEI)
- ALAN WATT → (VISUALIZAÇÃO DE CÂMERA) 006.6 W344t (MEI)
- FOLEM & VANDAM → (RAY TRACING)

MODELAGEM GEOMÉTRICA DOS DADOS

- REPRESENTAÇÃO DOS OBJETOS NO COMPUTADOR

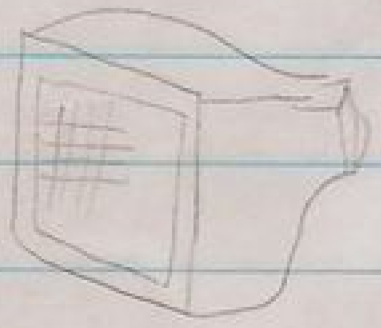


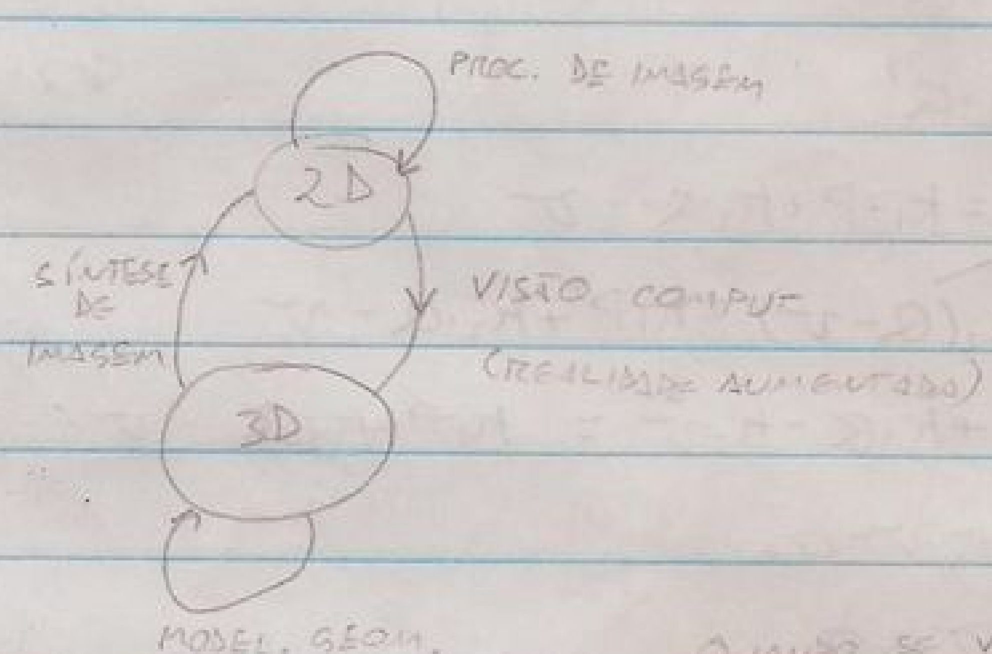
RAY TRACING

$C = (x_c, y_c, z_c)$

$R \in \mathbb{R}$

VISUALIZAÇÃO





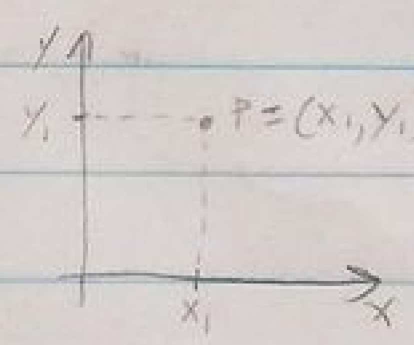
"ALIASING" TEMPORAL → QUANDO SE VÊ, EM UM FILME, A RODA DE UM CARRO DANDO A IMPRESSÃO QUE ESTÁ RODANDO AO CONTRÁRIO

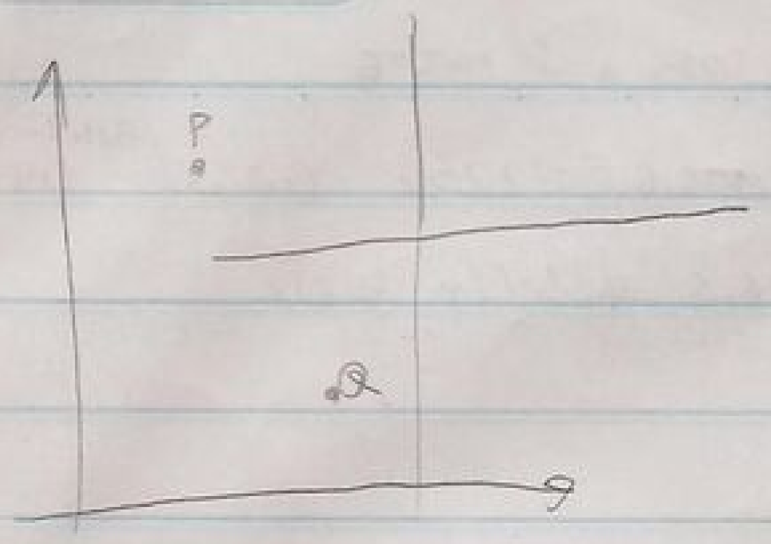
"ALIASING" ESPACIAL → ILUSÃO QUE OCORRE QUANDO SE VÊ NA TV UMA PESSOA, DE CAMISA LISTRADA, EM MOVIMENTO

PONTOS E VETORES

→ PONTO: PRIMITIVA ASSOCIADA À LOCALIZAÇÃO (RETA É UMA PRIMITIVA ASSOC. À LOCALIZAÇÃO)

→ VETOR: 3 INFORMAÇÕES: $\begin{cases} \text{MÓDULO, 3D} \\ \text{DIREÇÃO} \\ \text{SENTIDO} \end{cases}$





$P(2,5), \quad P'(-4,2)$

$Q(4,1), \quad Q'(-2,-2)$

$P' = P - \underset{v}{(6,3)}$

$"P+Q" = (2,5) + (4,1) = (6,6)$

$"P'+Q'" = (-4,2) + (-2,-2) = (-6,0)$

$"P'+Q'" = "P+Q" - (6,3) \neq$

$= (6,6) - (6,3) = (0,3)$

"SOMA BARICÊNTRICA"

$k_1 \cdot P + k_2 \cdot Q$

$k_1 \cdot P' + k_2 \cdot Q'$

SOMA BARICÊNTRICA

$k_1 \cdot P' + k_2 Q' = k_1 \cdot P + k_2 \cdot Q - v$

$k_1(P - v) + k_2(Q - v) = k_1 P + k_2 \cdot Q - v$

$\cancel{k_1 \cdot P} - k_1 v + \cancel{k_2 Q} - k_2 v = \cancel{k_1 P} + \cancel{k_2 Q} - v$

$k_1 v + k_2 v - v = 0$

$(\underbrace{k_1 + k_2 - 1}_{=0}) \cdot \underset{\neq 0}{v} = 0$

$\boxed{k_1 + k_2 = 1}$

OUTRO EXEMPLO

$R(2,6), \quad R'(-4,3)$

$S(9,5), \quad S'(3,2)$

PONTO MÉDIO

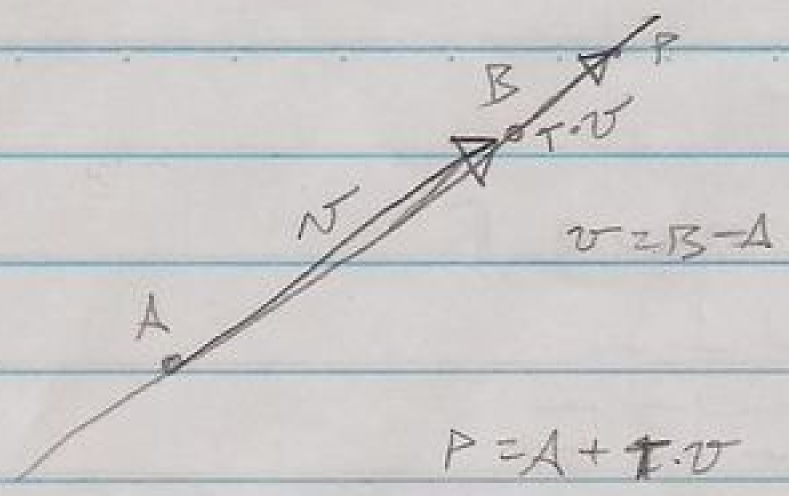
$M = \frac{1}{2} R + \frac{1}{2} S$

$M = \frac{1}{2}(2,6) + \frac{1}{2}(9,5) = \frac{1}{2}(11,11)$

$M' = \frac{1}{2}(-4,3) + \frac{1}{2}(3,2) = \frac{1}{2}(-1,5)$

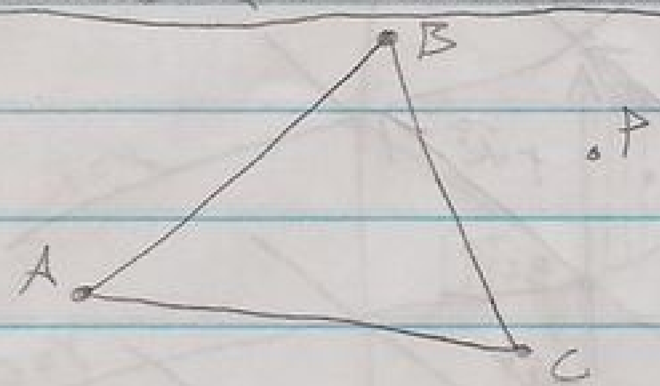
CONVERTENDO: $M' = M - v = \frac{1}{2}(11,11) - (6,3)$

$M' = \frac{1}{2}(-1,5)$



$$P = A + T \cdot v$$
$$= A + T(B - A)$$
$$P = \underbrace{(1-T)}A + T \cdot B$$

Coordenadas baricêntricas no plano



Considere 3 pontos não colineares A, B e C

Afirmamos que:

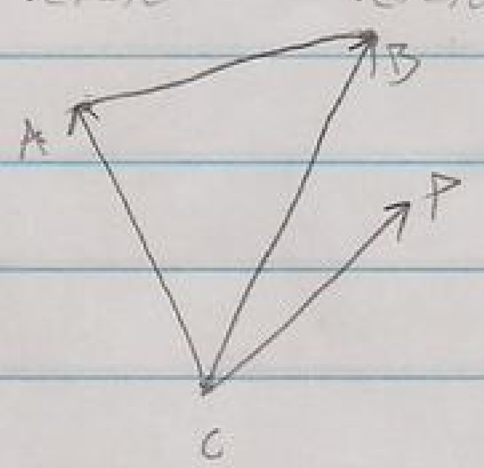
$$\begin{cases} P = \alpha \cdot A + \beta B + \gamma \cdot C, \quad \text{onde } \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \text{essa combinação é única} \end{cases}$$

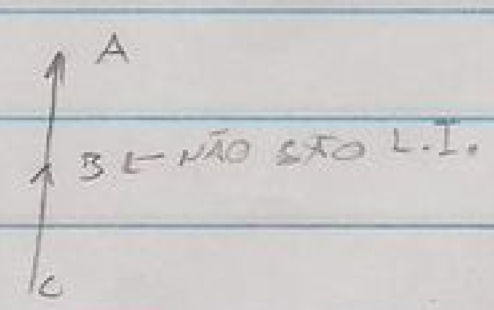
Demonstração

$$\gamma = 1 - \alpha - \beta$$

$$P = \alpha A + \beta B + (1 - \alpha - \beta) \cdot C$$

$$\underbrace{P - C}_{\text{vetor}} = \alpha \underbrace{(A - C)}_{\text{vetor}} + \beta \underbrace{(B - C)}_{\text{vetor}}$$





Como A, B e C são não colineares $A - C$ e $B - C$ são L.I., ou seja, $\{A - C, B - C\}$ gera todos os valores de $\mathbb{R}^2$ de forma única

13/08/09

COORDENADAS BARICÊNTRICAS

CONSIDERE 3 PONTOS ∄ COLINEARES DO PLANO $\mathbb{R}^2$

A, B, C

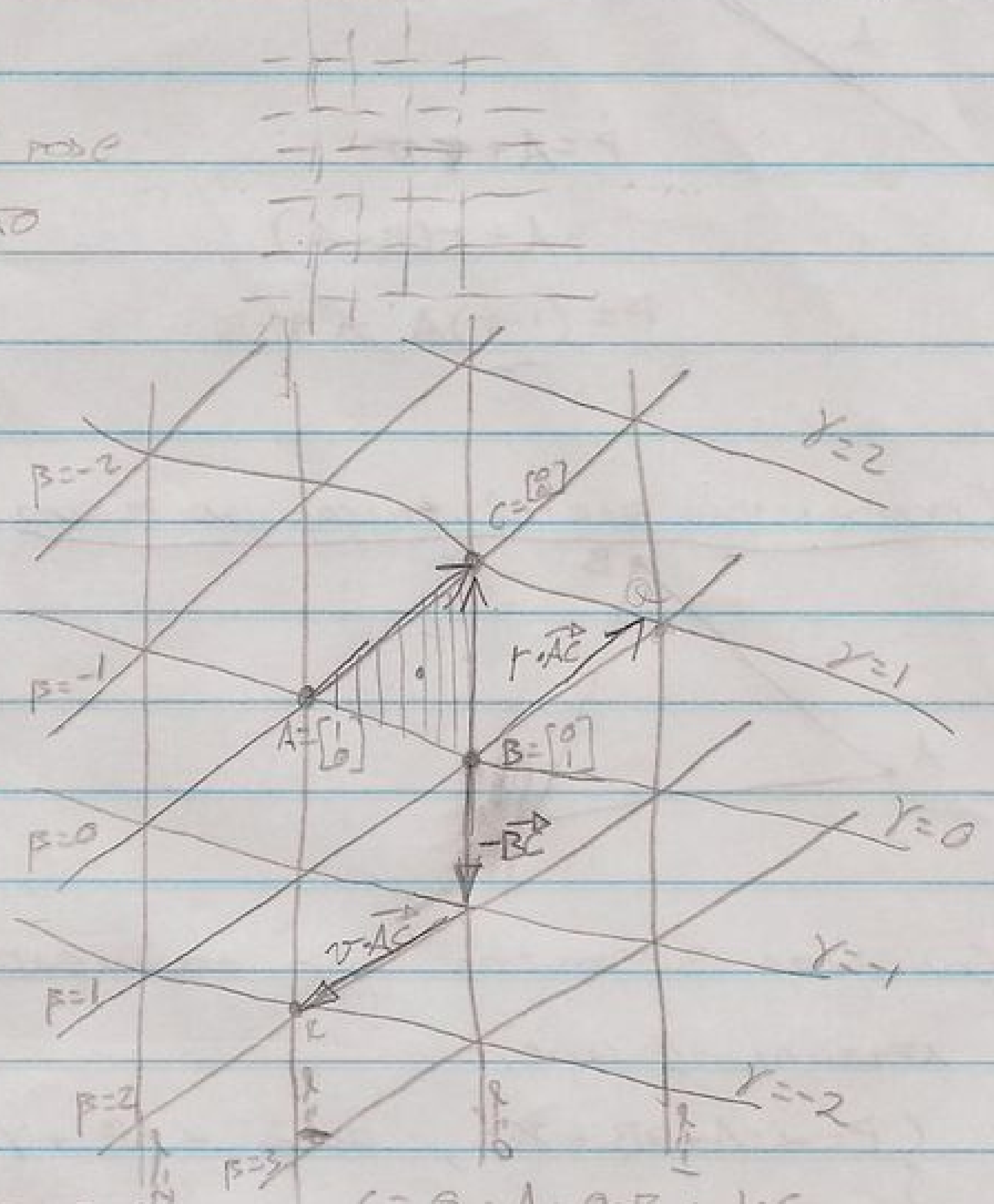
QUALQUER PONTO DO PLANO P PODE SER ESCRITO COMO COMBINAÇÃO BARICÊNTRICA DE A, B e C:

$P = \alpha A + \beta B + \gamma C$

ONDE $\alpha + \beta + \gamma = 1$

$S = \{A, B, C\}$ $\qquad [P]_S = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$

OUTRA REPRES: $[P]_S = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$



$A = 1\cdot A + 0\cdot B + 0\cdot C$ $\qquad B = 0\cdot A + 1\cdot B + 0\cdot C$ $\qquad C = 0\cdot A + 0\cdot B + 1\cdot C$

$[A]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad [B]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\qquad [C]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$P = A + t\cdot\vec{AC}$ $\qquad \vec{AC} = C - A$

$P = A + t(C-A) = (1-t)A + 0\cdot B + t\cdot C$

$[P]_S = \begin{bmatrix} 1-t \\ 0 \end{bmatrix}$

$Q = B + r\cdot(C-A)$

$Q = -r\cdot A + 1\cdot B + r\cdot C$

$R = B - \vec{BC} + v\cdot\vec{AC}$

$R = B - C + B + vC - vA$

$R = (-v)\cdot A + 2\cdot B + (v-1)\cdot C$

$[R]_S = \begin{bmatrix} -v \\ 2 \end{bmatrix}$

13/08/09

LEMBRETE:

EM ÁLGEBRA LINEAR

SEJA $T = U \to V$ TRANSF. LINEAR

$$\left(\begin{array}{ll} \text{OU SEJA: (i) } T(u+v) = Tu + Tv, & \forall u, v \in V \\ \text{(ii) } T k \cdot u = k T u & \forall k \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

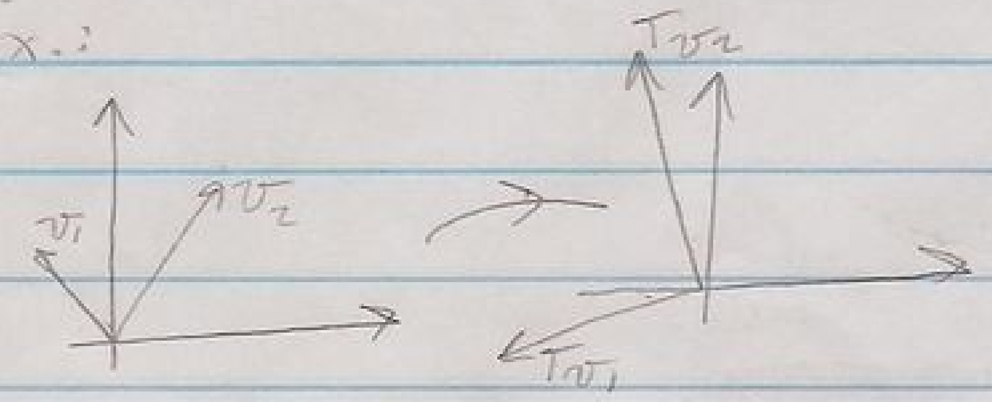
$\alpha = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ BASE DE V

$v \in V$

$v = A_1 v_1 + A_2 v_2 + \dots + A_n v_n$

$$\boxed{Tv = A_1 Tv_1 + A_2 Tv_2 + \dots + A_n Tv_n}$$

Ex.:



$T(x,y)$

TRANSFORMAÇÃO AFIM

CONSIDERE A, B, C TRÊS PONTOS NÃO COLINEARES

$S = \{A, B, C\}$ É UM SISTEMA DE COORDENADAS BARICÊNTRICAS

SEJA P UM PONTO QUALQUER DO PLANO:

$P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$, ONDE $\alpha + \beta + \gamma = 1$

$T: \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ É UMA TRANSF. AFIM, SE

$TP = \alpha TA + \beta TB + \gamma TC$

EX.: ENCONTRE (EM COORDENADAS CARTESIANAS) A EXPRESSÃO DA TRANSFORMAÇÃO AFIM $T: \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ TAL QUE:

$$\begin{cases} T(1,0) = (3,-1) \\ T(1,1) = (1,1) \\ T(6,6) = (1,-1) \end{cases}$$

13/08/09

P_{11}

$$(x,y) = \alpha(1,0) + \beta(1,1) + \gamma(6,6) \qquad \alpha = 1-\beta-\gamma$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 6\gamma = x \\ \beta + 6\gamma = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 - \cancel{\beta} - \gamma + \cancel{\beta} + 6\gamma = x \\ \beta + 6\gamma = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5\gamma = x - 1 \rightarrow \gamma = \dfrac{x-1}{5} \\ \beta + 6\gamma = y \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \beta + 6\left(\frac{x-1}{5}\right) = y$$

$$\downarrow$$

$$\beta = \frac{5y-6x+6}{5}$$

$$\alpha = 1 - \beta - \gamma$$

$$\alpha = 1 - \frac{5y-6x+6}{5} - \frac{x-1}{5}$$

$$\alpha = \frac{5-5y+6x-6-x+1}{5}$$

$$\alpha = \frac{-5y+5x}{5} = x - y$$

$$T(x,y) = (x-y)\,T(1,0) + \left(\frac{5y-6x+6}{5}\right)T(1,1) + \left(\frac{x-1}{5}\right)T(6,6)$$

$$T(x,y) = (x-y)(3,-1) + \left(\frac{5y-6x+6}{5}\right)(1,1) + \left(\frac{x-1}{5}\right)(1,-1)$$

$$T(x,y) = (x-y+1,\ -12x+10y$$

VAMOS EXPRESSAR ESTA MESMA TRANSF. AFIM EM TERMOS DE COORDENADAS BARICÊNTRICAS

$$S = \{\overset{A}{(1,0)}, \overset{B}{(1,1)}, \overset{C}{(6,6)}\}$$

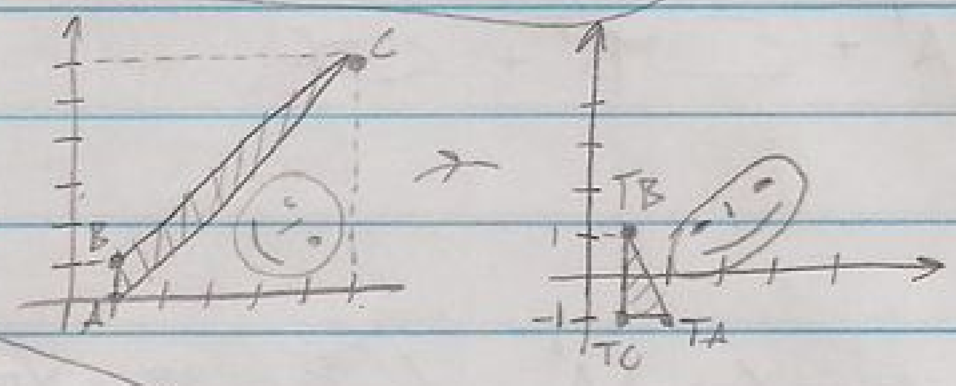
$$[A]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [B]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [C]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = ?$$

$$[(3,-1)]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{-11}{5} \end{bmatrix}, \quad [(1,1)]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [(1,-1)]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-11/5\end{bmatrix}$, $T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $T\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$

$$\begin{cases} T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-11/5\end{bmatrix} \\ T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \\ T\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} \end{cases}$$



$$\overset{P}{\overset{\parallel}{\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}}}=\alpha\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}=\alpha T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\beta T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\gamma T\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}3\\-\frac{11}{5}\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{T\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\alpha+2\gamma\\-\frac{11}{5}\alpha+\beta-\gamma\end{bmatrix}}$$

FORMA MATRICIAL DA TRANSF. AFIM (NÃO É ENCONTRADO NOS LIVROS)

QUEREMOS ENCONTRAR UMA EXPRESSÃO MATRICIAL QUE DESCREVA A TRANSF. AFIM

SEJAM $S_1=\{A, B, C\}$, $S_2=\{A', B', C'\}$ SISTEMAS DE COORDENADAS BARICÊNTRICAS

SEJA P PONTO TAL QUE:

$P=\alpha\cdot A+\beta B+\gamma C$ ONDE $\alpha+\beta+\gamma=1$

$[P]_{S_1}=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}$

SEJA $T: E^2\to E^2$ TRANSF. AFIM. GOSTARÍAMOS DE ENCONTRAR:

$[TP]_{S_2}=?$

$TA=\alpha_1 A'+\beta_1 B'+\gamma_1 C'$

$TB=\alpha_2 A'+\beta_2 B'+\gamma_2 C'$

$TC=\alpha_3 A'+\beta_3 B'+\gamma_3 C'$

$TP=\alpha\cdot TA+\beta TB+\gamma TC$

ONDE $\alpha+\beta+\gamma=1$

tilibra

13/08/09

$$TP = \alpha(\alpha_1 A' + \beta_1 B' + \gamma_1 C') + \beta(\alpha_2 A' + \beta_2 B' + \gamma_2 C') + \gamma(\alpha_3 A' + \beta_3 B' + \gamma_3 C')$$

$$TP = \overset{\alpha'}{(\quad)}A' + \overset{\beta'}{(\quad)}B' + (\quad)C'$$

$$[TP]_{S_2} =$$

$$TP = (\alpha\alpha_1 + \beta\alpha_2 + \gamma\alpha_3)A' + (\alpha\beta_1 + \beta\beta_2 + \gamma\beta_3)B' + (\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2 + \gamma\gamma_3)C'$$

$$[TP]_{S_2} = \begin{bmatrix} \alpha\alpha_1 + \beta\alpha_2 + \gamma\alpha_3 \\ \alpha\beta_1 + \beta\beta_2 + \gamma\beta_3 \end{bmatrix} \qquad [TA]_{S_2} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \quad [TB]_{S_2} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$[TC]_{S_2} = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = 1 - \alpha - \beta \rightarrow \gamma \cdot \alpha_3 = (1-\alpha-\beta)\alpha_3 = \alpha_3 - \alpha\alpha_3 - \beta\alpha_3$$

$$[TP]_{S_2} = \begin{bmatrix} \alpha\alpha_1 + \beta\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha\alpha_3 - \beta\alpha_3 \\ \alpha\beta_1 + \beta\beta_2 + \beta_3 - \alpha\beta_3 - \beta\beta_3 \end{bmatrix}$$

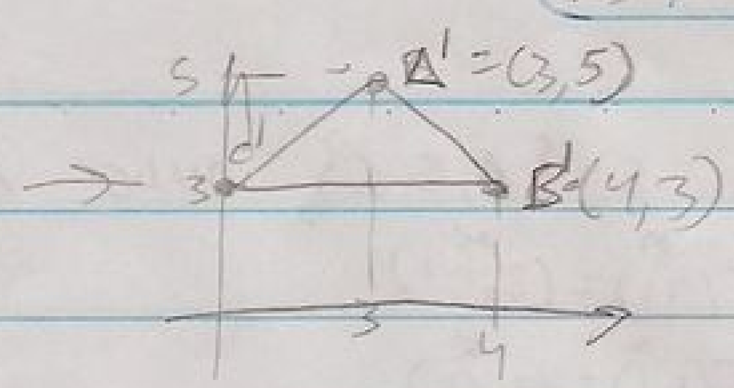
$$[TP]_{S_2} = \begin{bmatrix} \alpha(\alpha_1 - \alpha_3) + \beta(\alpha_2 - \alpha_3) \\ \alpha(\beta_1 - \beta_3) + \beta(\beta_2 - \beta_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$[TP]_{S_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\alpha_1 - \alpha_3}_{[TA]_{S_2} - [TC]_{S_2}} & \underbrace{\alpha_2 - \alpha_3}_{[TB]_{S_2} - [TC]_{S_2}} \\ \beta_1 - \beta_3 & \beta_2 - \beta_3 \end{bmatrix}}_{[T]^{S_1}_{S_2}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

Ñ PODE TER OPERAÇÃO MATRICIAL EM UM PONTO. ISTO Ñ É O PONTO. É O PONTO SUBTRAÍDO DA ORIGEM

$$[TP]_{S_2} = [T]^{S_1}_{S_2} \cdot \left(\underset{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}{[P]_{S_1}} - \underset{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{[C]_{S_1}}\right) + [TC]_{S_2}$$

13/08/09



$[P]_{S_1} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ $\quad [TA]_{S_2} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$

$S_1 = \{\overset{A}{(1,0)}, \overset{B}{(1,1)}, \overset{C}{(6,6)}\}$

$S_2 = \{(3,5), (4,3), (0,3)\}$

$(x,y) = \alpha(3,5) + \beta(4,3) + \gamma(0,3)$

$\begin{cases} 3\alpha + 4\beta = x \\ 5\alpha + 3\beta + 3\gamma = y \end{cases}$

$\gamma = 1 - \alpha - \beta$

$\begin{cases} 3\alpha + 4\beta = x \\ 5\alpha + \cancel{3\beta} + 3 - 3\alpha - \cancel{3\beta} = y \end{cases}$

$\begin{cases} 3\alpha + 4\beta = x \\ 2\alpha = y - 3 \end{cases}$

$\alpha = \dfrac{y-3}{2}$ $\quad \dfrac{3y-9}{2} + 4\beta = x$

$\beta = \dfrac{2x - 3y + 9}{8}$

$[TA]_{S_2} = [(2,-1)]_{S_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$[TB]_{S_2} = [(1,1)]_{S_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$[TC]_{S_2} = [(1,-1)]_{S_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7/4 \end{bmatrix}$

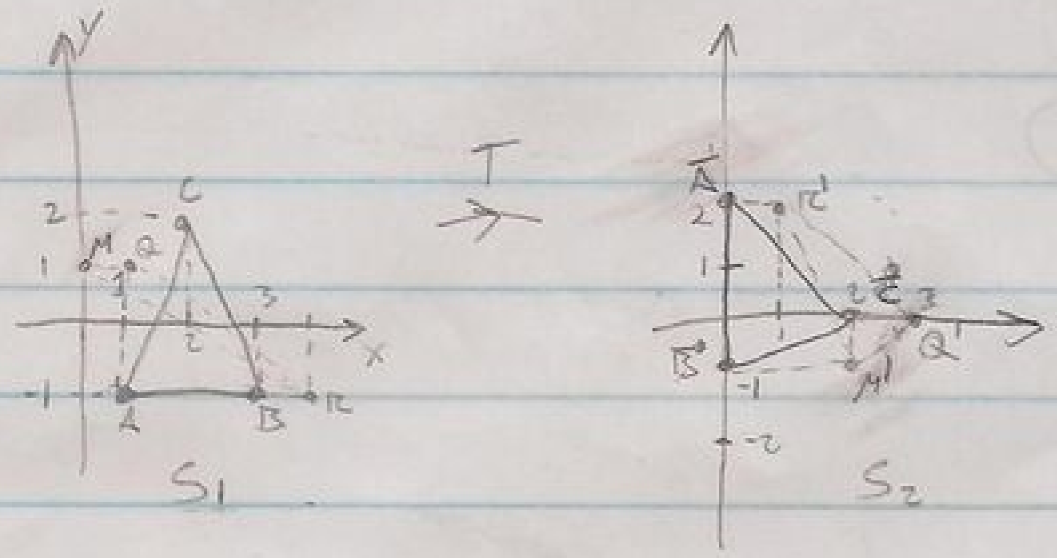
$$\boxed{[TP]_{S_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & -3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 7/4 \end{bmatrix}}$$

20/08/09

SEJA $S=\{A,B,C\}$, ONDE $A=(1,-1)$, $B=(3,-1)$, $C=(2,2)$

$$\begin{cases} T(\overset{M}{0,1})=(\overset{M'}{2,-1}) \\ T(\overset{Q}{1,1})=(\overset{Q'}{3,0}) \\ T(\overset{R}{4,-1})=(\overset{R'}{1,2}) \end{cases}$$

ENCONTRE A FORMA MATRICIAL DE T



OBS: $\bar{A}$ NÃO É A IMAGEM DE A NA TRANSFORMAÇÃO.

$S_2=\{\bar{A},\bar{B},\bar{C}\}=\{(0,2),(0,-1),(2,0)\}$

$$[TP]_{S_2}=\Big[\underbrace{\big[\;\big]}_{[TA]_{S_2}-[TC]_{S_2}}\;\underbrace{\big[\;\big]}_{[TB]_{S_2}-[TC]_{S_2}}\Big]\cdot[P-C]_{S_1}+[TC]_{S_2}$$

OS PONTOS M, Q, R SÃO NÃO COLINEARES

$(x,y)=\alpha(0,1)+\beta(1,1)+\gamma(4,-1)$

$\alpha+\beta+\gamma=1$

$T(x,y)=T[\alpha(0,1)+\beta(1,1)+\gamma(4,-1)]$

$=\alpha\underbrace{T(0,1)}+\beta\underbrace{T(1,1)}+\gamma\underbrace{T(4,-1)}$

$$\begin{cases} \beta+4\gamma=x \\ \alpha+\beta-\gamma=y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta+4\gamma=x \\ \underbrace{1-\beta-\gamma}_{\alpha}+\beta-\gamma=y \end{cases} \rightarrow$$

$-2\gamma=y-1 \rightarrow \underbrace{\gamma=\frac{1-y}{2}}$

$\beta=x-\frac{4(1-y)}{2}=x-2+2y$

$\beta=\underline{x+2y-2}$

$\alpha=\frac{5-2x-3y}{2}$

OBS.: É SEMPRE BOM SOMAR $\alpha+\beta+\gamma$ P/ VER SE É IGUAL A 1

$T(x,y)=\left(\frac{5-2x-3y}{2}\right)T(0,1)+(x+2y-2)\cdot T(1,1)+\left(\frac{1-y}{2}\right)\cdot T(4,-1)$

$T(x,y)=\left(\frac{5-2x-3y}{2}\right)\cdot(2,-1)+(x+2y-2)\cdot(3,0)+\left(\frac{1-y}{2}\right)\cdot(1,2)$

$T(x,y)=\left(\frac{-1+2x+5y}{2},\frac{-3+2x+y}{2}\right)$

20/08/2009

$$\begin{cases} T(0,1) = (2,-1) \\ T(1,1) = (3,0) \\ T(4,-1) = (1,2) \end{cases}$$

$S_1 = \{A, B, C\} = \{(1,-1), (3,-1), (2,2)\}$

$(x,y) = \alpha(1,-1) + \beta(3,-1) + \gamma(2,2)$

$\alpha + \beta + \gamma = 1$

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta + 2\gamma = x \\ -\alpha - \beta + 2\gamma = y \end{cases}$$

$\beta = 1 - \alpha - \gamma$

$-\alpha - 1 + \alpha + \gamma + 2\gamma = y$

$3\gamma = y + 1 \rightarrow \gamma = \underbrace{\frac{y+1}{3}}$

SOMANDO AS EQUAÇÕES:

$2\beta + 4\gamma = x + y$

$2\beta + 4\left(\frac{y+1}{3}\right) = x + y$

$2\beta = \frac{3x + 3y - 4y - 4}{3}$

$2\beta = \frac{3x - y - 4}{3}$

$\beta = \underbrace{\frac{3x - y - 4}{6}}$

$\alpha = 1 - \beta - \gamma$

$\alpha = 1 - \left(\frac{3x - y - 4}{6}\right) - \left(\frac{y+1}{3}\right)$

$\alpha = \underbrace{\frac{8 - 3x - y}{6}}$

$P = (x,y)$

$$[(x,y)]_{S_1} = \begin{bmatrix} \frac{8-3x-y}{6} \\ \frac{3x-y-4}{6} \end{bmatrix}$$

Em relação a S_2

$(x,y) = \alpha(0,2) + \beta(0,-1) + \gamma(2,0)$

$$\begin{cases} 2\gamma = x \rightarrow \underbrace{\gamma = \frac{x}{2}} \\ 2\alpha - \beta = y \end{cases}$$

$\alpha + \beta = 1 - \frac{x}{2}$

$\alpha = \underbrace{\frac{2+2y-x}{6}}$ $\qquad \beta = \underbrace{\frac{2-x-y}{3}}$

$$[(x,y)]_{S_2} = \begin{bmatrix} \frac{2+2y-x}{6} \\ \frac{2-x-y}{3} \end{bmatrix}$$

$T(x,y) = \left(\frac{-1+2x+5y}{2}, \frac{-3+2x+y}{2}\right)$

$TA = T(1,-1) = (-2,-1)$

$TB = T(3,-1) = (0,-1)$

$TC = T(2,2) = \left(\frac{13}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$[(x,y) - (2,2)]_{S_1} = [(x-2, y-2)]_{S_1}$

$$[P - C]_{S_1} = \begin{bmatrix} \frac{16-3x-y}{6} \\ \frac{-8+3x-y}{6} \end{bmatrix}$$

$$[TB]_{S_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[TA]_{S_2} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 5/3 \end{bmatrix} \qquad \cancel{[TB]_{S_2} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}} \qquad [TC]_{S_2} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[T(x,y)]_{S_2} = \begin{bmatrix} 7/12 & 1/4 \; \cancel{11/12} \\ 11/3 & 3 \; \cancel{7/3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{16-3x-y}{6} \\ \frac{-8+3x-y}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/4 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

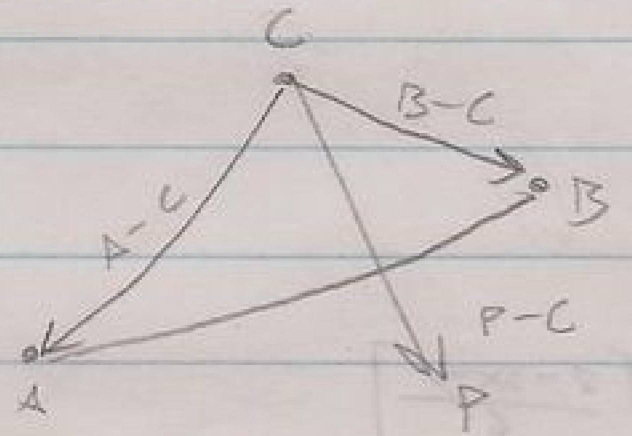
$S = \{A, B, C\}$ UM SISTEMA DE COORDENADAS BARICÊNTRICAS

$P = \alpha A + \beta B + \gamma C$

ENTÃO: $[P]_S = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ — ONDE $\gamma = 1 - \alpha - \beta$

$P = \alpha A + \beta B + (1 - \alpha - \beta) \cdot C$

$P = \alpha (A - C) + \beta (B - C) + C$



$$\underbrace{P - C}_{} = \alpha \underbrace{(A - C)}_{} + \beta \underbrace{(B - C)}_{}$$

SÃO L.I.

$[P - C]_S = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

NOTAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

$S = \{A - C, B - C\}$ → BASE INDUZIDA DE S

SEJA $v \in \mathbb{R}^2$ VETOR:

ESTABELECEMOS QUE:

$[v]_S = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, POIS

$v = \alpha (A - C) + \beta (B - C)$

SEJA $P \in \mathbb{E}^2$ PONTO:

$[P]_S = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, POIS $P = \alpha A + \beta B + (1 - \alpha - \beta) \cdot C$

NWSS

20/08/2009

SEJAM P E Q PONTOS, E $S = \{A, B, C\}$ SISTEMA DE COORDENADAS BARICÊNTRICAS

$$[P]_S - [Q]_S = [P-Q]_S$$

CONSIDERE $[P]_S = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ E $[Q]_S = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$

$$P = \alpha_1 A + \beta_1 B + (1 - \alpha_1 - \beta_1) \cdot C$$
$$Q = \alpha_2 A + \beta_2 B + (1 - \alpha_2 - \beta_2) C$$

$$P - Q = (\alpha_1 - \alpha_2) A + (\beta_1 - \beta_2) B + (-\alpha_1 + \alpha_2) \cdot C + (-\beta_1 + \beta_2) \cdot C$$
$$P - Q = (\alpha_1 - \alpha_2) A + (\beta_1 - \beta_2) B + (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot (-C) + (\beta_1 - \beta_2) \cdot (-C)$$
$$P - Q = (\alpha_1 - \alpha_2) \underbrace{(A - C)} + (\beta_1 - \beta_2) \underbrace{(B - C)}$$
$$\hookrightarrow [P-Q]_S = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 \\ \beta_1 - \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

SEJAM $P_1, P_2, \dots, P_N$ PONTOS:

$$\left.\begin{matrix} (1)\ \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i\right]_S}_{\text{PONTO}} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i [P_i]_S, \quad \text{ONDE } \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \\ \\ (2)\ \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i\right]_S}_{\text{VETOR}} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i [P_i]_S, \quad \text{ONDE } \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 0 \end{matrix}\right\} ?$$

$$\begin{cases} [TP]_{S_2} = [T]_{S_2}^{S_1} \cdot [P - C]_{S_1} + [TC]_{S_2} \\ [TQ]_{S_2} = [T]_{S_2}^{S_1} \cdot [Q - C]_{S_1} + [TC]_{S_2} \end{cases}$$

SUBTRAINDO TQ DE TP:

$$[TP]_{S_2} - [TQ]_{S_2} = [T]_{S_2}^{S_1} [P-C]_{S_1} - [T]_{S_2}^{S_1} [Q-C]_{S_1}$$
$$[TP]_{S_2} - [TQ]_{S_2} = [T]_{S_2}^{S_1} \left([P-C]_{S_1} - [Q-C]_{S_1}\right)$$
$$= [T]_{S_2}^{S_1} \cdot [P - \cancel{C} - Q + \cancel{C}]_{S_1}$$
$$[TP]_{S_2} = [T]_{S_2}^{S_1} \cdot [P - Q]_{S_1} + [TQ]_{S_2}$$

27/08/2009

T. AFIM

$S_1 = \{A, B, C\}$ $\qquad$ $S_2 = \{A', B', C'\}$

$$[TP]_{S_2} = [T]^{S_1}_{S_2} \cdot [P-Q]_{S_1} + [TQ]_{S_2}$$

$$[T]^{S_1}_{S_2} = \begin{pmatrix} [TA-TC]_{S_2} & [TB-TC]_{S_2} \end{pmatrix}$$

$$[TA-TC]_{S_2} = [T(A-C)]_{S_2}$$

$$[TA-TC]_{S_2} = [TA]_{S_2} - [TC]_{S_2}$$

$$[TP]_{S_2} - [TQ]_{S_2} = [T]^{S_1}_{S_2} \cdot [P-Q]_{S_1}$$

$$[TP-TQ]_{S_2} = [T]^{S_1}_{S_2} \cdot [P-Q]_{S_1}$$

$T(P-Q)$

EXTENSÃO DA TRANSFORMAÇÃO AFIM

A TRANSFORMAÇÃO AFIM PODE SER ESTENDIDA P/ TOMAR VETORES COMO ARGUMENTO E NESTE CASO SE COMPORTAR COMO TRANSFORMAÇÃO LINEAR QUE É CORRESPONDENTE À MATRIZ $[T]^{S_1}_{S_2}$

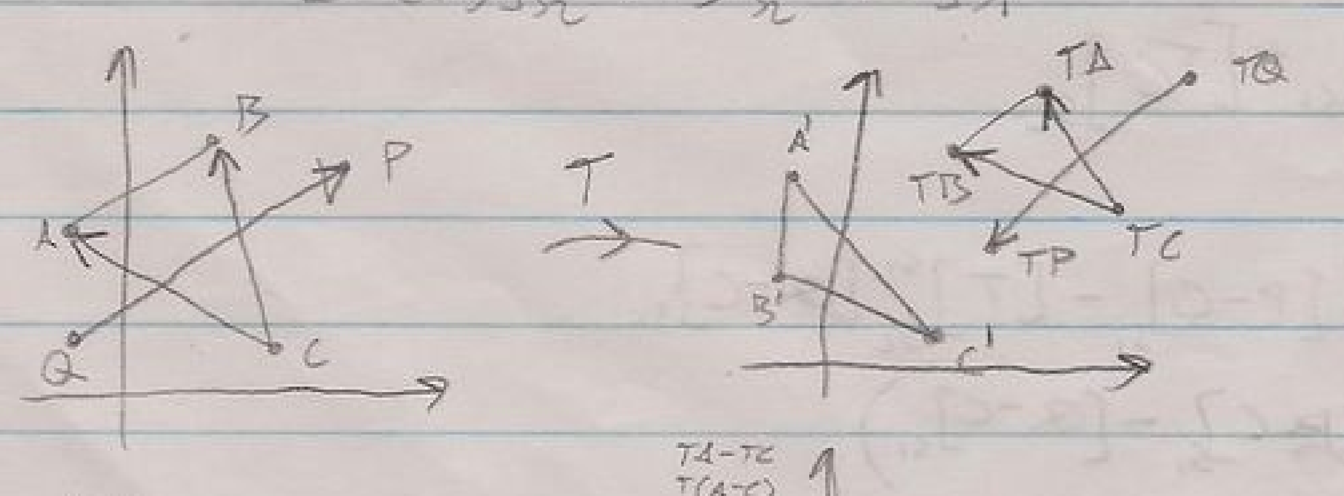
DEF A TRANSFORMAÇÃO AFIM T PODE SER ESTENDIDA P/:

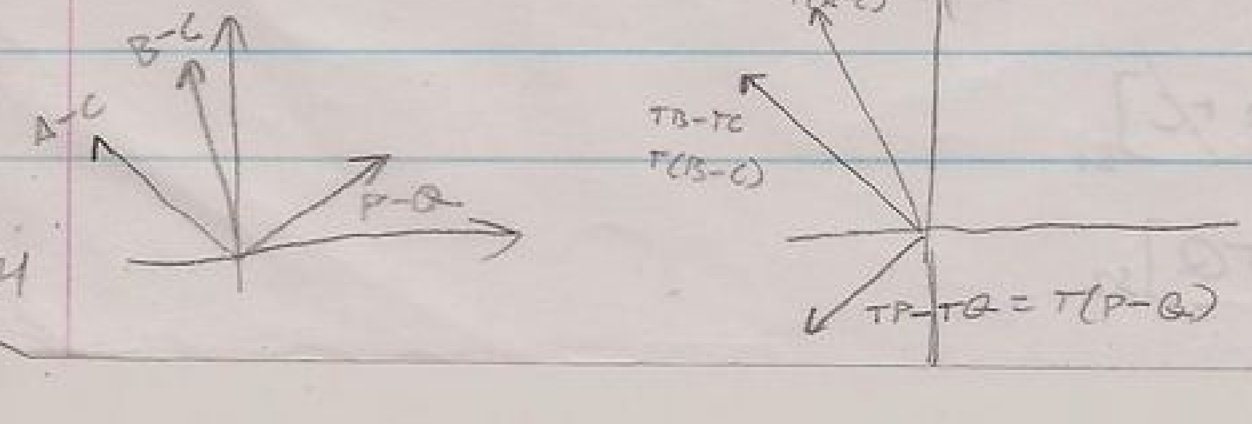
$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$[T(v)]_{S_2} = [T]^{S_1}_{S_2} \cdot [v]_{S_1}$$

A TRANSF. AFIM PEGA O 1º TRIANGULO E DEFORMA-O TRANSFORMANDO NO 2º. O PONTO "P" SOFRE A MESMA TRANSF.

O TRABALHO Q A TRANS. AFIM FAZ C/ O TRIÂNGULO ABC E O PONTO P É IDÊNTICO Q A TRANSF. LINEAR FAZ C/ OS VETORES $\vec{CA}$, $\vec{CB}$ E $\vec{QP}$





27/08/2009

Ex.: ENCONTRE A FORMA MATRICIAL DA TRANSFORMAÇÃO AFIM T TAL QUE:

$$\begin{cases} T(1,-1)=(2,1) \\ T(1,1)=(1,-1) \end{cases}$$

ONDE $(1,-1)$ E $(1,1)$ ACIMA SÃO VETORES

$T(2,1)=(0,0)$ $\rightarrow$ P/ TRANSF. AFIM É NECESSÁRIA ESTA INFORMAÇÃO, POIS A TRANSF. É "LOCALIZÁVEL". É PRECISO UMA INFORMAÇÃO DE LOCALIZAÇÃO, O QUE OS VETORES NÃO TEM

ONDE $(2,1)$ É PONTO

OS SISTEMAS DE COORDENADAS S_1 E S_2

$$\begin{cases} S_1=\{\overset{A}{(1,0)},\overset{B}{(0,1)},\overset{C}{(0,0)}\} & \text{(BASE INDUZIDA É A CANÔNICA)} \\ S_2=\{(1,0),(0,1),(0,0)\} & (\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}) \end{cases}$$

$$[TP]_{S_2}=[T]_{S_2}^{S_1}\cdot[P-Q]_{S_1}+[TQ]_{S_2}$$

$$[T]_{S_2}^{S_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$[T(A-C)]_{S_2} = (1,0)$, $\quad [T(B-C)]_{S_2} = (0,1)$

$T(1,0)=?$ (VETOR)

$T(0,1)=?$ (VETOR)

$$(1,0)=A(1,-1)+B(1,1)$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -A+B=0 \end{cases} \rightarrow 2B=1 \rightarrow B=\tfrac{1}{2} \rightarrow A=\tfrac{1}{2}$$

$$T(1,0)=\tfrac{1}{2}T(1,-1)+\tfrac{1}{2}T(1,1)$$
$$=\tfrac{1}{2}(2,1)+\tfrac{1}{2}(1,-1)=\left(\tfrac{3}{2},0\right)$$

$$(0,1)=A(1,-1)+B(1,1)$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=1 \end{cases} \rightarrow 2B=1 \rightarrow B=\tfrac{1}{2} \rightarrow A=-\tfrac{1}{2}$$

$$T(0,1)=\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot T(1,-1)+\tfrac{1}{2}T(1,1)$$
$$=-\tfrac{1}{2}(2,1)+\tfrac{1}{2}(1,-1)=\left(-\tfrac{1}{2},-1\right)$$

27/08/09

$[T(1,0)]_{S_2} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[T(0,1)]_{S_2} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$[T(x,y)]_{S_2} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot [(x-2, y-1)]_{S_1} + [(0,0)]_{S_2}$$

$$[T(x,y)]_{S_2} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-2 \\ y-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

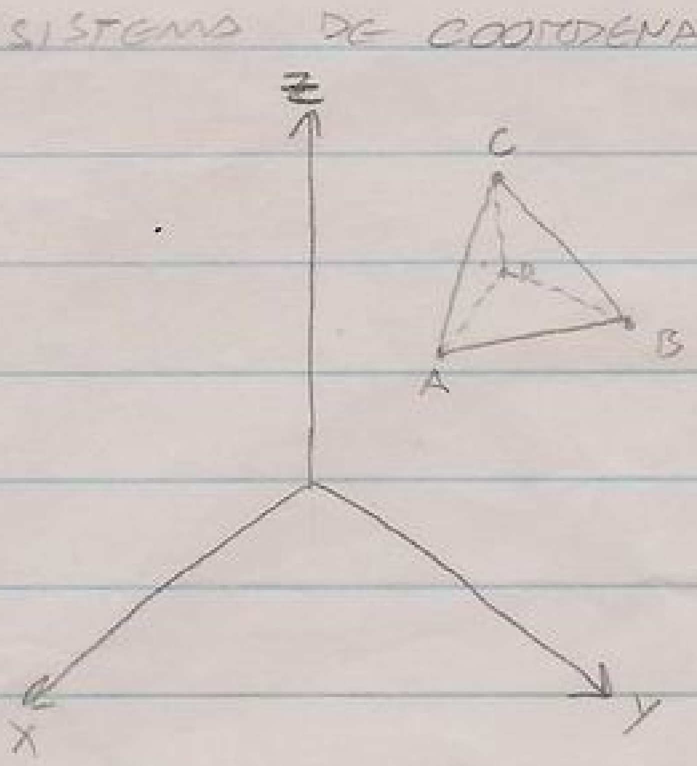
No caso do $\mathbb{E}^3$ e $\mathbb{R}^3$:

Podemos definir a transformação afim e sua extensão da mesma forma

Sejam A, B, C e D quatro pontos não coplanares (tetraedro) então temos o sistema de coordenadas baricêntricas $S_1 = \{A, B, C, D\}$ tal como

$P = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ onde $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$

$\delta = 1 - \alpha - \beta - \gamma$



$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C + (1 - \alpha - \beta - \gamma) D$$

$$P - D = \alpha(A - D) + \beta(B - D) + \gamma(C - D)$$

$[P]_{S_1} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$; $[A]_{S_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[B]_{S_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[C]_{S_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[D]_{S_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Do mesmo jeito:

$S_2 = \{A', B', C', D'\}$ onde A', B', C' e D' são não coplanares

Definimos a transformação afim

$[TP]_{S_2} = [T]^{S_1}_{S_2} \cdot [P - Q]_{S_1} + [TQ]_{S_2}$ onde P é ponto

$[Tv]_{S_2} = [T]^{S_1}_{S_2} \cdot [v]_{S_1}$ onde v é vetor

$$\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}} \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ [T(A-D)]_{S_2} & [T(B-D)]_{S_2} & [T(C-D)]_{S_2} \end{array}$$

27/08/2009

Se $T = I$: (identidade)

$$[Ip]_{S_2} = [I]^{S_1}_{S_2} \cdot [P-Q]_{S_1} + [IQ]_{S_2}$$

$$[P]_{S_2} = [I]^{S_1}_{S_2} \cdot [P-Q]_{S_1} + [Q]_{S_2}$$

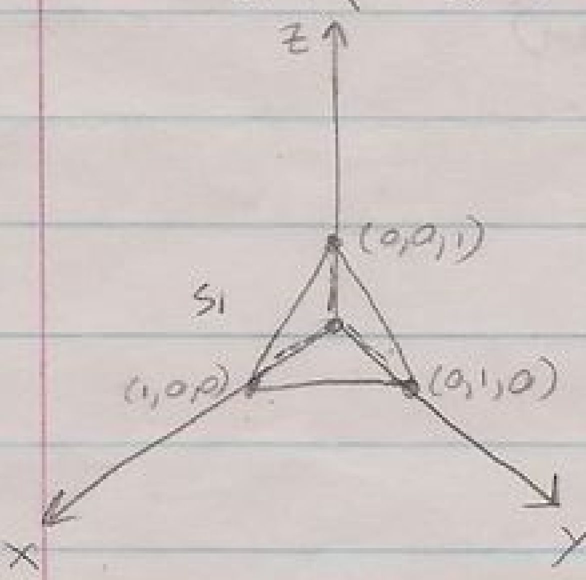
MUDANÇA DE COORDENADAS

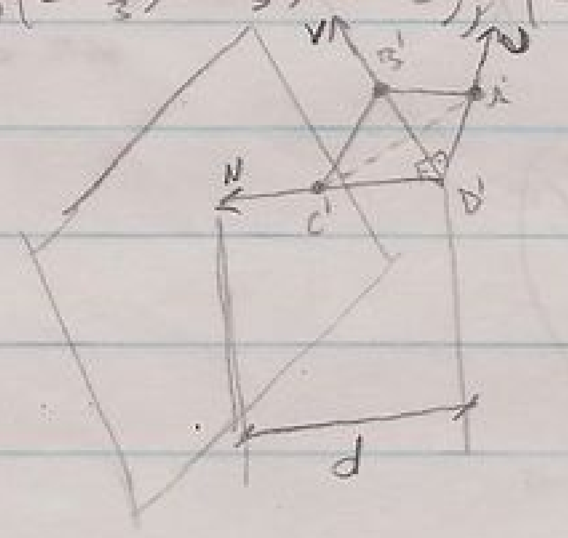
$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ [A-D]_{S_2} & [B-D]_{S_2} & [C-D]_{S_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Considere dois sistemas de coordenadas

$S_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0)\}$

$S_2 = \{(2-\frac{\sqrt{2}}{2}, 3, 4+\frac{\sqrt{2}}{2}), (2+\frac{\sqrt{3}}{3}, 3-\frac{\sqrt{3}}{3}, 4+\frac{\sqrt{3}}{3}), (2+\frac{\sqrt{6}}{6}, 3+\frac{2\sqrt{6}}{6}, 4+\frac{\sqrt{6}}{6}), (2,3,4)\}$





BASE INDUZIDA DE S_2: ORTONORMAL

$[I]^{\alpha}_{\beta}$ é ortogonal

α, β são ortonormais

$$\left([I]^{\alpha}_{\beta}\right)^{-1} = \left([I]^{\alpha}_{\beta}\right)^{t}$$

$$[P]_{S_2} = [I]^{S_1}_{S_2} \cdot [P-D']_{S_1} + [D']_{S_2} \; ; \quad [D']_{S_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[P]_{S_2} = [I]^{S_1}_{S_2} \cdot [P-D']_{S_1}$$

$$[I]^{S_2}_{S_1} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

$$[I]^{S_1}_{S_2} = \left([I]^{S_2}_{S_1}\right)^{-1} = \left([I]^{S_2}_{S_1}\right)^{t} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \sqrt{6}/3 & \sqrt{6}/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \leftarrow U \rightarrow \\ \leftarrow V \rightarrow \\ \leftarrow N \rightarrow \end{bmatrix}$$

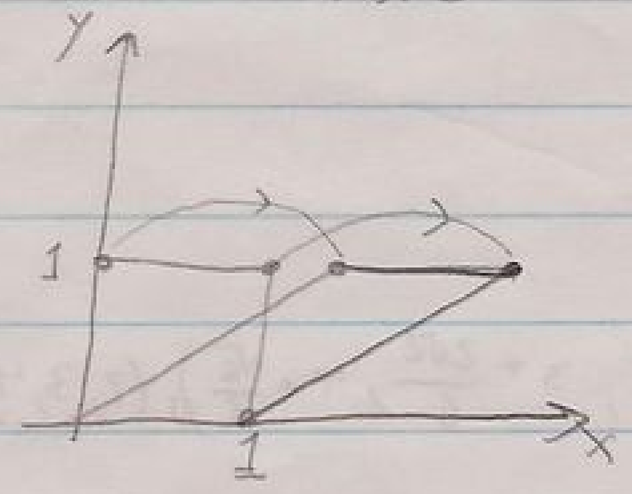
03/09/2009

Transformações afins em coordenadas homogêneas

Como as transf. afins não são lineares, não podem ser representadas por matrizes (ou seja, uma transf. afim não pode ser representada por uma única matriz $\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$)

Uma forma de se representar a maior parte da transformação afim como matriz utiliza um aumento de dimensão e um cisalhamento

Cisalhamento: $\mathbb{R}^2$

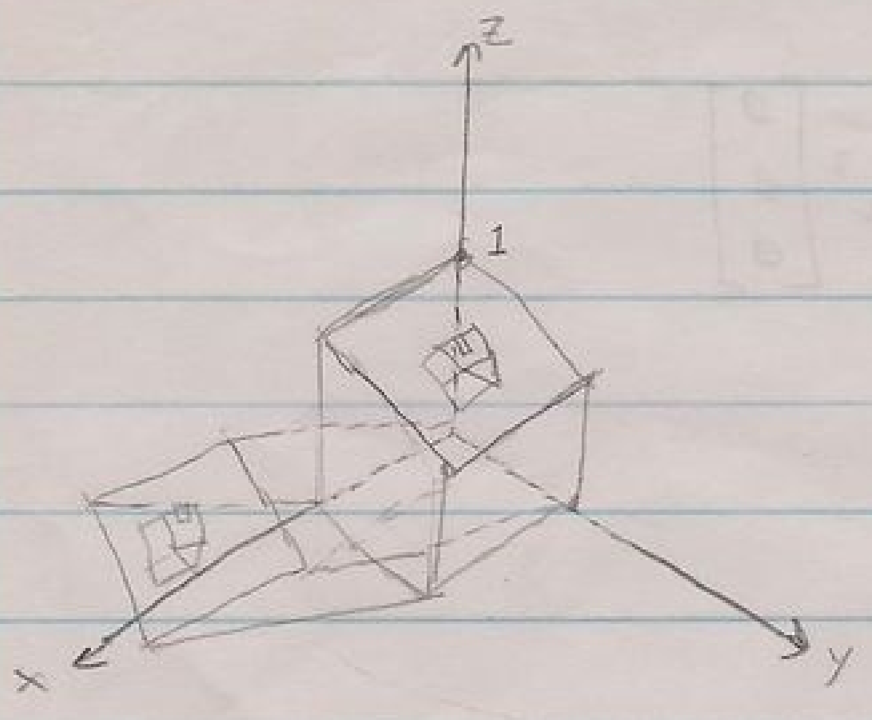


$$[C_k]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com $k > 0$ (no caso p/ ilustrar o incr. de X, mas k pode ser < 0 tbm)

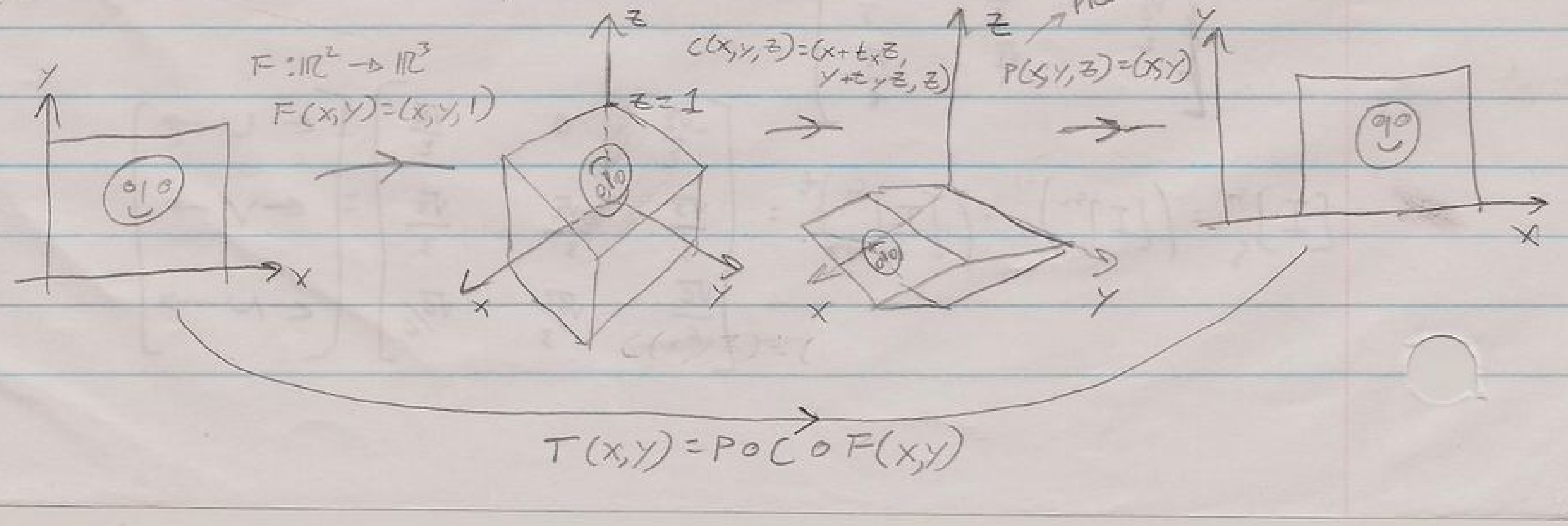
$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ky \\ y \end{pmatrix}$$

Cisalhamento no $\mathbb{R}^3$



Tudo o que estiver no plano $z=1$ permanece no plano $z=1$.

A idéia de incorporar a translação à parte matricial é recorrer ao aumento de dimensão ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$) e utilizar o cisalhamento apropriado.



$$T(x,y) = P \circ C \circ F(x,y)$$

03/09/2009

$$T(x,y) = P \circ C \circ F(x,y)$$
$$= P \circ C(x,y,1)$$
$$= P(x+t_x, y+t_y, 1)$$
$$= (x+t_x, y+t_y)$$

OBSERVANDO A ESTRUTURA DA MATRIZ C:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} t_x \\ t_y \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix}} & 1 \end{pmatrix}$$

CONSIDERE A SEGUINTE TRANSFORMAÇÃO LINEAR:

$$[T]_\varepsilon = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[C \circ T]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & t_x \\ A_{21} & A_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CONSIDERE C_1 UMA TRANSLAÇÃO:

$$[C_1]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s_x \\ 0 & 1 & s_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[C_1 \circ C \circ T]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s_x \\ 0 & 1 & s_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & t_x \\ A_{21} & A_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & t_x + s_x \\ A_{21} & A_{22} & t_y + s_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

UM PONTO NA FORMA $(x,y,1)$ É DITO ESTAR NA FORMA DE COORDENADAS HOMOGÊNEAS; $(x,y,1)$ SÃO AS COORDENADAS HOMOGÊNEAS DE (x,y)

NO $\mathbb{R}^3$ (OU $\mathbb{E}^3$), A FORMA MATRICIAL EM COORDS. HOMOGÊNEAS É TOTALMENTE ANÁLOGA

03/09/09

$$[C]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ P/ TRANSLAÇÃO C/ FATORES (t_x, t_y, t_z).

NO CASO GERAL:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & t_x \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & t_y \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & t_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

PARTE LINEAR

PARTE DA TRANSLAÇÃO

PARTE PROJETIVA (NÃO INTERESSA EM PG)

PARA VETORES A NOTAÇÃO HOMOGÊNEA DEVE SER $(x, y, 0)$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix};\ v = B - A = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

TIPO $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ (SE FOR $\mathbb{R}^2$) OU $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$ SE FOR $\mathbb{R}^3$.

OPERADORES AFINS NOTÓRIOS DO $\mathbb{R}^2$

1) MUDANÇA DE ESCALA

$$[S]_\varepsilon = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, ONDE $S_x > 0$, $S_y > 0$,

SE $S_x = S_y > 1 \Rightarrow$ EXPANSÃO

$S_x = S_y < 1 \Rightarrow$ CONTRAÇÃO

$S_x \neq S_y \Rightarrow$ DEFORMAÇÃO

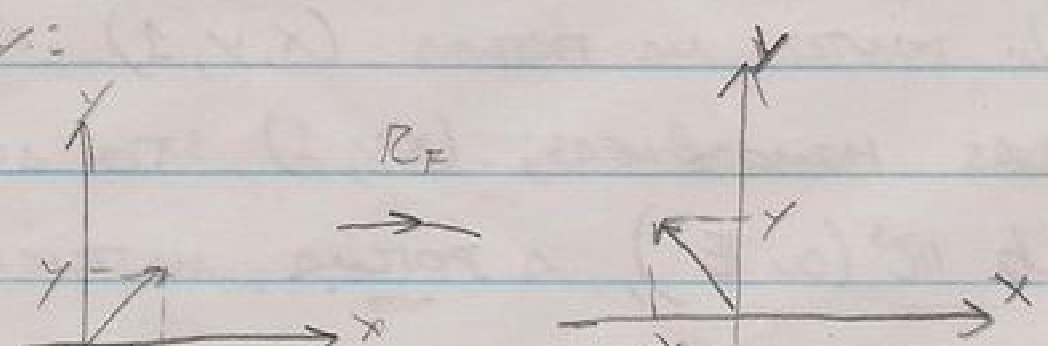
2) REFLEXÕES

EM TORNO DO EIXO OX:

$$[R_F]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

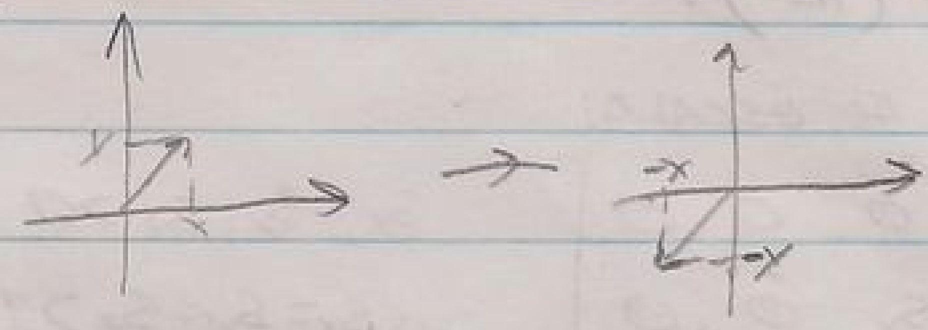
EM TORNO DO EIXO OY:

$$[R_F]_\varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

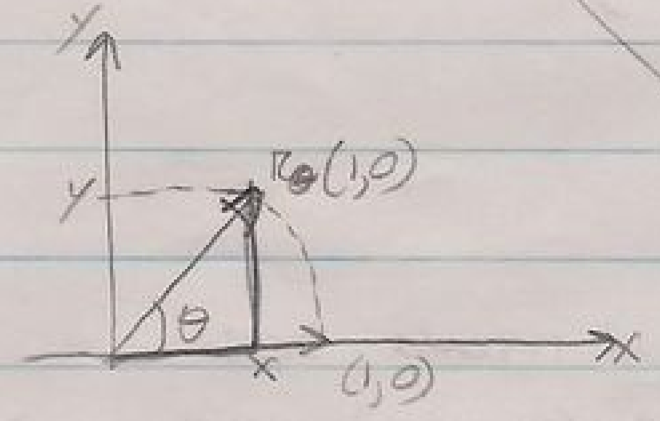


EM TORNO DA ORIGEM:

$$[R_F]_\varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

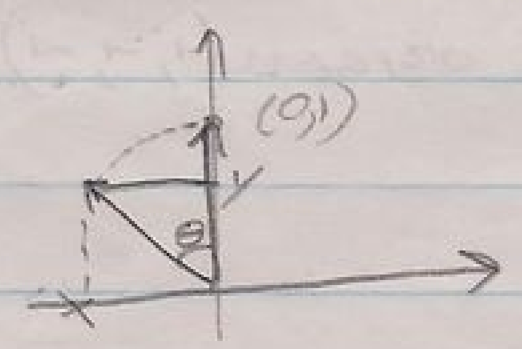


3) ROTAÇÃO DE θ: $[R_\theta]_\varepsilon = \begin{pmatrix} \underbrace{\quad}_{[R_\theta(1,0)]_\varepsilon} & \underbrace{\quad}_{[R_\theta(0,1)]_\varepsilon} \end{pmatrix}$



ANTI-HORÁRIA

$\cos\theta = \frac{x}{1} = x$, $\quad \operatorname{sen}\theta = y$; $\quad R_\theta(1,0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$



$R_\theta(0,1) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

$$\boxed{2\times 2: \quad [R_\theta]_\varepsilon = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

SE FOR HORÁRIA, TOMAMOS θ C/ SINAL TROCADO

$$[R_\theta]_\varepsilon = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

NA NOTAÇÃO EM COORDENADAS HOMOGÊNEAS:

$$[R_\theta]_\varepsilon = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

03/09/09

EM $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{E}^3$):

1) MUDANÇA DE ESCALA:

$$[S]_\varepsilon = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$S_x, S_y, S_z > 0$

$S_x = S_y = S_z > 1$: EXPANSÃO (DILATAÇÃO)

$S_x = S_y = S_z < 1$: CONTRAÇÃO

$\left.\begin{array}{l} S_x \neq S_y \text{ ou } S_x \neq S_z \\ \text{ou } S_y \neq S_z \end{array}\right\}$ DEFORMAÇÃO

2) REFLEXÕES

$$[R_F]_\varepsilon = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

REFLEXÕES EM TORNO DE:

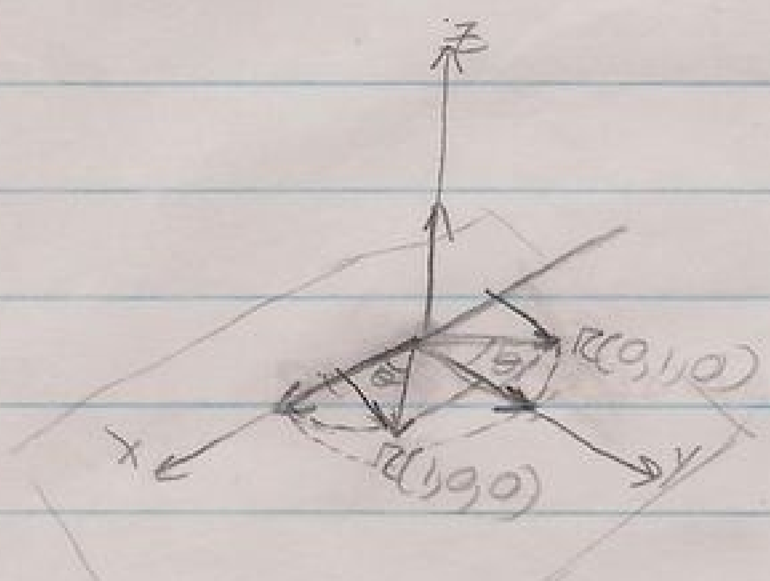
$OX(\overbrace{1,-1,-1}^{\text{DIAG. PRINCIPAL}})$, $OY(-1,1,-1)$, $OZ(-1,-1,1)$,

PLANO XY $(1,1,-1)$, PLANO XZ $(1,-1,1)$

PLANO YZ $(-1,1,1)$, ORIGEM $(-1,-1,-1)$

3) ROTAÇÕES

a) EM TORNO DO EIXO OZ:



$R(1,0,0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$

$R(0,1,0) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$

$R(0,0,1) = (0,0,1)$

DE FORMA SEMELHANTE:

$$[R_{\theta,z}]_\varepsilon = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [R_{\theta,x}]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ROTAÇÃO EM TORNO DO EIXO OY:

$$[R_{\theta,y}]_\varepsilon = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

03/09/09

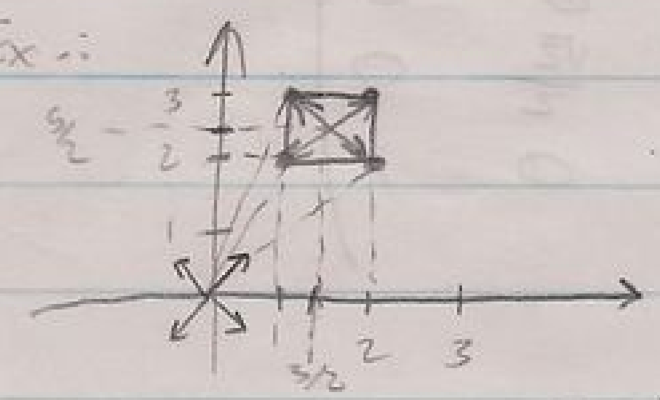
Encontre a forma matricial em coordenadas homogêneas do operador afim que executa uma rotação de 30° em torno do eixo:

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 3+2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

A reta não passa na origem (ponto (1,2,3))

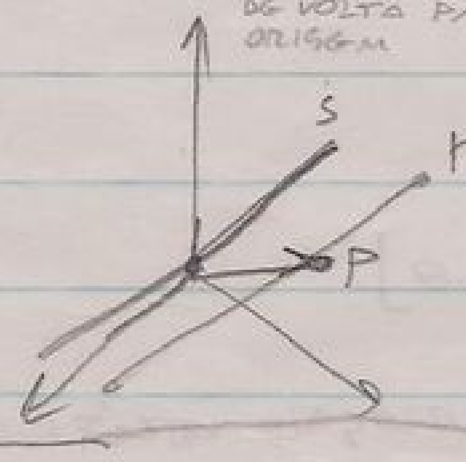
Seguida de uma deformação que expande a direção X de 2 vezes e contrai a direção Z de $\frac{1}{3}$

Ex.:



Encontre o operador afim em coords homogêneas que rotaciona de 30° em torno do centróide do quadrado

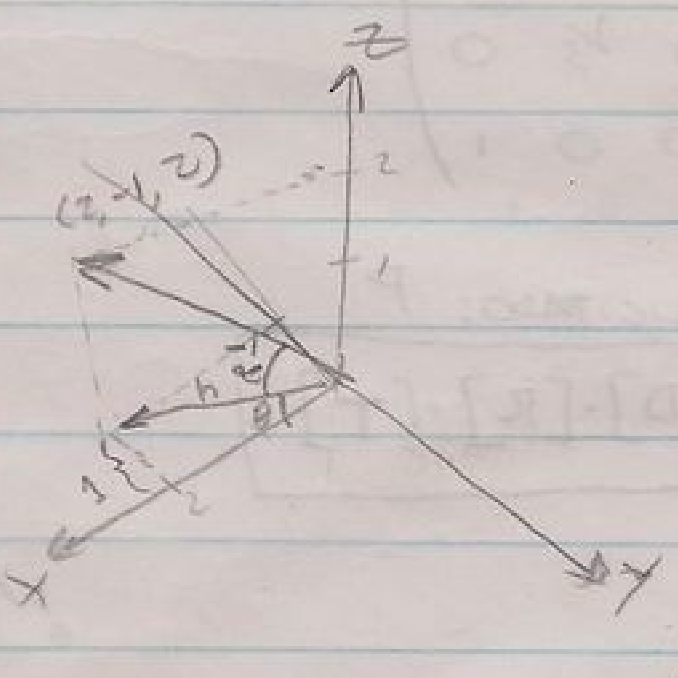
$$[T]_\varepsilon = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{rotaciona e translada de volta p/ o local de origem}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{translada p/ o centro}}$$



Se pegar todos os ptos de r e subtrair do ponto P, vai gerar uma reta s, que passa na origem

▷ Primeira translação

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$[R_{\theta,z}]_\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomando a projeção do vetor $(2,-1,2)$ sobre xy: $(2,-1,0)$

$h = \|(2,-1,0)\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

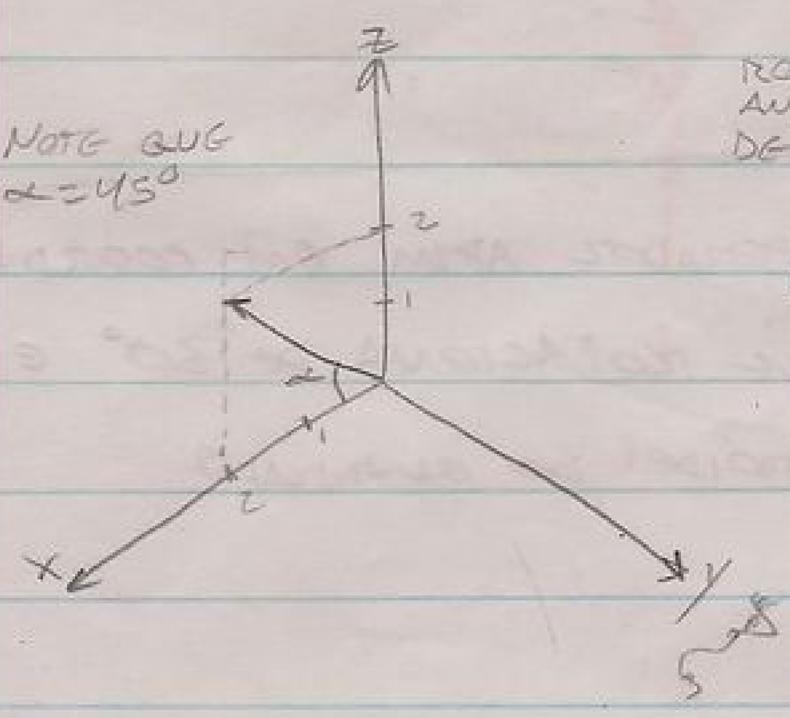
10/09/2009

NÃO É TRIVIAL CHEGAR A UMA MATRIZ DE ROTAÇÃO EM TORNO DO EIXO DADO. POR ISSO, FAREMO-LO COINCIDIR COM O EIXO $\vec{OX}$

$$[R_{z,\theta}] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

NOTE QUE $\alpha = 45°$



ROTAÇÃO ANTI-HORÁRIA DE α

$$[R_{y,\alpha}] = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[R_{x,30°}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[R] = [R_{z,-\theta}] \cdot [R_{y,-\alpha}] \cdot [R_{x,30°}] \cdot [R_{y,\alpha}] \cdot [R_{z,\theta}]$$

$$[D] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OPERADOR SOLICITADO: P

$$\boxed{[P] = ([T]^{-1}) \cdot [D] \cdot [R] \cdot [T]}$$

<u>OBS.:</u> EM COMPUTAÇÃO GRÁFICA, COSTUMA-SE TRABALHAR COM A NOTAÇÃO TRANSPOSTA.

AO INVÉS DE APLICAR A MATRIZ AO VETOR À DIREITA, APLICA-SE A MATRIZ À TRANSPOSTA DO VETOR, À ESQUERDA:

Ex.:

$$(x \ y \ z \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

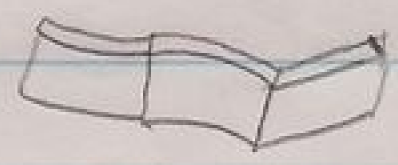
A ORDEM DO PRODUTO DAS MATRIZES TAMBÉM É INVERTIDA

NOTE QUE $[T]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10/09/09

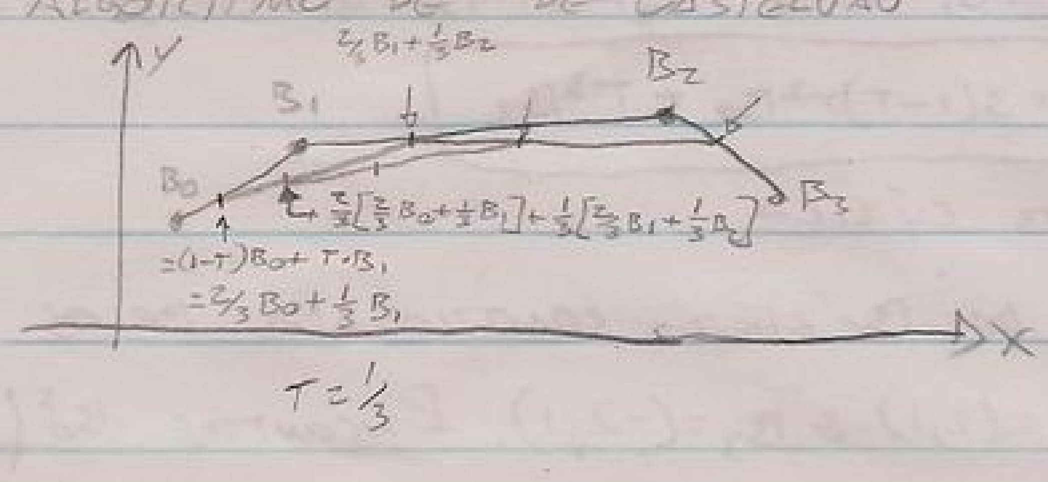
CURVAS

FORMAS LIVRES: (COLAGEM DE OBJETOS)

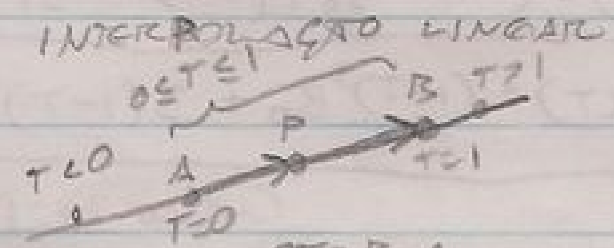


CURVAS DE BÉZIER (ALGORITMO "DE" DE CASTELJAU")

ALGORITMO DE "DE CASTELJAU"



INTERPOLAÇÃO LINEAR



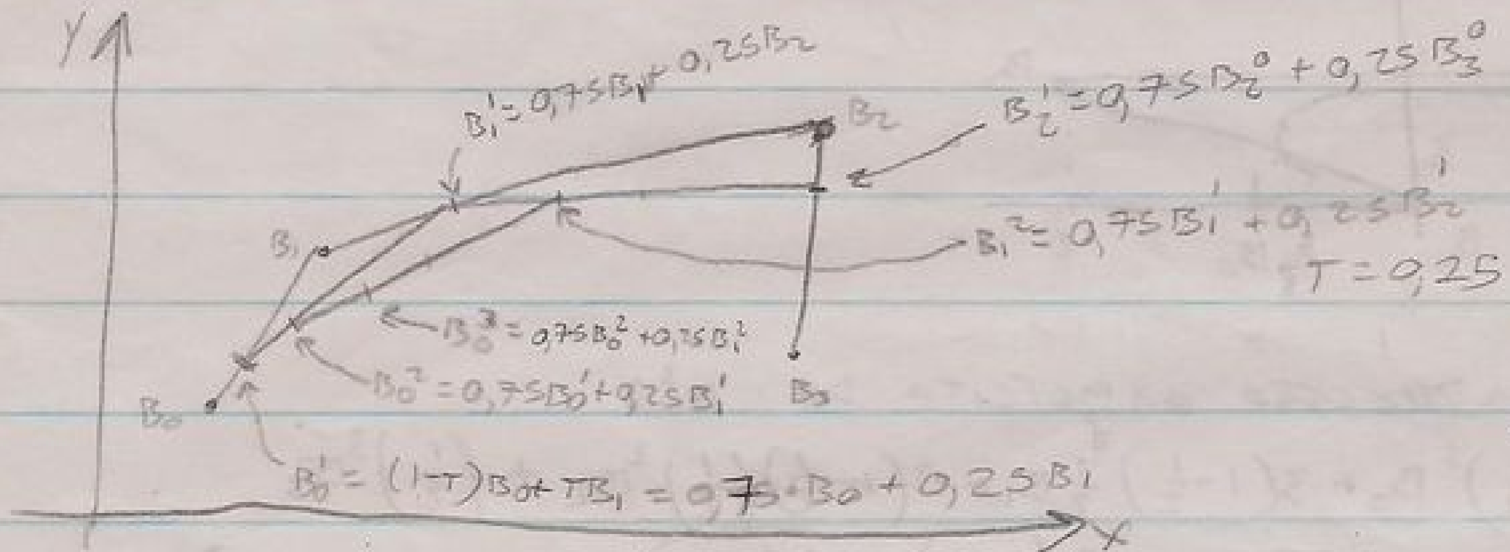
$v = B - A$

$P = A + Tv = A + T(B-A)$

$= (1-T) \cdot A + TB$

P/ FAZER A CURVA, TEM QUE APLICAR O ALGORITMO DE CASTELJAU COM T VARIANDO DE 0 A 1

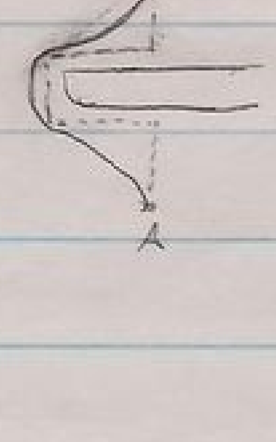
17/09/2009



ESTA É A AVALIAÇÃO DA CURVA DE BÉZIER PARA $T = 0{,}25$

OBS: PARA DESENHAR A CURVA, NORMALMENTE DIVIDE-SE O INTERVALO $[0, 1]$ EM UM CERTO NÚMERO DE PARTES, AVALIAM-SE OS PONTOS PARA CADA VALOR DE T, E CONECTAM-SE OS PONTOS POR SEGMENTOS DE RETA

A CURVA DE BÉZIER PODE SER USADA EM JOGOS PARA TORNAR OS MOVIMENTOS DO PERSONAGEM MAIS NATURAL, QUANDO POR EXEMPLO, ELE DESVIA DE UM OBSTÁCULO



EXPLICITANDO O PONTO DA CURVA EM FUNÇÃO DOS PONTOS DE CONTROLE:

NESSE EXEMPLO EM PARTICULAR:

$$B_0^3 = (1-T)B_0^2 + TB_1^2$$

$$B_0^3 = (1-T)[(1-T)B_0^1 + TB_1^1] + T[(1-T)B_1^1 + TB_2^1]$$

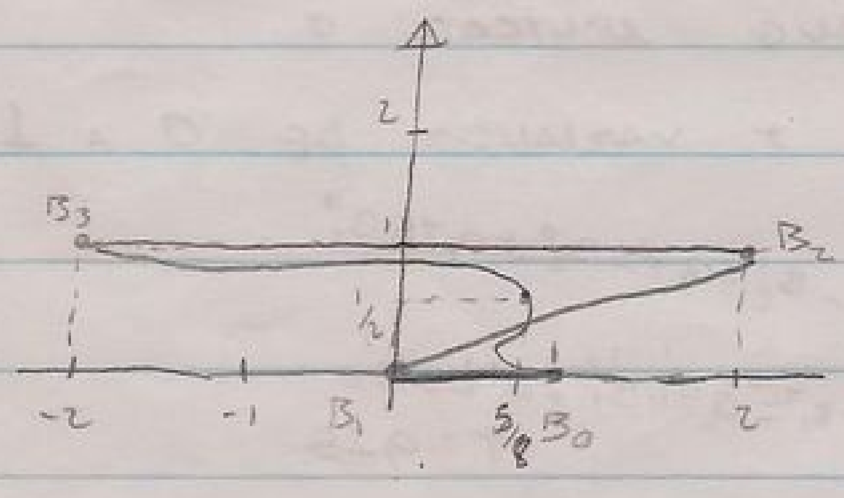
$$B_0^3 = (1-T)^2[(1-T)B_0 + TB_1] + (1-T)T[(1-T)B_1 + TB_2] + (1-T)T[(1-T)B_1 + TB_2] + T^2[(1-T)B_2 + TB_3]$$

$$B_0^3(T) = (1-T)^3 B_0 + (1-T)^2 T B_1 + (1-T)^2 T B_1 + (1-T)T^2 B_2 + (1-T)^2 T B_1 + (1-T)T^2 B_2 + (1-T)T^2 B_2 + T^3 B_3$$

$$\boxed{B_0^3(T) = (1-T)^3 B_0 + 3(1-T)^2 T B_1 + 3(1-T)T^2 B_2 + T^3 B_3}$$

CURVA DE BÉZIER CÚBICA

Ex: CONSIDERE UMA CURVA DE BÉZIER CONTROLADA PELOS SEGUINTES PONTOS: $B_0 = (1,0)$, $B_1 = (0,0)$, $B_2 = (2,1)$ E $B_3 = (-2,1)$. ENCONTRE $B_0^3\left(\frac{1}{2}\right)$



UTILIZANDO A EXPRESSÃO EXPLÍCITA DE B_0^3:

$$B_0^3\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left(1-\tfrac{1}{2}\right)^3 B_0 + 3\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^2 \tfrac{1}{2} B_1 + 3\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 B_2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 B_3$$

$$= \tfrac{1}{8}(1,0) + \tfrac{3}{8}(0,0) + \tfrac{3}{8}(2,1) + \tfrac{1}{8}(-2,1)$$

$$B_0^3\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{5}{8}, \tfrac{1}{2}\right)$$

O ALGORITMO DE DE CASTELJAU

ENTRADA: $B_0, B_1, \dots, B_N$; VALOR DE $T \in [0,1]$

SAÍDA: $B_0^N(T)$, O PONTO NA CURVA DE BÉZIER P/ O VALOR DADO DE T

$$B_i^R(T) = (1-T)B_i^{R-1} + TB_{i+1}^{R-1}$$

$$R = 1, \dots, N$$

$$i = 0, \dots, N-R$$

17/09/2009

POLINÔMIO DE BERNSTEIN

O i-ÉSIMO POLINÔMIO DE BERNSTEIN DE GRAU N É DEFINIDO COMO:

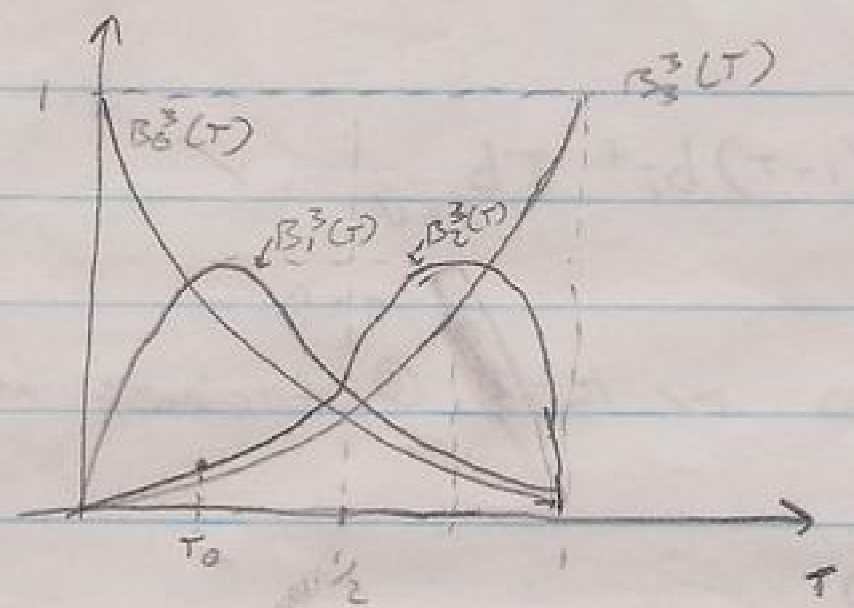
$$B_i^N = \binom{N}{i}(1-T)^{N-i} \cdot T^i$$

$$\overset{1^N = 1}{\overbrace{[(1-T)+T]^N}} = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i}(1-T)^{N-i} \cdot T^i = \sum_{i=0}^{N} B_i^N(T)$$

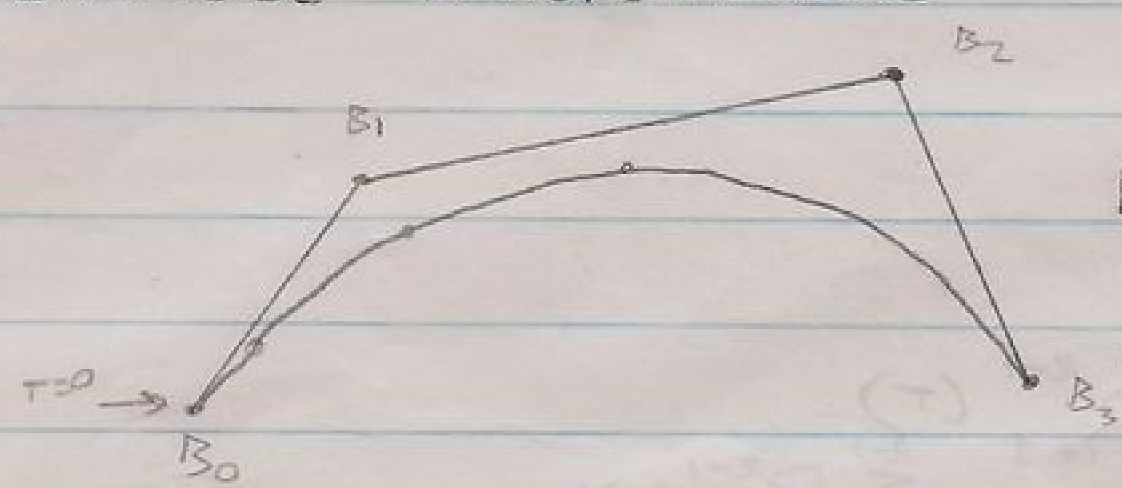
ESTA É A PROPRIEDADE DA PARTIÇÃO DA UNIDADE

Ex.: $B_0^3(T) = (1-T)^3$; $B_1^3(T) = 3(1-T)^2 T$, $B_2^3(T) = 3(1-T)T^2$; $B_3^3(T) = T^3$

$N = 3$



CONTROLE PSEUDO-LOCAL



$$b_0^3(T) = B_0^3(T)b_0 + B_1^3(T)b_1 + B_2^3(T)b_2 + B_3^3(T)b_3$$

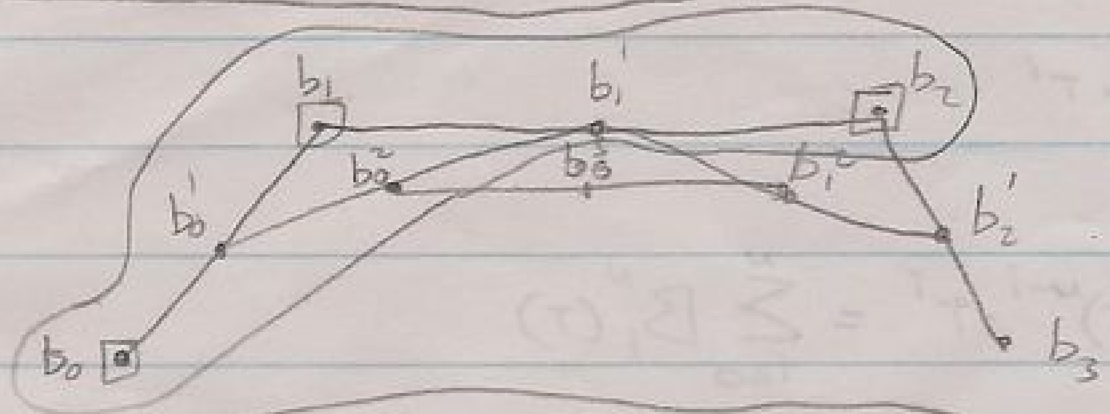
$$\binom{N}{i} = \binom{N-1}{i} + \binom{N-1}{i-1}$$

$$B_i^N(T) = \left[\binom{N-1}{i} + \binom{N-1}{i-1}\right](1-T)^{N-i} \cdot T^i = \binom{N-1}{i}(1-T)^{N-i} T^i + \binom{N-1}{i-1}(1-T)^{N-i} \cdot T^i$$

$$\begin{cases} B_i^{N-1}(T) = \binom{N-1}{i}(1-T)^{N-1-i} \cdot T^i & N-1-i+r \\ B_{i-1}^{N-1}(T) = \binom{N-1}{i-1}(1-T)^{N-i}\, T^{i-1} \end{cases}$$

$$B_i^N(T) = (1-T)\binom{N-1}{i}(1-T)^{N-i-1}\cdot T^2 + T\binom{N-1}{i-1}(1-T)^{N-i}T^{i-1}$$

$$\boxed{B_i^N(T) = (1-T)B_i^{N-1}(T) + T B_{i-1}^{N-1}(T)}$$



$$\boxed{b_i^R(T) = \sum_{J=0}^{R} B_J^R(T)\cdot b_{i+J}}$$

Demonstração por indução: em R

Base: $R=1$:

$$b_i^1(T) = \sum_{J=0}^{1} B_J^1(T)\, b_{i+J} = (1-T)b_i + T b_{i+J} \quad \checkmark$$

Suponha que a fórmula é válida p/ $R-1$; Queremos mostrar que também é válida p/ R

$$b_i^{R-1}(T) = \sum_{J=0}^{R-1} B_J^{R-1}(T)\, b_{i+J} \quad (V)$$

Queremos mostrar:

$$b_i^R(T) = \sum_{J=0}^{R} B_J^R(T)\, b_{i+J}$$

Por de Casteljau:

$$b_i^R(T) = (1-T)\, b_i^{R-1}(T) + T\, b_{i+1}^{R-1}(T)$$
$$= (1-T)\sum_{J=0}^{R-1} B_J^{R-1}(T) b_{i+J} + T\sum_{J=0}^{R-1} B_J^{R-1}(T) b_{i+\underbrace{J+1}_{K}}$$

Trocando $K = J+1 \Rightarrow J = K-1$

$$b_i^R(T) = (1-T)\sum_{J=0}^{R-1} B_J^{R-1}(T)\, b_{i+J} + T\sum_{K=1}^{R} B_{K-1}^{R-1}(T)\, b_{i+K}$$

Por definição: $B_i^N(T) \equiv 0$, se $i \notin \{0, 1, \dots, N\}$

$$b_i^r(t) = (1-t)\sum_{j=0}^{r} B_j^{r-1}(t)\, b_{i+j} + t\sum_{j=0}^{r} B_{j-1}^{r-1}(t)\, b_{i+j}$$

$$= \sum_{j=0}^{r} (1-t) B_j^{r-1}(t)\, b_{i+j} + t\, B_{j-1}^{r-1}(t)\, b_{i+j}$$

01/10/2009

CURVA DE BÉZIER GRAU N

PONTOS DE CONTROLE: $b_0, b_1, b_2, \dots, b_N$

FORMA EXPLÍCITA:

$$b_0^N(t) = \sum_{i=0}^{N} B_i^N(t)\, b_i$$

ONDE: $B_i^N(t) = \binom{N}{i}(1-t)^{N-i} \cdot t^i$

POLINÔMIOS DE BERNSTEIN

Ex: CONSIDERE A CURVA DE BÉZIER CONTROLADA POR: $b_0=(1,0)$, $b_1=(0,0)$, $b_2=(0,1)$, $b_3=(2,2)$ E $b_4=(2,0)$. ENCONTRE $b_0^4(\frac{1}{2})$

$$b_0^4(t) = \sum_{i=0}^{4} B_i^4(t) \cdot b_i$$

$B_0^4(t) = (1-t)^4$

$B_1^4(t) = 4(1-t)^3 \cdot t$

$B_2^4(t) = 6(1-t)^2 \cdot t^2$

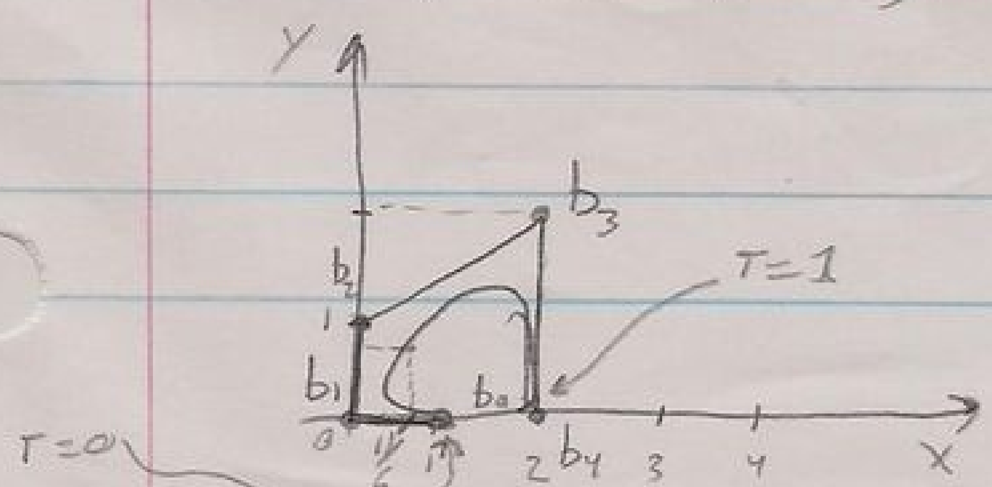
$B_3^4(t) = 4(1-t) \cdot t^3$

$B_4^4(t) = t^4$

$$b_0^4(\tfrac{1}{2}) = (1-\tfrac{1}{2})^4 \cdot (1,0) + 4(1-\tfrac{1}{2})^3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (0,0) + 6(1-\tfrac{1}{2})^2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \cdot (0,1) + 4(1-\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})^3 (2,2) + (\tfrac{1}{2})^4 \cdot (2,0)$$

$$b_0^4(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{16}(1,0) + \tfrac{6}{16} \cdot (0,1) + \tfrac{4}{16}(2,2) + \tfrac{1}{16}(2,0)$$

$$b_0^4(\tfrac{1}{2}) = \left(\tfrac{11}{16}, \tfrac{14}{16}\right) = \left(\tfrac{11}{16}, \tfrac{7}{8}\right)$$



Algumas propriedades das curvas de Bézier

1) A curva de Bézier interpola os extremos

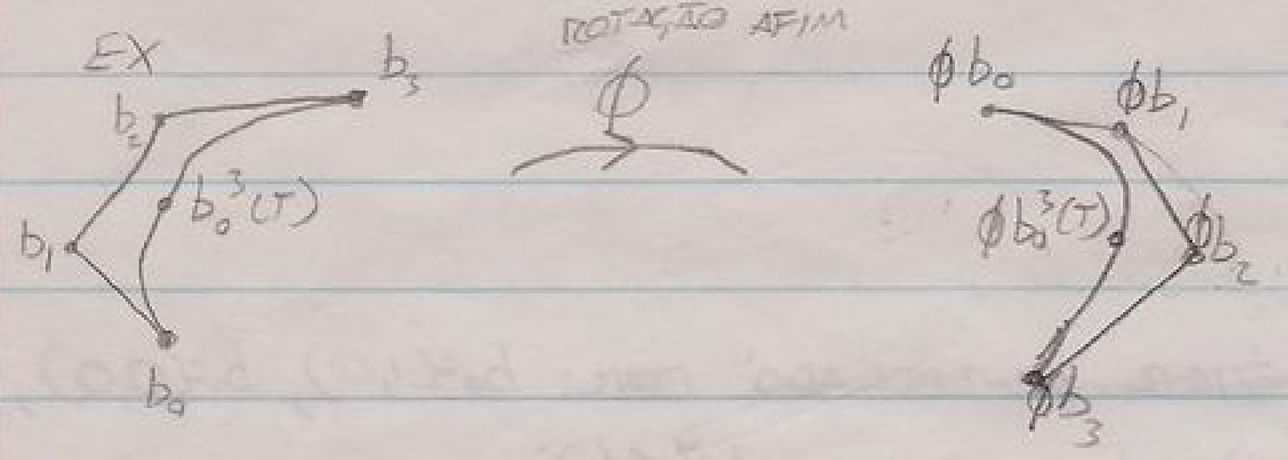
$$b_0^n(0) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(0)\cdot b_i = b_0$$

(pois os polinômios de Bernstein $B_i^n(t)$ se anulam p/ $t=0$, quando $i \neq 0$)

$$b_0^n(1) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(1)\, b_i = b_n$$

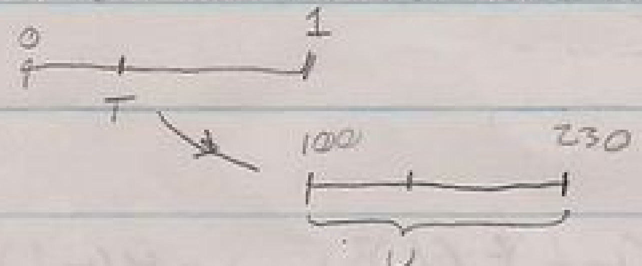
(pois os pol. de Bernstein $B_i^n(t)$ se anulam p/ $t=1$, quando $i \neq n$)

2) A curva de Bézier é um invariante afim. A avaliação de uma curva comuta c/ transf. afins



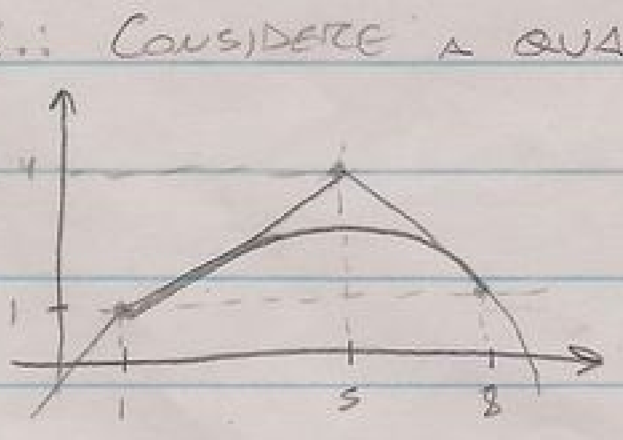
$$\phi(b_0^n(t)) = \phi\left(\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\cdot b_i\right) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\,\phi(b_i)$$

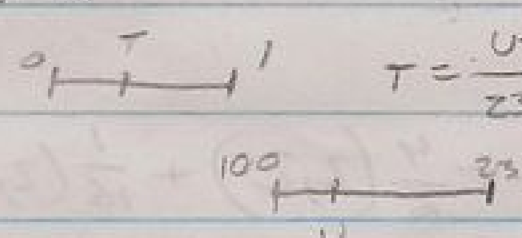
3) A curva de Bézier é invariante por transformações afins do parâmetro. (geometricamente)



$$t = \frac{u-100}{230-100} \rightarrow u = 130t + 100$$

Ex.: Considere a quadrática

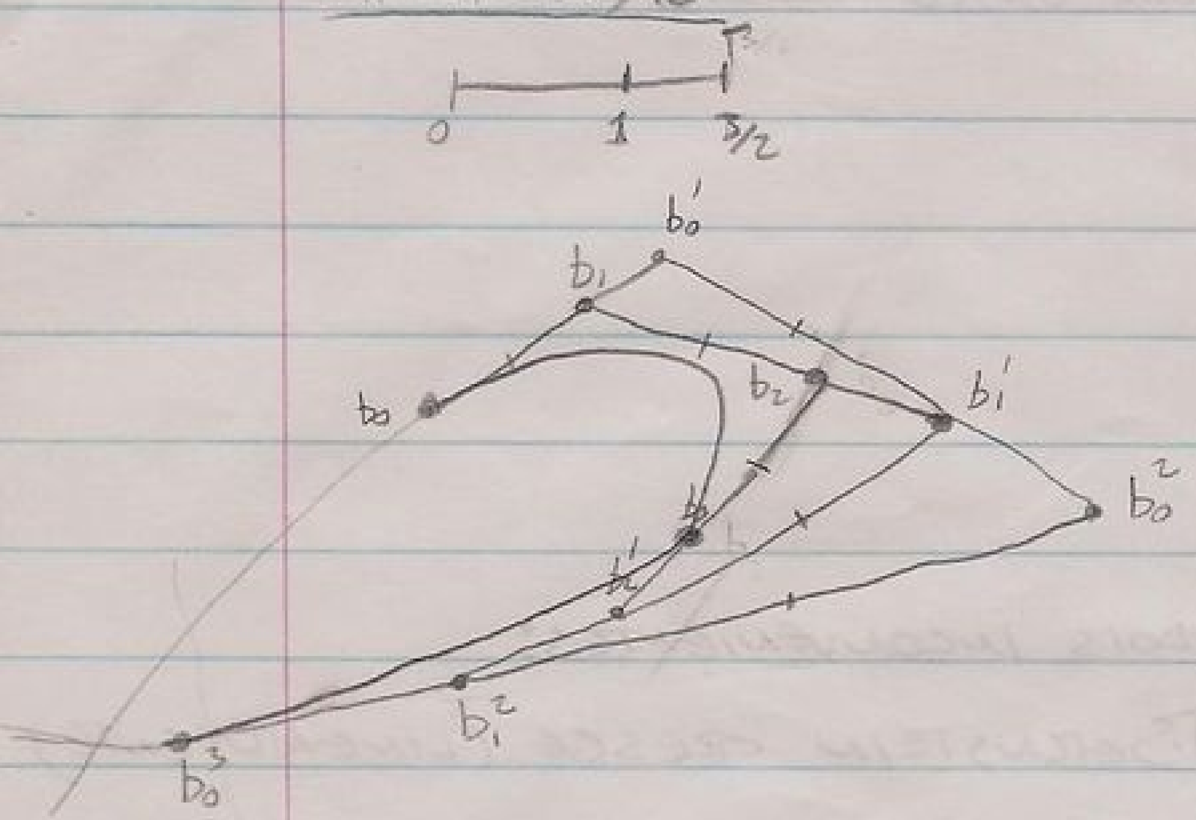




$$t = \frac{u-100}{230-100} = \frac{u-100}{130}$$

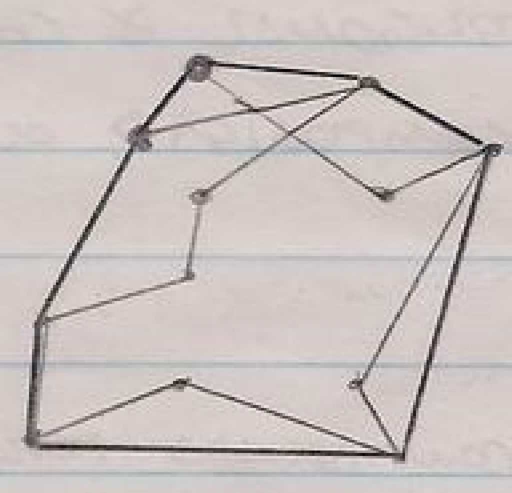
$b_0^4(u)$

EXTRAPOLAÇÃO



4) INVÓLUCRO CONVEXO: A CURVA ESTÁ CONFINADA AO INVÓLUCRO CONVEXO DOS PONTOS DE CONTROLE $(T \in [0;1])$

EX:



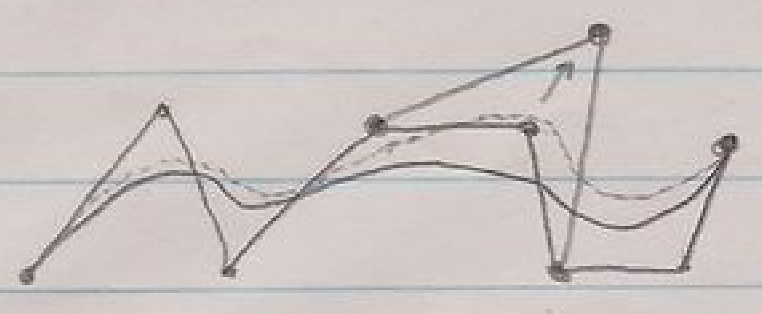
PELO ALG. DE DE CASTELJAU, C/ $T \in [0;1]$, AS OPERAÇÕES EXECUTADAS SÃO CONVEXAS, OU SEJA, CONTIDAS EM SEGMENTOS DE RETA UNINDO PONTOS DE CONTROLE, OU COMB. CONVEXAS DE PONTOS DE CONTROLE.

5) A CURVA DE BÉZIER TEM A PROPRIEDADE DA DIMINUIÇÃO DE VARIABILIDADE (A CURVA É UMA "SUAVIZAÇÃO" DA POLIGONAL DE CONTROLE)

O Nº DE INTERSEÇÕES DE UMA RETA C/ A POLIGONAL É MAIOR OU IGUAL AO Nº DE INTERSEÇÕES DA MESMA RETA C/ A CURVA DE BÉZIER

6) CONTROLE PSEUDO-LOCAL

A RECONFIGURAÇÃO DA POSIÇÃO DE UM PONTO DE CONTROLE IMPLICA NUMA MODIFICAÇÃO GLOBAL DA CURVA, MAS COM MAIS INTENSIDADE NA REGIÃO PRÓXIMA DO PONTO MUTANTE



Por ser pseudo-local, e não local, toda a curva muda com a movimentação de um único ponto

Curvas compostas

A curva de Bézier apresenta dois inconvenientes:

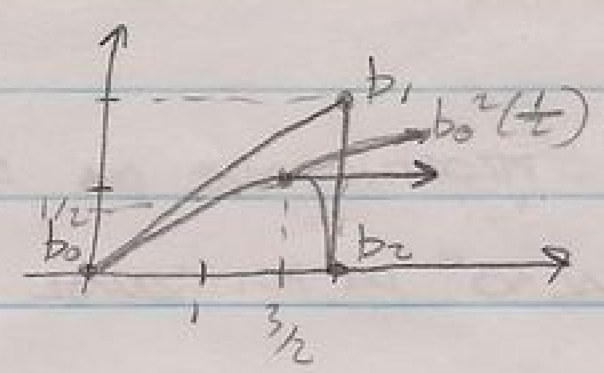
(1) O grau dos polinômios de Bernstein cresce (linearmente) com o crescimento ~~dos~~ do nº de pontos de controle

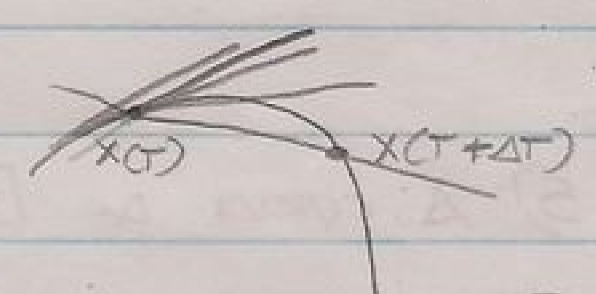
(2) Quanto maior o grau, maior a suavização, o que, em termos de "design", significa uma curva que tem a aparência menos próxima do comportamento da poligonal de controle.

Idéia: <u>splines</u>, ou seja, a junção (ou composição, ou concatenação) de curvas de mesmo grau.

Ex: Considere a curva de Bézier controlada por:

$b_0=(0,0)$, $b_1=(2,1)$ e $b_2=(2,0)$





$$X'(T) = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{1}{\Delta T}\left[X(T+\Delta T) - X(T)\right]$$

Calcule a derivada p/ $T=\frac{1}{2}$

$$b_0^2(T) = (1-T)^2 b_0 + 2(1-T)T\, b_1 + T^2 b_2$$
$$= (1-T)^2(0,0) + 2(1-T)T(2,1) + T^2(2,0)$$
$$= (4(1-T)T + 2T^2,\ 2(1-T)T) = (4T-2T^2,\ 2T-2T^2)$$

$$\frac{d\,b_0^2(T)}{dT} = (4-4T,\ 2-4T) = 2(2(1-T),\ 1-2T)$$

$$\frac{d\,b_0^2(\frac{1}{2})}{dT} = 2\left(2\cdot\tfrac{1}{2},\ 1-2\cdot\tfrac{1}{2}\right) = 2(1,0) = (2,0)$$

$$b_0^2(\tfrac{1}{2}) = \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

Derivadas de curvas de Bézier

$$b_0^N(T) = \sum_{i=0}^{N} B_i^N(T) b_i$$

$$\frac{db_0^N(T)}{dT} = \frac{d}{dT}\left(\sum_{i=0}^{N} B_i^N(T)\, b_i\right) = \sum_{i=0}^{N} \frac{d}{dT}\left[B_i^N(T)\right]\cdot b_i$$

$$B_i^N(T) = \binom{N}{i}(1-T)^{N-i}\cdot T^i$$

$$\frac{dB_i^N(T)}{dT} = \frac{d}{dT}\binom{N}{i}(1-T)^{N-i}\cdot T^i$$

$$= \binom{N}{i}\frac{d}{dT}\left[(1-T)^{N-i}\cdot T^i\right]$$

$$= \binom{N}{i}\cdot\left[(N-i)(1-T)^{N-i-1}\cdot T^i(-1) + i\cdot(1-T)^{N-i}\cdot T^{i-1}\right]$$

$$B_i^{N-1}(T) = \binom{N-1}{i}(1-T)^{N-i-1}\cdot T^i$$

$$B_{i-1}^{N-1}(T) = \binom{N-1}{i-1}(1-T)^{N-i}\, T^{i-1}$$

$$N-1-(i-1) = N-1-i+1 = N-i$$

$$= \frac{N!}{\underset{(N-i-1)}{\cancel{(N-i)!}}\, i!}\cdot\cancel{(N-i)}\cdot(1-T)^{N-i-1}\cdot T^i(-1) + \frac{N!}{(N-i)!\,\underset{(i-1)!}{\cancel{i!}}}\cdot\cancel{i}\cdot(1-T)^{N-i}\cdot T^{i-1}$$

$$= N\cdot\underbrace{\frac{(N-1)!}{(N-1-i)!\,i!}}_{=\binom{N-1}{i}}\cdot(1-T)^{N-1-i}\cdot T^i(-1) + N\underbrace{\frac{(N-1)!}{(N-i)!\,(i-1)!}}_{\binom{N-1}{i-1}}\cdot(1-T)^{N-i}\cdot T^{i-1}$$

$$= N\left[-B_i^{N-1}(T) + B_{i-1}^{N-1}(T)\right]$$

$$\frac{dB_i^N(T)}{dT} = N\left[B_{i-1}^{N-1}(T) - B_i^{N-1}(T)\right]$$

Substituindo na fórmula (*)

$$\frac{db_0^N(T)}{dT} = N\cdot\sum_{i=0}^{N}\left(B_{i-1}^{N-1}(T) - B_i^{N-1}(T)\right)\cdot b_i$$

$$= N\cdot\sum_{i=1}^{N} B_{i-1}^{N-1}(T)\, b_i - N\sum_{i=0}^{N-1} B_i^{N-1}(T)\, b_i$$

$I = i-1$; p/ $i=1$, $I=0$

$$= N\sum_{I=0}^{N-1} B_I^{N-1}(T)\, b_{I+1} - N\sum_{i=0}^{N-1} B_i^{N-1}(T)\, b_i$$

FMBM

Faça no 1º somatório, $i = I$

$$= N \cdot \sum_{i=0}^{N-1} B_i^{N-1}(T)\, b_{i+1} - N \sum_{i=0}^{N-1} B_i^{N-1}(T)\, b_i$$

$$= N \sum_{i=0}^{N-1} B_i^{N-1}(T) \underbrace{\left[b_{i+1} - b_i \right]}_{\Delta b_i}$$

$$\boxed{\frac{d b_0^N(T)}{dT} = N \cdot \sum_{i=0}^{N-1} B_i^{N-1}(T)\, \Delta b_i}$$

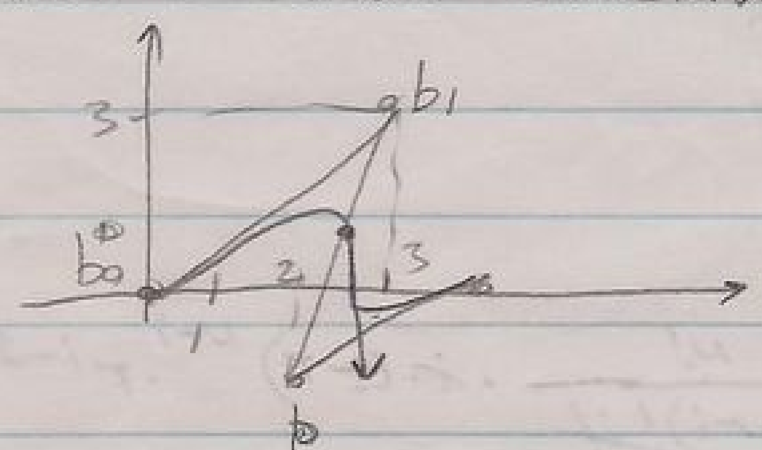
Hodografo

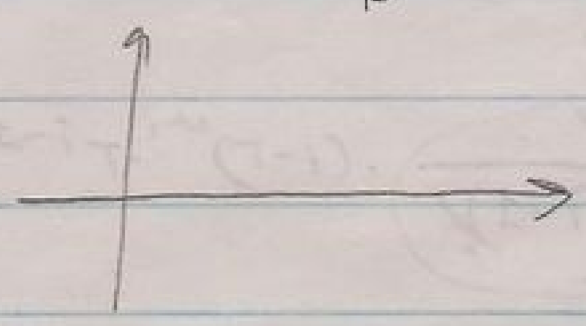
O gráfico da curva de derivada de Bézier

Ex.: Considere a curva de Bézier controlada por:

$b_0 = (0,0)$, $b_1 = (3,3)$, $b_2 = (2,-2)$ e $b_3 = (4,0)$

Encontre a curva da derivada desta curva





$\Delta b_0 = b_1 - b_0$

$(3,3) - (0,0) = (3,3)$

$\Delta b_1 = b_2 - b_1$

$(2,-2) - (3,3) = (-1,-5)$

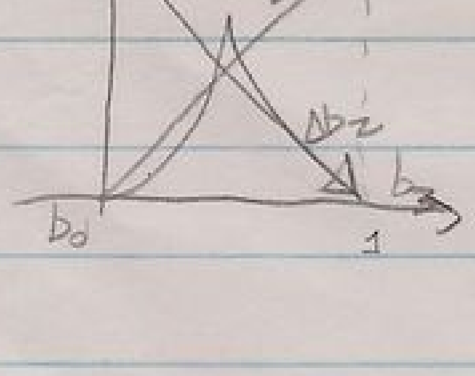
$\Delta b_2 = b_3 - b_2$

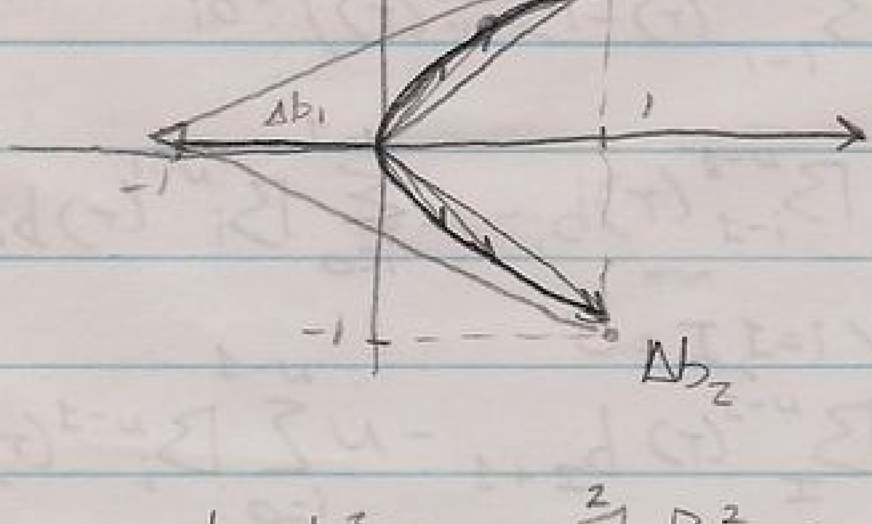
$(4,0) - (2,-2) = (2,2)$

Ex.: 08/10/2009

Considere a curva controlada por $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ e $(1,0)$ (nesta ordem).

Faça o esboço da curva de Bézier e do Hodografo, e encontre $b_0^3(\frac{1}{2})$ e $\frac{d}{dT} b_0^3(\frac{1}{2})$





Observe que agora estamos falando de vetores

$\Delta b_0 = b_1 - b_0 = (1,1) - (0,0) = (1,1)$

$\Delta b_1 = b_2 - b_1 = (0,1) - (1,1) = (-1,0)$

$\Delta b_2 = b_3 - b_2 = (1,0) - (0,1) = (1,-1)$

$$\frac{d}{dT} b_0^3(T) = 3 \cdot \sum_{i=0}^{2} B_i^2(T)\, \Delta b_i$$

08/09/2009

$\underline{b_0^3(\tfrac{1}{2})} = (1-\tfrac{1}{2})^3\cdot(0,0) + 3(1-\tfrac{1}{2})^2\tfrac{1}{2}(1,1) + 3(1-\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})^2\cdot(0,1) + (\tfrac{1}{2})^3(1,0)$

$= \tfrac{3}{8}(1,1) + \tfrac{3}{8}(0,1) + \tfrac{1}{8}(1,0)$

$\boxed{b_0^3(\tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4})}$

$\frac{d}{dT} b_0^3(\tfrac{1}{2}) = 3\left[(1-\tfrac{1}{2})^2\cdot(1,1) + 2(1-\tfrac{1}{2})\tfrac{1}{2}(-1,0) + (\tfrac{1}{2})^2\cdot(1,-1)\right] = 3\left[\tfrac{1}{4}(1,1) + \tfrac{1}{2}(-1,0) + \tfrac{1}{4}(1,-1)\right]$

$= 3\cdot(0,0) = (0,0)$

Propriedade da curva de Bézier

A curva de Bézier é tangenciada pela 1ª "perna" ($\to \vec{\Delta b_0}$) da poligonal de controle em $T=0$, e pela última "perna" ($\hookrightarrow \vec{\Delta b_{N-1}}$) ~~..~~ em $T=1$.

$$\frac{db_0^N(0)}{dT} = N\cdot\sum_{i=0}^{N-1} B_i^{N-1}(0)\Delta b_i = N\cdot\Delta b_0$$

$$\frac{db_0^N(1)}{dT} = N\cdot\sum_{i=0}^{N-1} B_i^{N-1}(1)\Delta b_i = N\cdot\Delta b_{N-1}$$

Splines: Junção de curvas de mesmo grau

↳ Geralmente quando se junta curvas, não quer que isto ocorra.

Para evitar os "bicos" nas junções, podemos utilizar a continuidade das derivadas

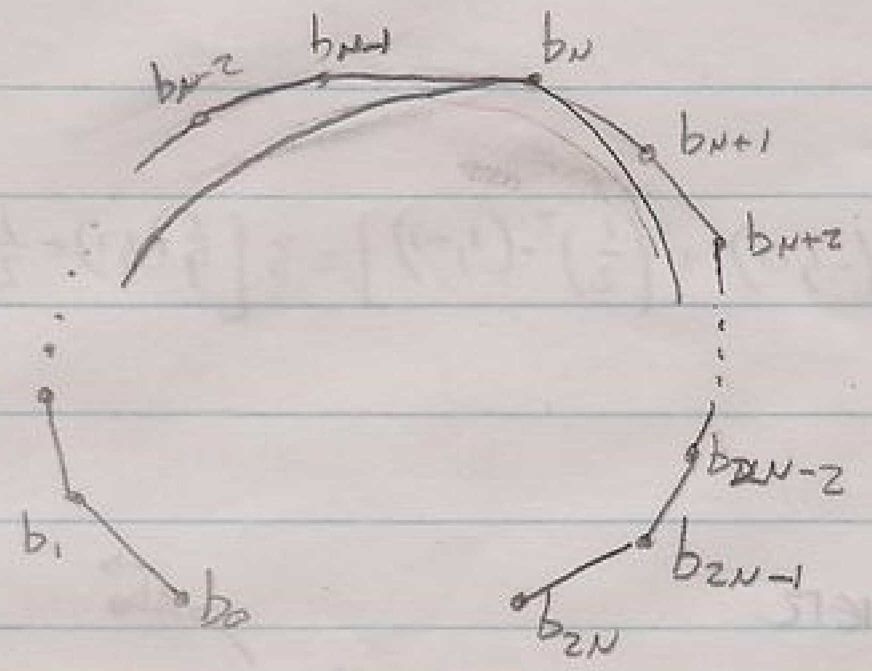
$C^k = \{$ continuamente k-deriváveis $\}$

C^1: A 1ª derivada é contínua em todos os pontos

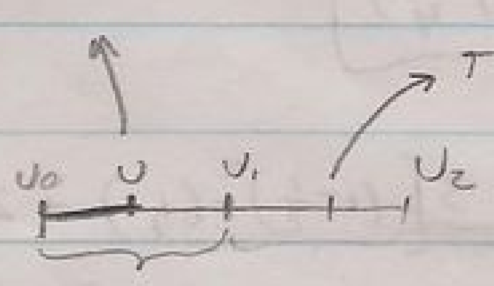
C^2: A 2ª derivada é contínua em todos os pontos

<u>Obs.</u>: Toda curva paramétrica polinomial é C^∞

VAMOS DEFINIR A JUNÇÃO DE 2 CURVAS DE GRAU N, COM SUAVIDADE C^1:



$T = \frac{U-U_0}{U_1-U_0}$ $\qquad$ $T = \frac{U-U_1}{U_2-U_1}$



$\Delta U_0 = U_1 - U_0$

$\Delta U_1 = U_2 - U_1$

P/ A 1ª CURVA: $T = \frac{U-U_0}{\Delta U_0}$

P/ A 2ª CURVA: $T = \frac{U-U_1}{\Delta U_1}$

$$S(U) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{N} B_i^N\left(\frac{U-U_0}{\Delta U_0}\right)\cdot b_i, & \text{SE } U \in [U_0, U_1] \\ \sum_{i=0}^{N} B_i^N\left(\frac{U-U_1}{\Delta U_1}\right)\cdot b_{i+N}, & \text{SE } U \in [U_1, U_2] \end{cases}$$

"U" É UMA VARIÁVEL DADA PELO USUÁRIO

PRECISAMOS CALCULAR:

$\frac{d}{dU} S(U)$ PARA $U = U_1$ QUANDO NO 1º SEGMENTO;

$\frac{d}{dU} S(U)$ P/ $U = U_1$, QUANDO NO 2º SEGMENTO.

P/ $U \in [U_0, U_1]$:

$$\frac{dS(U)}{dU}$$

$$\frac{d}{dT} S(T) = N \sum_{i=0}^{N-1} B_i^{N-1}(T)\Delta b_i \quad \text{NO 1º SEGM.}$$

$$\frac{dS}{dU} = \frac{dS}{dT}\cdot\frac{dT}{dU}$$

$$T(U) = \frac{U' - U_0}{\Delta U_0} = \frac{1}{\Delta U_0} U' - \frac{U_0}{\Delta U_0}$$

$$\frac{dT}{dU} = \frac{1}{\Delta U_0}$$

$$\frac{dS}{dU} = \frac{dS}{dT}\cdot\frac{dT}{dU} = N\cdot\sum_{i=0}^{N-1} B_i^{N-1}\left(\frac{U-U_0}{\Delta U_0}\right)\Delta b_i \cdot \frac{1}{\Delta U_0}$$

P/ $U \in [U_1, U_2]$ $\qquad$ $T(U) = \frac{U-U_1}{\Delta U_1}$

$$\frac{d}{dT} S(U) = N \sum_{i=0}^{N-1} B_i^{N-1}\left(\frac{U-U_1}{\Delta U_1}\right)\Delta b_{i+N}\cdot\frac{1}{\Delta U_1}$$

U=U1 NOS DOIS CASOS:

P/ $U \in [U_0, U_1]$:

$$\frac{dS}{dT}(u_1) = \frac{N}{\Delta U_0} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} B_i^{N-1}(1)\Delta b_i = \boxed{\frac{N}{\Delta U_0}\Delta b_{N-1}}$$

P/ $U \in [U_1, U_2]$:

$$\frac{dS}{dT}(u_1) = \frac{N}{\Delta U_1} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} B_i^{N-1}(0)\Delta b_{i+N} = \boxed{\frac{N}{\Delta U_1} \cdot \Delta b_N}$$

A CONDIÇÃO C_1 SE TORNA:

$$\frac{\cancel{N}}{\Delta U_0}\Delta b_{N-1} = \frac{\cancel{N}}{\Delta U_1}\Delta b_N$$

$$\boxed{\frac{1}{\Delta U_0}\Delta b_{N-1} = \frac{1}{\Delta U_1}\Delta b_N}$$

CONCLUÍMOS QUE OS PONTOS b_{N-1}, b_N E b_{N+1} SÃO COLINEARES

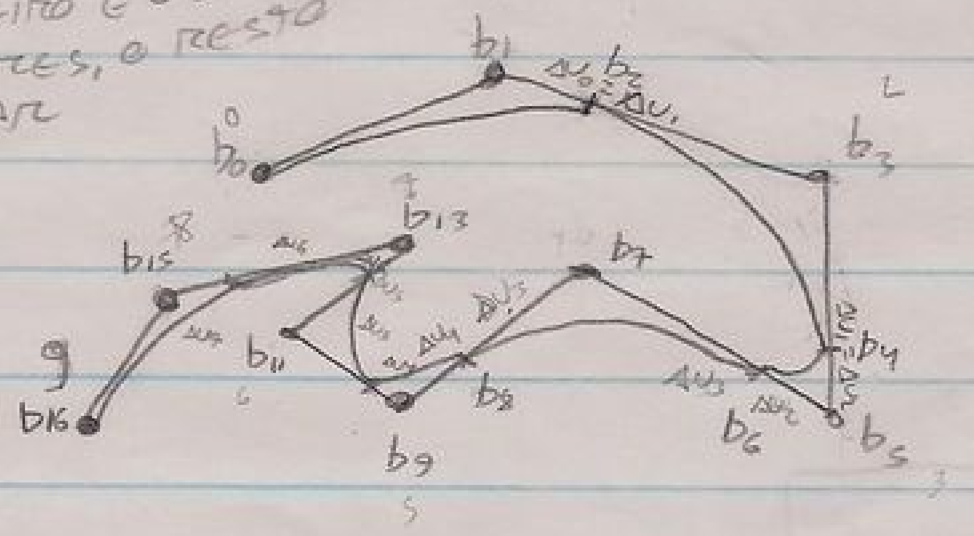
$$\left\|\frac{1}{\Delta U_0}\Delta b_{N-1}\right\| = \left\|\frac{1}{\Delta U_1}\Delta b_N\right\|$$

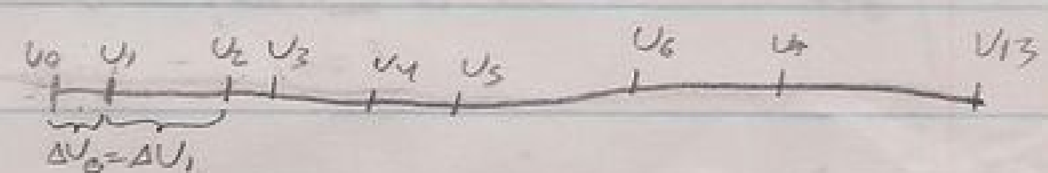
$$\frac{1}{\Delta U_0}\|\Delta b_{N-1}\| = \frac{1}{\Delta U_1}\|\Delta b_N\|$$

$$\frac{\|\Delta b_{N-1}\|}{\|\Delta b_N\|} = \frac{\Delta U_0}{\Delta U_1}$$

CURVA SPLINES QUADRÁTICAS C^1 (B-SPLINES QUADRÁTICA)

O PRIMEIRO E O ÚLTIMO SÃO PARES, O RESTO É ÍMPAR





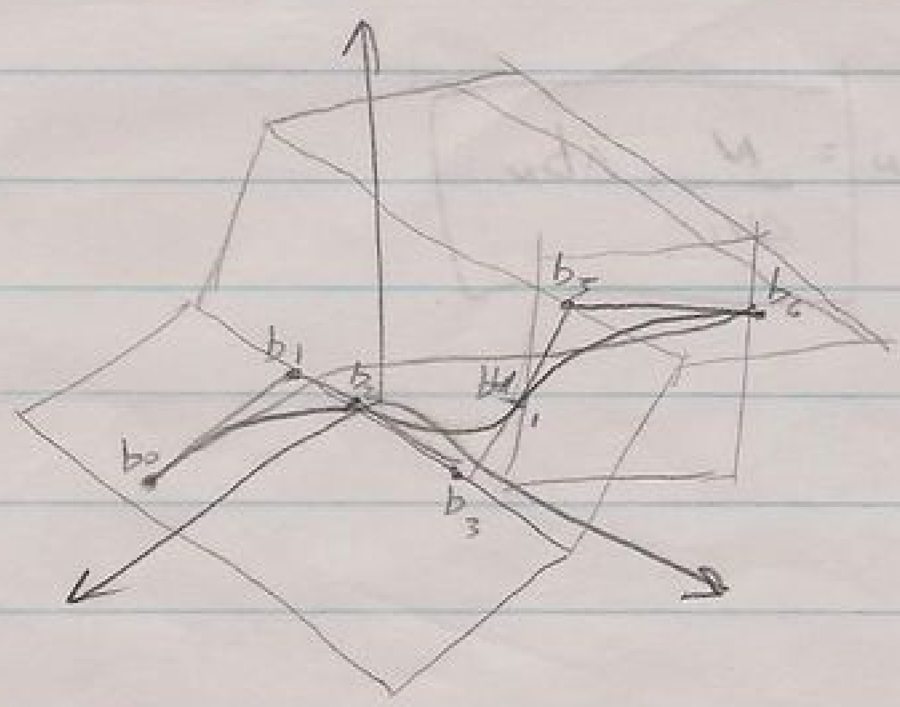
$$b_2 = \frac{\Delta U_0}{\Delta U_0 + \Delta U_1} b_3 + \frac{\Delta U_1}{\Delta U_0 + \Delta U_1} b_1$$

O USUÁRIO ENTRA C/:

$$\begin{cases} b_0,\ b_{2i+1}, & i = 0, 1, \ldots, L-1 \\ b_{2L} \end{cases}$$

E PARAMETRIZAÇÃO: $U_0, U_1, \ldots, U_L$

$$b_{2i} = \frac{\Delta U_{i-1}}{\Delta U_{i-1}+\Delta U_i}\, b_{2i+1} + \frac{\Delta U_i}{\Delta U_{i-1}+\Delta U_i}\, b_{2i-1}$$



Segunda derivada:

Derivando a 1ª derivada

$$\frac{d^2}{dT^2} b_0^N(T) = \frac{d}{dT}\left[\frac{d}{dT} b_0^N(T)\right]$$

$$= \frac{N\,d}{dT}\left[\sum_{i=0}^{N-1} B_i^{N-1}(T)\,\Delta b_i\right]$$

$$= N(N-1)\sum_{i=0}^{N-2} B_i^{N-2}(T)\,[\underbrace{\Delta b_{i+1} - \Delta b_i}_{\Delta^2 b_i}]$$

$$\Delta^2 b_i = \Delta b_{i+1} - \Delta b_i$$

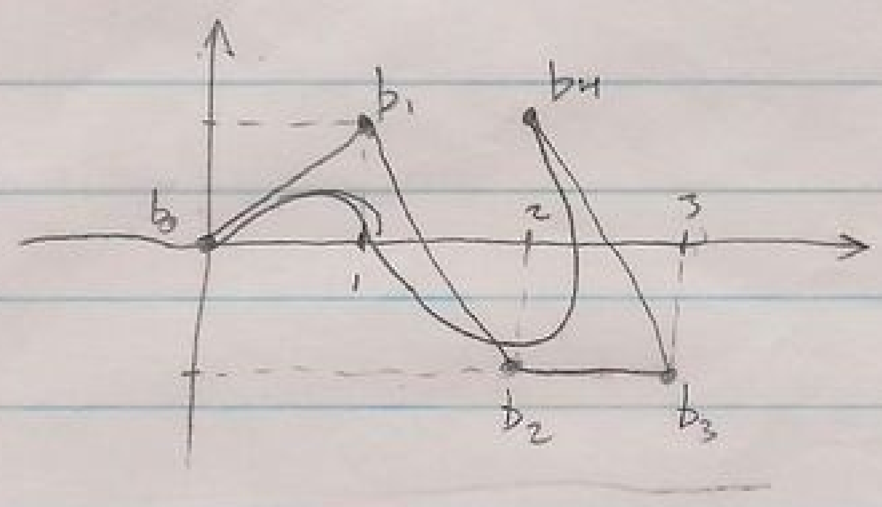
$$\boxed{\frac{d^2}{dT^2} b_0^N(T) = N(N-1)\sum_{i=0}^{N-2} B_i^{N-2}(T)\,\Delta^2 b_i}$$

P/ qualquer ordem

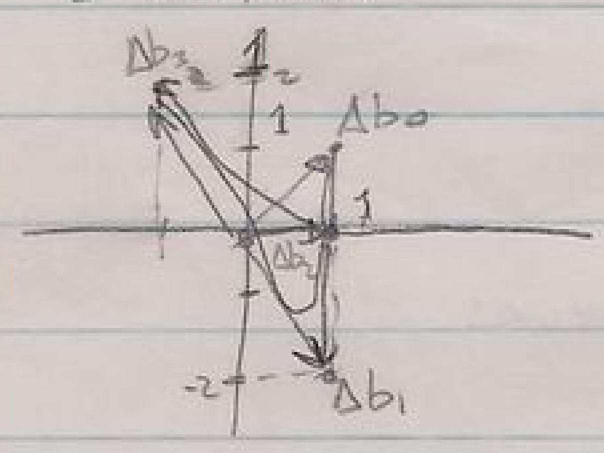
$$\Delta^r b_i = \Delta^{r-1} b_{i+1} - \Delta^{r-1} b_i$$

$$\boxed{\frac{d^R}{dT^R} b_0^N(T) = \frac{N!}{(N-R)!}\sum_{i=0}^{N-R} B_i^{N-R}(T)\,\Delta^R b_i}$$

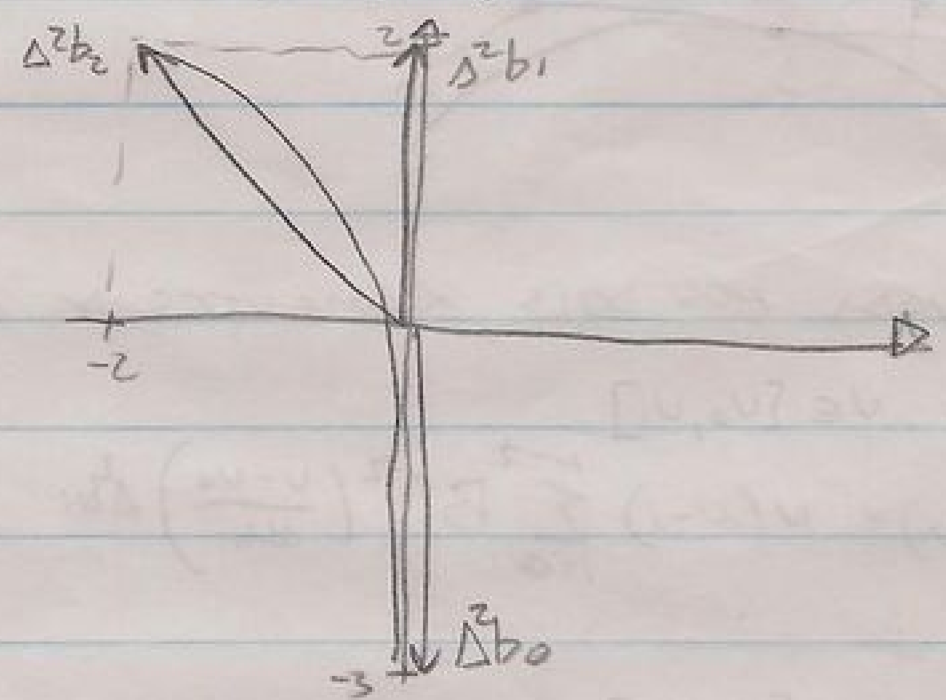
Ex.: DESENHE TODAS AS CURVAS DE DERIVADAS DA SEGUINTE CURVA DE BÉZIER:



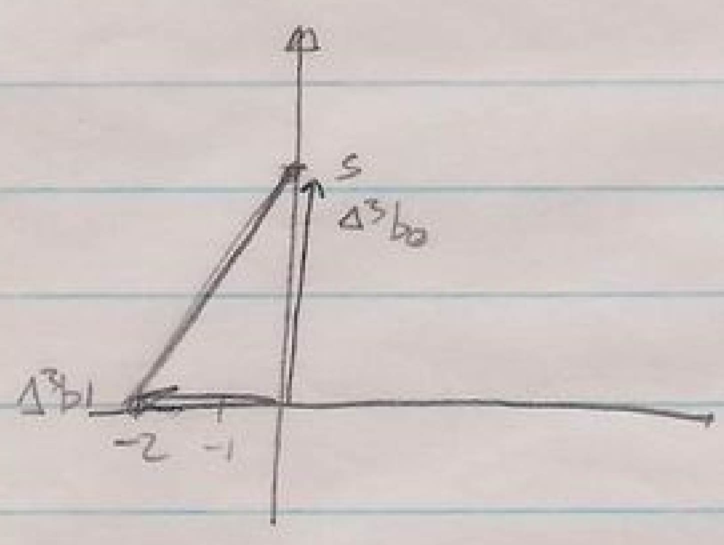
1ª DERIVADA



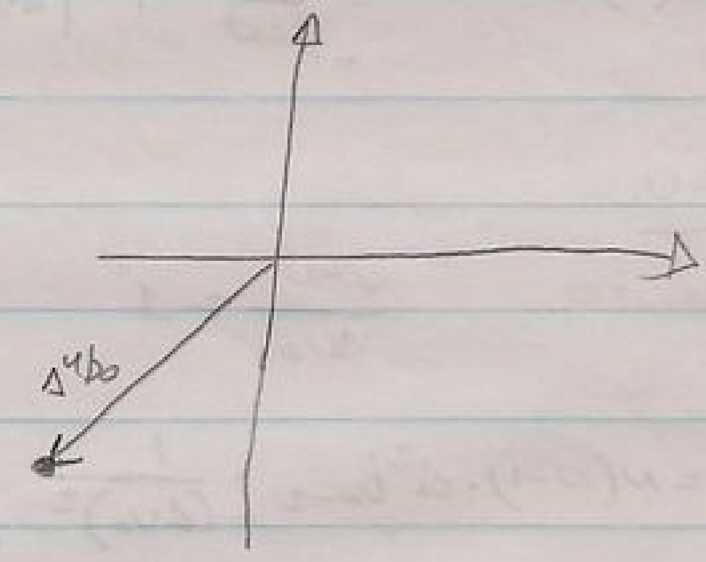
2ª DERIVADA



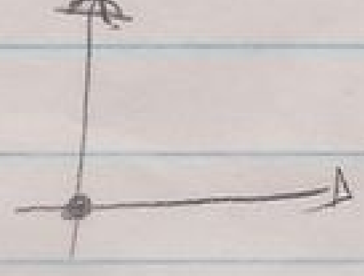
3ª DERIVADA



4ª DERIVADA



DA 5ª EM DIANTE



II UNIDADE

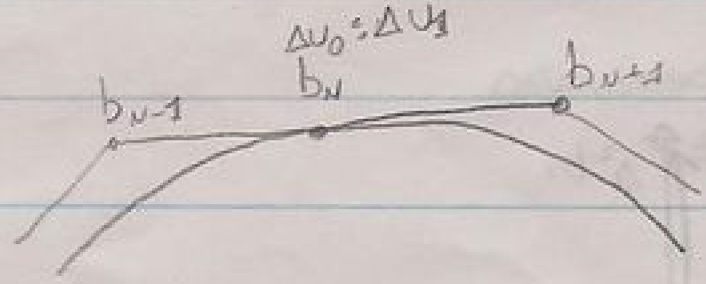
22/10/2009

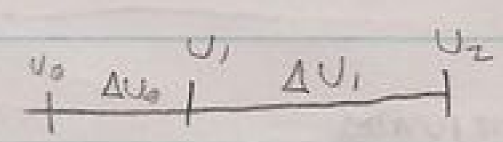
CURVA SPLINES C^2

CONSIDERE A CURVA COMPOSTA:

$$S(u) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{N} B_i^N\left(\frac{u-u_0}{\Delta u_0}\right) b_i, & \text{SE } u \in [u_0, u_1] \\ \sum_{i=0}^{N} B_i^N\left(\frac{u-u_1}{\Delta u_1}\right) b_{i+N}, & \text{SE } u \in [u_1, u_2] \end{cases}$$

SUPONHA QUE S É C^1





SEGUNDA DERIVADA NOS DOIS SEGMENTOS DE CURVA:

1º SEGMENTO $u \in [u_0, u_1]$

$$\frac{d^2}{du^2} S(u) = N(N-1) \sum_{i=0}^{N-2} B_i^{N-2}\left(\frac{u-u_0}{\Delta u_0}\right) \Delta^2 b_i$$

2º SEGMENTO $u \in [u_1, u_2]$

$$\frac{d^2}{du^2} S(u) = N(N-1) \sum_{i=0}^{N-2} B_i^{N-2}\left(\frac{u-u_1}{\Delta u_1}\right) \Delta^2 b_{i+N}$$

FAZENDO $u = u_1$

1º SEGMENTO $\frac{u-u_0}{\Delta u_0} = 1$

$$\frac{d^2}{du^2} S(u) = N(N-1) \cdot \Delta^2 b_{N-2} \cdot \frac{1}{(\Delta u_0)^2}$$

2º SEGMENTO $\frac{u-u_1}{\Delta u_1} = 0$

$$\frac{d^2}{du^2} S(u) = N(N-1) \cdot \Delta^2 b_N \cdot \frac{1}{(\Delta u_1)^2}$$

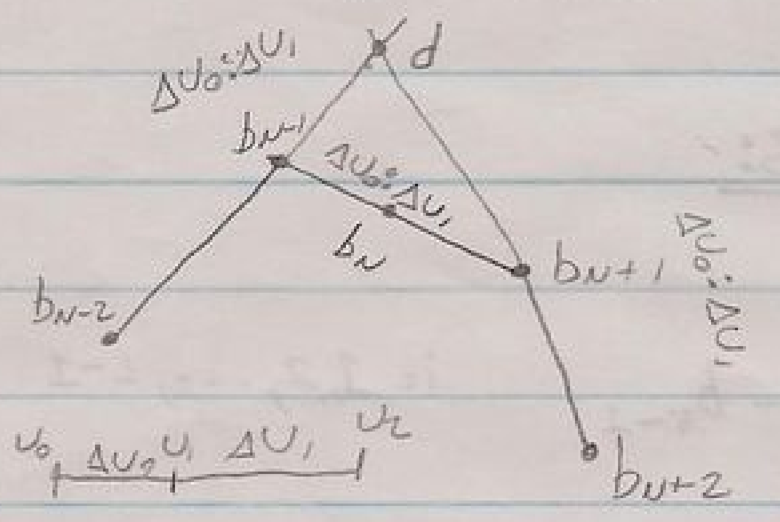
IGUALANDO: $\cancel{N(N-1)} \cdot \frac{1}{\Delta u_0^2} \Delta^2 b_{N-2} = \cancel{N(N-1)} \frac{1}{\Delta u_1^2} \Delta^2 b_N$

22/10/2009

CONDIÇÃO C^2:

$$\boxed{\frac{1}{\Delta U_0^2}\underbrace{\Delta^2 b_{N-2}} = \frac{1}{\Delta U_1^2}\Delta^2 b_N}$$

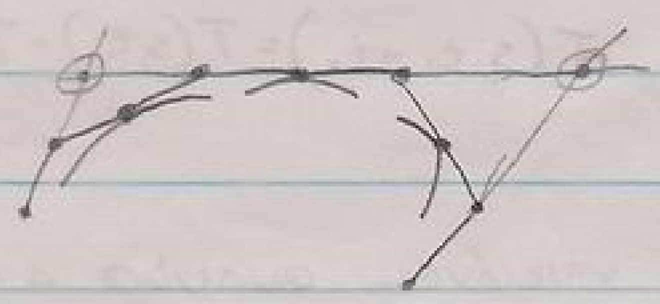
$$\Delta^2 b_{N-2} = \Delta b_{N-1} - \Delta b_{N-2}$$
$$= b_N - b_{N-1} - b_{N-1} + b_{N-2}$$
$$= b_N - 2b_{N-1} + b_{N-2}$$
$$\Delta^2 b_N = b_{N+2} - 2b_{N+1} + b_N$$



NO GERAL, CONDIÇÃO C^K:

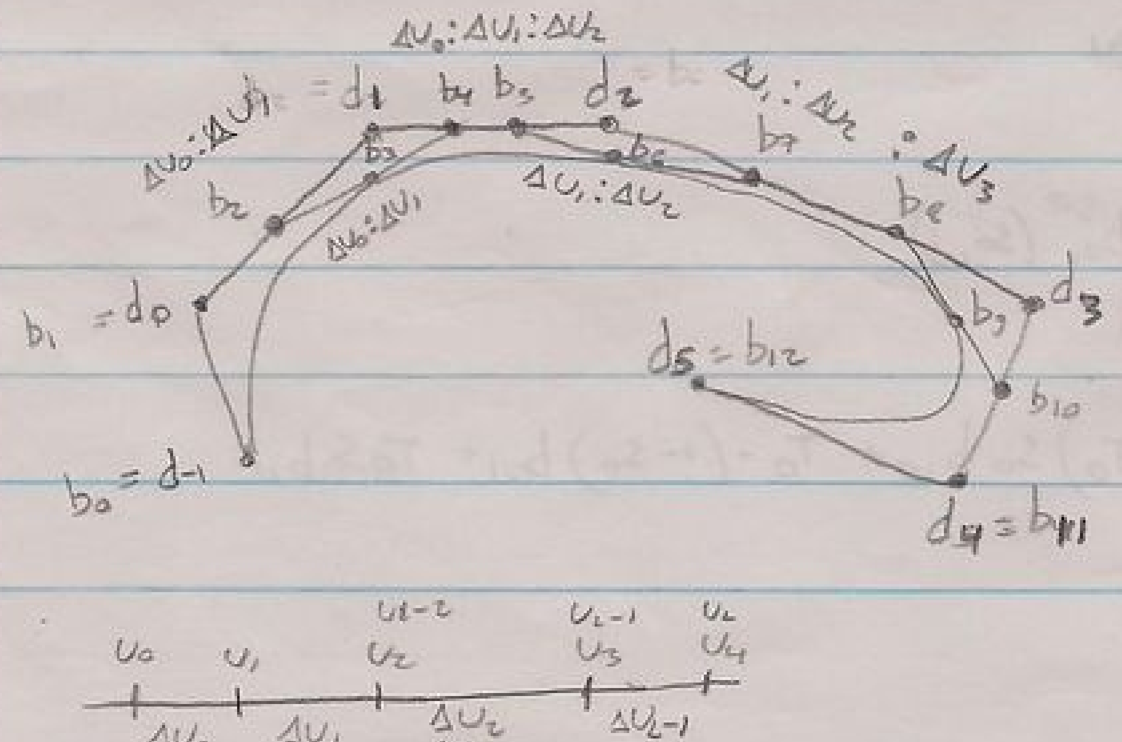
$$\boxed{\frac{1}{\Delta U_0^K}\Delta^K b_{N-K} = \frac{1}{\Delta U_1^K}\Delta^K b_N}$$

B-SPLINES CÚBICA (C^2)



DADOS: $\begin{cases} d_{-1}, d_0, d_1, \dots, d_{L+1} \\ u_0, u_1, \dots, u_L \end{cases}$

SAÍDA: $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{3L}$



NO INÍCIO E NO FIM:

$b_0 = d_{-1}$

$b_1 = d_0$

$$b_2 = \frac{\Delta U_0}{\Delta U_0 + \Delta U_1} \cdot d_1 + \frac{\Delta U_1}{\Delta U_0 + \Delta U_1} \cdot d_0$$

$b_{3L} = d_{L+1}$

$b_{3L-1} = d_L$

$$b_{3L-2} = \frac{\Delta U_{L-2}}{\Delta U_{L-2} + \Delta U_{L-1}} \cdot d_L + \frac{\Delta U_{L-1}}{\Delta U_{L-2} + \Delta U_{L-1}} \cdot d_{L-1}$$

22/10/09

PONTOS QUE ESTÃO NOS SEGMENTOS

$$b_{3i+1} = \frac{\Delta U_{i-1}}{\Delta U_{i-1} + \Delta U_i + \Delta U_{i+1}} \cdot d_{i+1} + \frac{\Delta U_i + \Delta U_{i+1}}{\Delta U_{i-1} + \Delta U_i + \Delta U_{i+1}} \cdot d_i$$

$$b_{3i+2} = \frac{\Delta U_{i-1} + \Delta U_i}{\Delta U_{i-1} + \Delta U_i + \Delta U_{i+1}} \cdot d_{i+1} + \frac{\Delta U_{i+1}}{\Delta U_{i-1} + \Delta U_i + \Delta U_{i+1}} \cdot d_i$$

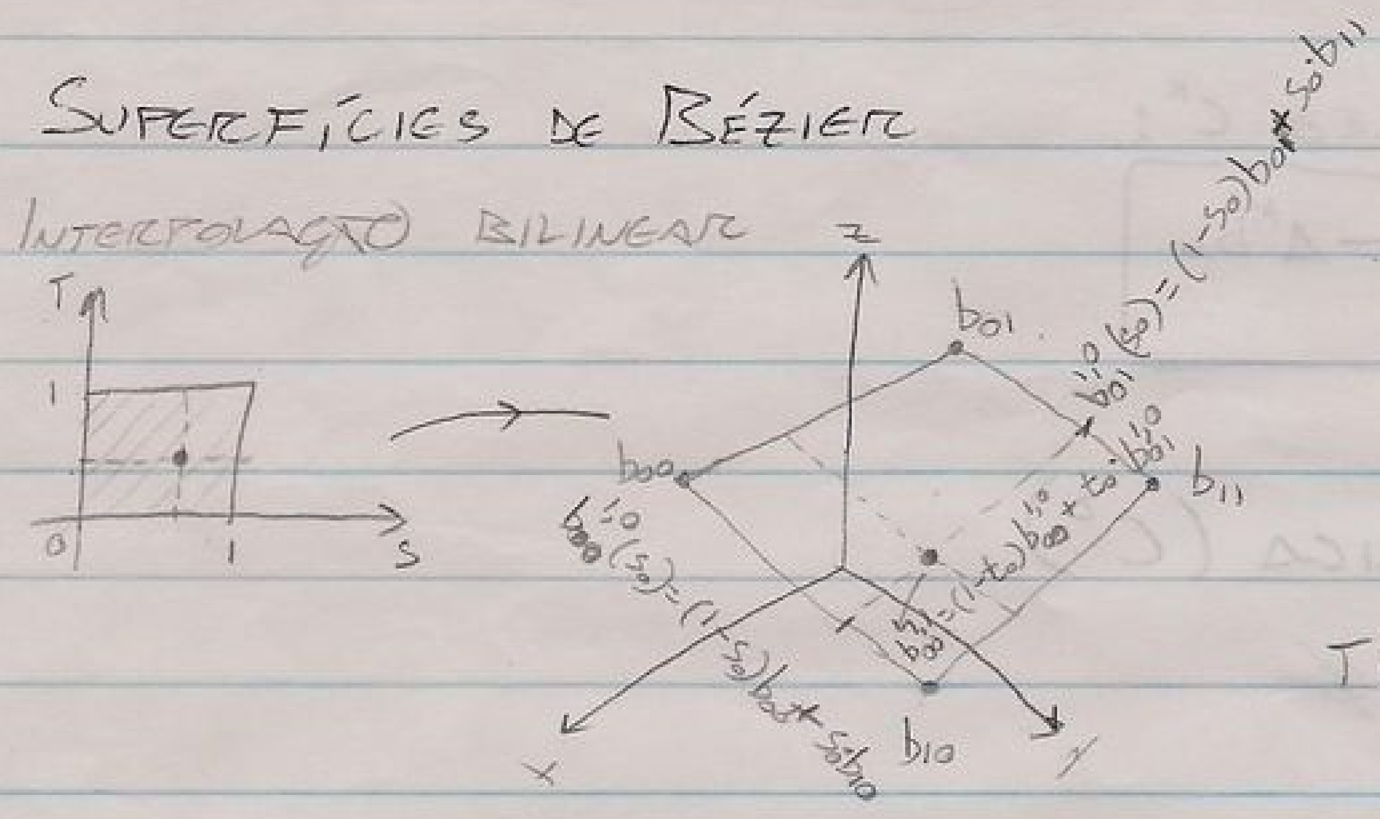
$i = 1, 2, \dots, L-2$

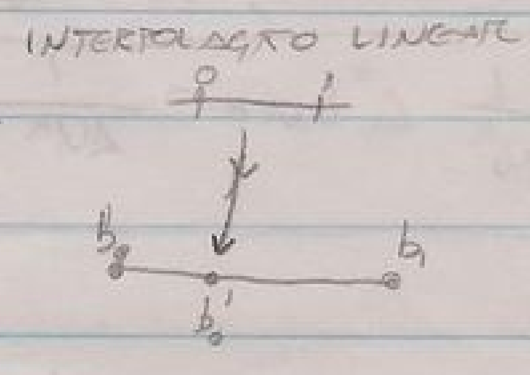
PONTOS C/ ÍNDICES MÚLTIPLOS DE 3:

$$b'_{3i} = \frac{\Delta U_{i-1}}{\Delta U_{i-1} + \Delta U_i} \cdot b_{3i+1} + \frac{\Delta U_i}{\Delta U_{i-1} + \Delta U_i} b_{3i-1} \qquad i = 1, 2, \dots, L-1$$

SUPERFÍCIES DE BÉZIER

INTERPOLAÇÃO BILINEAR





$$T(s, t_1 + t_2) = T(s, t_1) + T(s, t_2)$$

A INTERPOLAÇÃO BILINEAR É LINEAR NUMA VARIÁVEL QUANDO A OUTRA É FEITA CONSTANTE

SÃO 2 PASSOS P/ ENCONTRARMOS O PONTO CORRESPONDENTE A (s_0, t_0):

1º $\begin{cases} b^{1,0}_{00}(s_0) = b^{1,0}_{00}(s_0, 0) = (1-s_0)\,b_{00} + s_0 \cdot b_{10} \\ b^{1,0}_{01}(s_0) = b^{1,0}_{01}(s_0, 1) = (1-s_0)\,b_{01} + s_0 \cdot b_{11} \end{cases}$

2º $b^{1,1}_{00}(s_0, t_0) = (1-t_0)\,b^{1,0}_{00}(s_0, 0) + t_0 \cdot b^{1,0}_{01}(s_0, 1)$

SUBSTITUINDO:

$$b^{1,1}_{00}(s_0, T_0) = (1-T_0)(1-s_0)\,b_{00} + (1-T_0)\,s_0\,b_{10} + T_0 \cdot (1-s_0)\,b_{01} + T_0 s_0 b_{11}$$

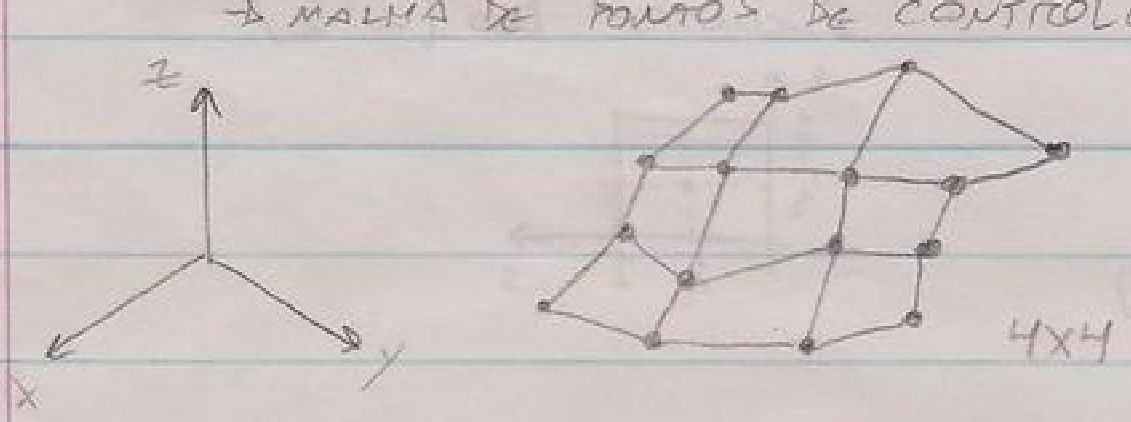
22/10/2009

Esta interpolação pode também ser obtida c/ uma interpolação nas arestas: $b_{00} b_{01}$ e $b_{10} b_{11}$ (s fixo), seguida de uma interpolação na outra direção

A superfície produzida por um interpolação bilinear é uma quádrica, e mais especificamente, um parabolóide hiperbólico.

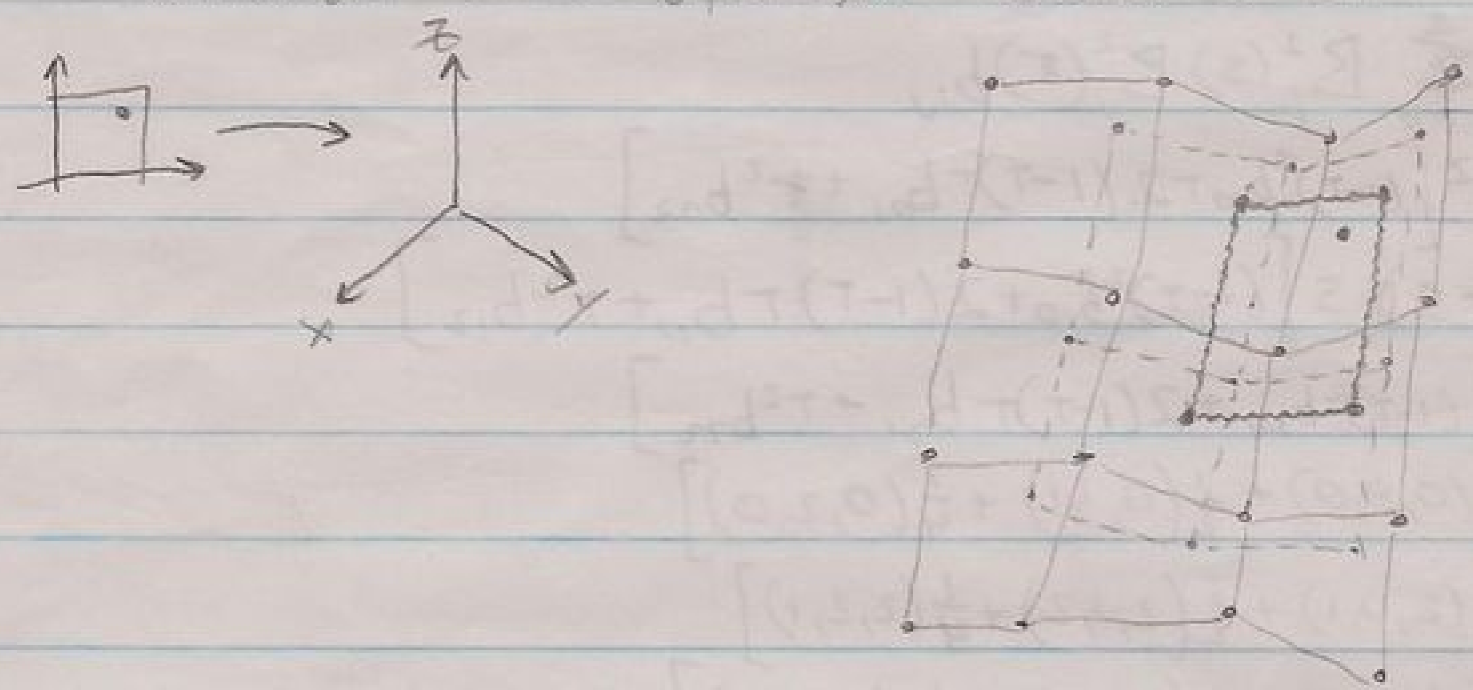
Superfícies de Bézier

→ malha de pontos de controle, com estrutura retangular



Algoritmo de De Casteljau p/ superfícies:

• utiliza como operação básica a interpolação bilinear



O algoritmo direto de De Casteljau consiste em aplicar interpolações bilineares em cada 4 pontos adjacentes da malha, de forma iterativa, até sobrar um último quadrilátero, dentro do qual se encontra o ponto correspondente aos valores de parâmetro.

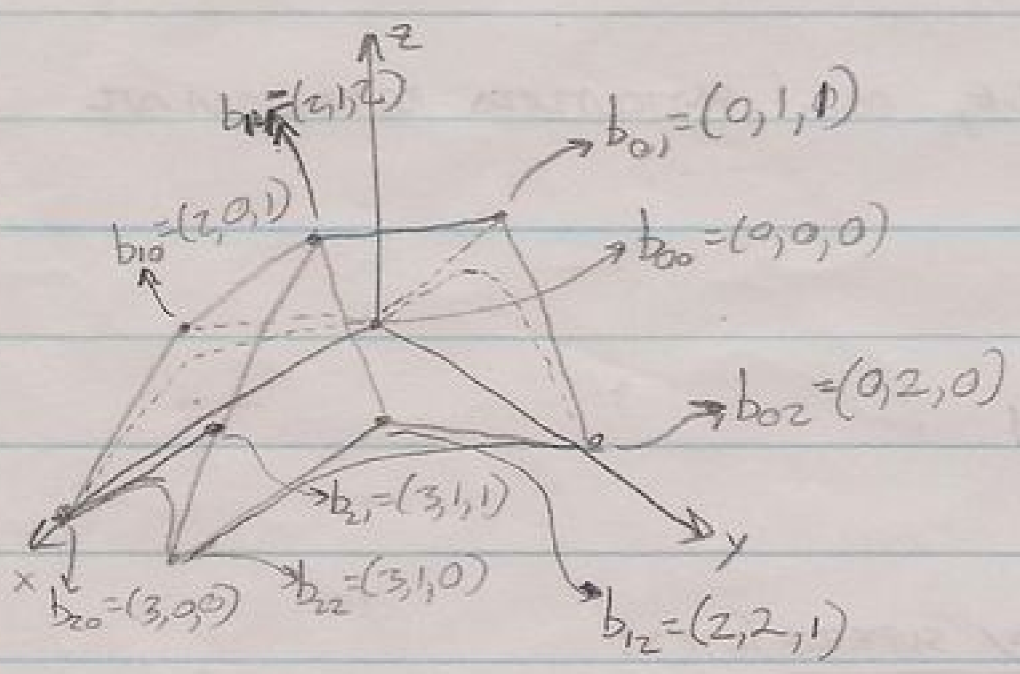
No caso de uma malha com grau $M \times N$ [$(M+1)$ pontos por $(N+1)$ pontos] onde $M \neq N$, então a malha intermediária num certo nível do algoritmo irá se degenerar a uma poligonal; a partir desse ponto o algoritmo continuará se comportando como o alg. de De Casteljau p/ curvas

29/10/2009

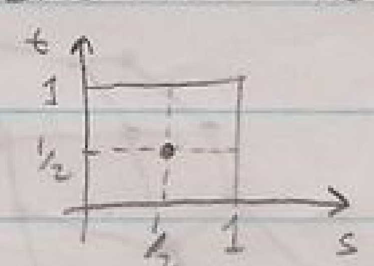
Superfícies de Bézier

A expressão geral de uma superfície de Bézier pode ser obtido de forma semelhante à de curvas de Bézier, com substituição dos pontos intermediários e indução

$$b_{00}^{N,N}(s,t) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} B_i^N(s)\, B_j^N(t)\, b_{ij}$$



Encontre $b_{00}^{2,2}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$



$$\begin{aligned}
b_{00}^{2,2}(s,t) &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} B_i^2(s)\, B_j^2(t)\, b_{ij} \\
&= (1-s)^2\left[(1-t)^2 b_{00} + 2(1-t)t\, b_{01} + t^2 b_{02}\right] \\
&\quad + 2(1-s)s\left[(1-t)^2 b_{10} + 2(1-t)t\, b_{11} + t^2 b_{12}\right] \\
&\quad + s^2\left[(1-t)^2 b_{20} + 2(1-t)t\, b_{21} + t^2 b_{22}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{00}^{2,2}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{4}(0,0,0) + \tfrac{1}{2}(0,1,1) + \tfrac{1}{4}(0,2,0)\right] \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{4}(2,0,1) + \tfrac{1}{2}(2,1,2) + \tfrac{1}{4}(2,2,1)\right] \\
&\quad + \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{4}(3,0,0) + \tfrac{1}{2}(3,1,1) + \tfrac{1}{4}(3,1,0)\right]
\end{aligned}$$

$$b_{00}^{2,2}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{7}{4}, \tfrac{15}{16}, 1\right)$$

Podemos considerar graus distintos nas duas direções

$$b_{00}^{N,M}(s,t) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} B_i^N(s)\, B_j^M(t)\, b_{ij}$$

Pois a fórmula é separável c/ relação a s e a t

Se $M > N$ então executa-se o De Casteljau direto c/ interpolações bilineares até nível N, e depois executa-se De Casteljau de curva até o nível $M-N$ na direção correspondente a M.

Propriedades da superfície de Bézier

A maioria destas propriedades seguem das propriedades de curvas de Bézier

(1) A superfície de Bézier interpola os quatro pontos extremos: b_{00}, b_{N0}, b_{0M} e b_{NM}

$$b_{00}^{N,N}(0,0) = b_{00}$$

$$b_{00}^{N,N}(0,1) = b_{0M}$$

$$b_{00}^{N,N}(1,0) = b_{N0}$$

$$b_{00}^{N,N}(1,1) = b_{NM}$$

(2) A superfície de Bézier interpola as curvas de Bézier de borda

$$b_{00}^{N,M}(0,T) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{J=0}^{M} B_i^N(0)\, B_J^M(T)\, b_{iJ}$$

$$b_{00}^{N,M}(0,T) = \sum_{J=0}^{M} B_J^M(T)\, b_{0J}$$

De forma semelhante:

$$b_{00}^{N,M}(1,T) = \sum_{J=0}^{M} B_J^M(T)\, b_{NJ}$$

$$b_{00}^{N,M}(S,0) = \sum_{i=0}^{N} B_i^N(S)\, b_{i0}$$

$$b_{00}^{N,M}(S,1) = \sum_{i=0}^{N} B_i^N(S)\, b_{iM}$$

(3) A superfície de Bézier está confinada no invólucro convexo da malha de controle $(S,T \in [0,1])$

A interpolação bilinear é convexa

(4) A superfície de Bézier é invariante afim. Avaliação de De Casteljau comuta com transf. afins.

Se ϕ é uma T. afim:

$$\phi\left(b_{00}^{N,M}(S,T)\right) = \phi\left(\sum_{i=0}^{N} \sum_{J=0}^{M} B_i^N(S)\, B_J^M(T)\, b_{iJ}\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{N} \sum_{J=0}^{M} B_i^N(S)\, B_J^M(T)\, \phi(b_{iJ})$$

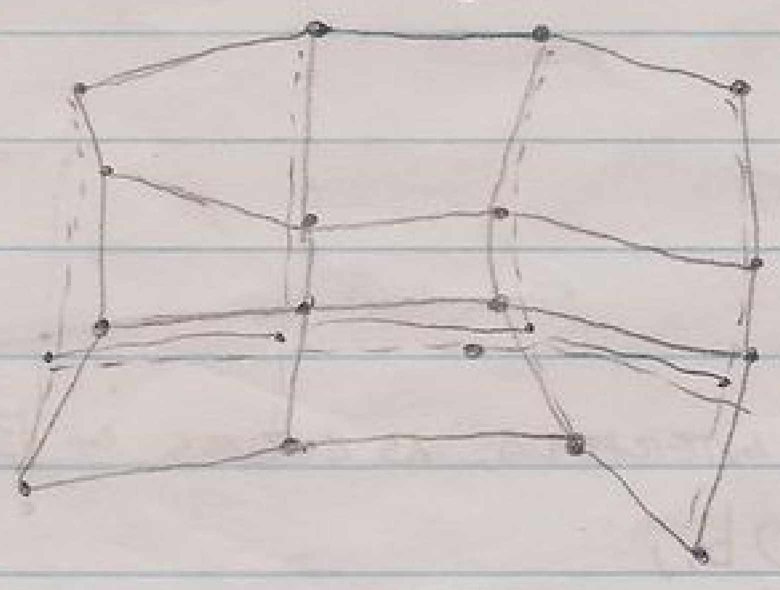
Outras propriedades:

(i) Controle pseudo-local

(ii) Invariância por transf. afim de parâmetro (bom p/ splines)

Algoritmo de De Casteljau tensorial

$$b_{00}^{n,m}(s,t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(s)\left[\sum_{j=0}^{m} B_j(t)\, b_{ij}\right]$$



O algoritmo de De Casteljau tensorial avalia primeiro as poligonais de controle numa direção c/ um parâmetro, e depois, c/ os resultados desse primeiro passo, avalia a curva na outra direção, c/ o segundo parâmetro

Derivadas parciais de superfícies de Bézier

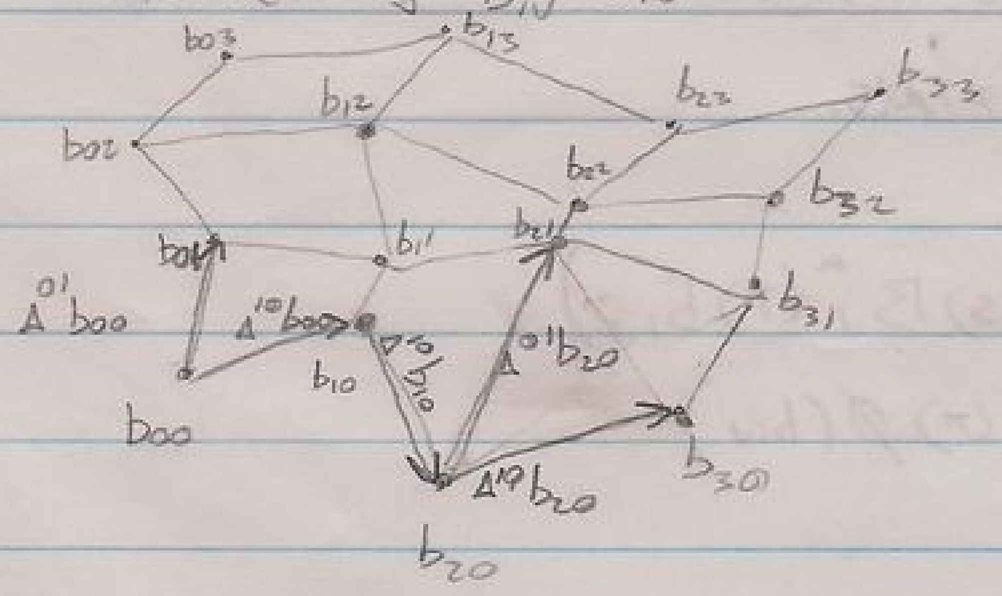
$$\Delta^{r,s} b_{ij} = \Delta^{r-1,s} b_{i+1\,j} - \Delta^{r-1,s} b_{ij}$$

$$\Delta^{r,s} b_{ij} = \Delta^{r,s-1} b_{i\,j+1} - \Delta^{r,s-1} b_{ij}$$

Ex.:

$$\Delta^{1,1} b_{ij} = \Delta^{0,1} b_{i+1\,j} - \Delta^{0,1} b_{ij}$$

Por def. $\Delta^{0,0} b_{ij} = b_{ij}$



$$\Delta^{1,0} b_{00} = \Delta^{0,0} b_{10} - \Delta^{0,0} b_{00} = b_{10} - b_{00}$$

$$\Delta^{1,0} b_{10} = b_{20} - b_{10}$$

$$\Delta^{0,1} b_{00} = b_{01} - b_{00}$$

$$\frac{\partial b_{00}^{N,M}}{\partial s}(s,t) = N \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M} B_i^{N-1}(s)\, B_j^{M}(t)\, \Delta^{1,0} b_{ij}$$

$$\frac{\partial b_{00}^{N,M}}{\partial t}(s,t) = M \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M-1} B_i^{N}(s)\, B_j^{M-1}(t)\, \Delta^{0,1} b_{ij}$$

DERIVADAS DE MAIS ALTA ORDEM

$$\frac{\partial^{P+Q}}{\partial s^P \partial t^Q} b_{00}^{N,M}(s,t) = \frac{(N-P)!}{P!} \cdot \frac{(M-Q)!}{Q!} \sum_{i=0}^{N-P}\sum_{j=0}^{M-Q} B_i^{N-P}(s)\, B_j^{M-Q}(t)\, \Delta^{P,Q} b_{ij}$$

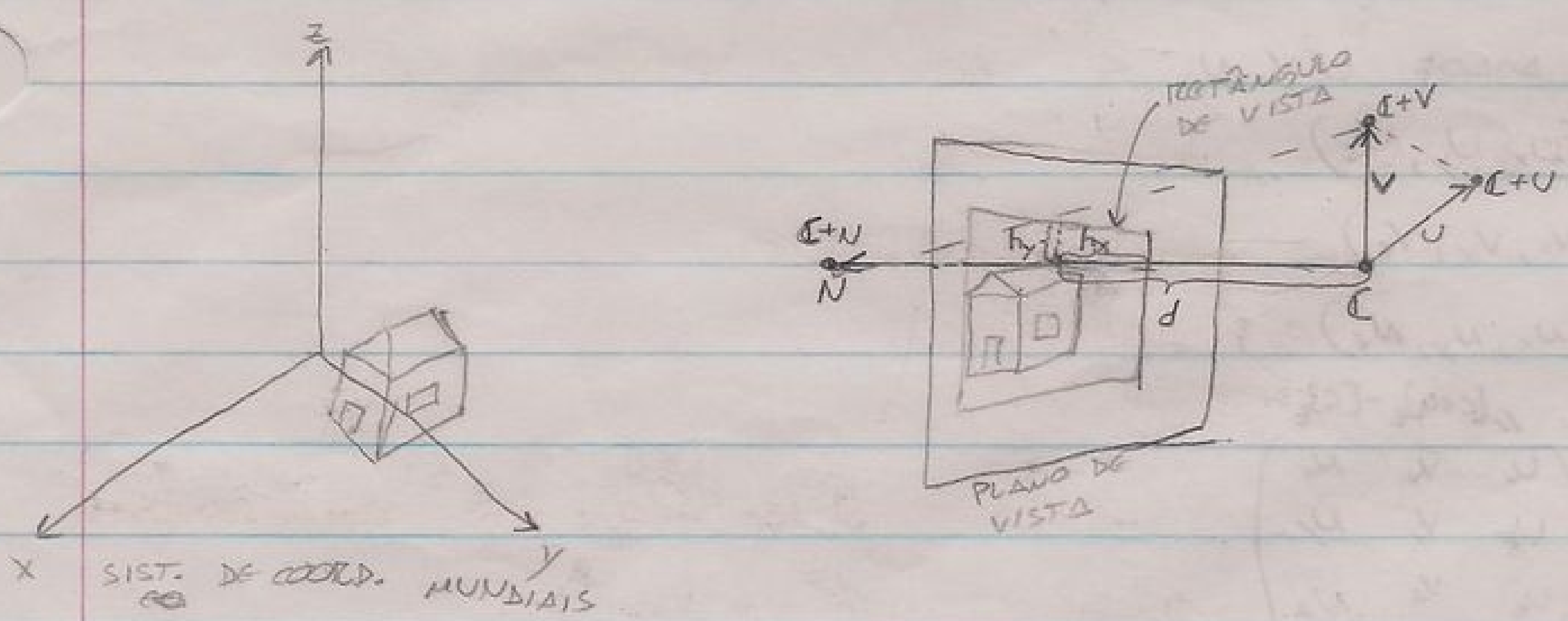
$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} b_{00}^{N,M}(s,t) \rightarrow \text{"TWIST VECTOR"}$$

05/11/2009

VISUALIZAÇÃO DE DADOS TRIDIMENSIONAIS

CÂMERA VIRTUAL (OU SINTÉTICA)

EXISTEM VÁRIOS MODELOS DE CÂMERA. O MODELO QUE UTILIZAREMOS SE BASEIA NO LIVRO DE ALAN WATT



OS PARÂMETROS DA CÂMERA SÃO:

C: PONTO; É O FOCO DA PROJEÇÃO

U: VETOR; DETERMINARÁ A DIREÇÃO "X" DO SIST. DE VISTA

V: VETOR; DETERMINARÁ A DIR. "Y" DO SIST. DE VISTA

N: VETOR; " " " "Z" " " "

d: ESCALAR; DIST. DO FOCO AO PLANO DE VISTA

hx, hy: ESCALARES; ESTABELECER AS DIMENSÕES DO RETÂNGULO DE VISTA

$$[TP]_{S_2} = \begin{array}{cc} & [TB]_{S_2}-[TC]_{S_2} \\ \left[\begin{matrix} \vert \\ \vert \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} \vert \\ \vert \end{matrix}\right] \\ [TA]_{S_2}-[TC]_{S_2} & \end{array} \cdot [P-C]_{S_1} + [TC]_{S_2}$$

05/11/2009

EM TERMOS DA NOSSA CONVENÇÃO P/ MUDANÇA DE SISTEMA DE COORDENADAS:

$$\begin{cases} \text{SISTEMA DE VISTA: } \sigma = \{C+U, C+V, C+N, C\} \\ \text{SISTEMA DE COORD. MUNDIAIS: } \varepsilon = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0)\} \end{cases}$$

EM GERAL, A TRANSF. É DADA COMO:

$$[Tp]_{S_2} = [T]_{S_2}^{S_1} \cdot [p-q]_{S_1} + [Tq]_{S_2}$$

p É QUALQUER PONTO; q É UM PONTO ESCOLHIDO

MUDANÇA DE COORDS. OCORRE QUANDO $T = Id = I$

$$[Ip]_{S_2} = [p]_{S_2} = [I]_{S_2}^{S_1} \cdot [p-q]_{S_1} + [q]_{S_2}$$

NO NOSSO CASO:

$$[p]_\sigma = [I]_\sigma^\varepsilon \cdot [p-q]_\varepsilon + [q]_\sigma$$

ESCOLHENDO $q = C$, POIS $[C]_\sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\boxed{[p]_\sigma = [I]_\sigma^\varepsilon \cdot [p-C]_\varepsilon}$$

$I\,v = v$

A MATRIZ $[I]_\varepsilon^\sigma$ É FÁCIL, POIS:

SE SÃO DADOS U, V, N

$U = (U_x, U_y, U_z)$

$V = (V_x, V_y, V_z)$

$N = (N_x, N_y, N_z)$

$$[I]_\varepsilon^\sigma = \begin{array}{c} {\scriptstyle [C+U]_\varepsilon - [C]_\varepsilon} \\ \begin{pmatrix} U_x & V_x & N_x \\ U_y & V_y & N_y \\ U_z & V_z & N_z \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} [U]_\varepsilon & [V]_\varepsilon & [N]_\varepsilon \end{matrix} \end{array}$$

QUEREMOS: $[I]_\sigma^\varepsilon = \left([I]_\varepsilon^\sigma\right)^{-1}$

05/11/2009

Se ambas as bases, ε e $\mathcal{B}$ são ortonormais, então a matriz de mudança de base entre elas é chamada de M. ortonormal:

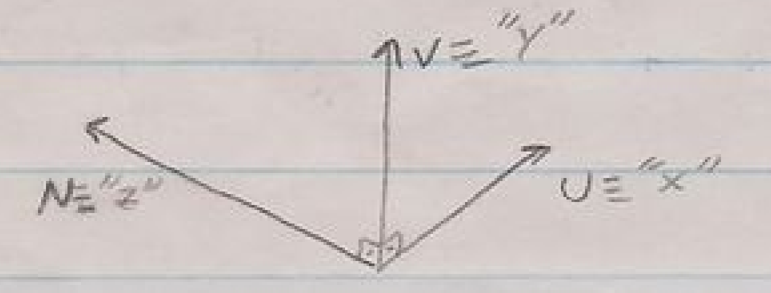
$$M^{-1} = M^t$$

ε já é uma B. ortonormal;

P/ o sist. de vista, basta convertê-la numa base ortonormal, caso o usuário ñ entre c/ uma base ortonormal. Na verdade, é útil deixar isso transparente p/ o usuário. Normalmente o usuário entra c/ os vetores V' e N, e daí o sist. ortogonaliza c/ o método de Gramm Schmidt:

$$V = V' - \frac{\langle V', N\rangle}{\langle N, N\rangle} \cdot N$$

e então: $U = N \times V$



Depois, basta normalizar os vetores:

$$\begin{cases} U'' = \frac{1}{\|U\|} \cdot U \\ V'' = \frac{1}{\|V\|} \cdot V \\ N'' = \frac{1}{\|N\|} \cdot N \end{cases}$$

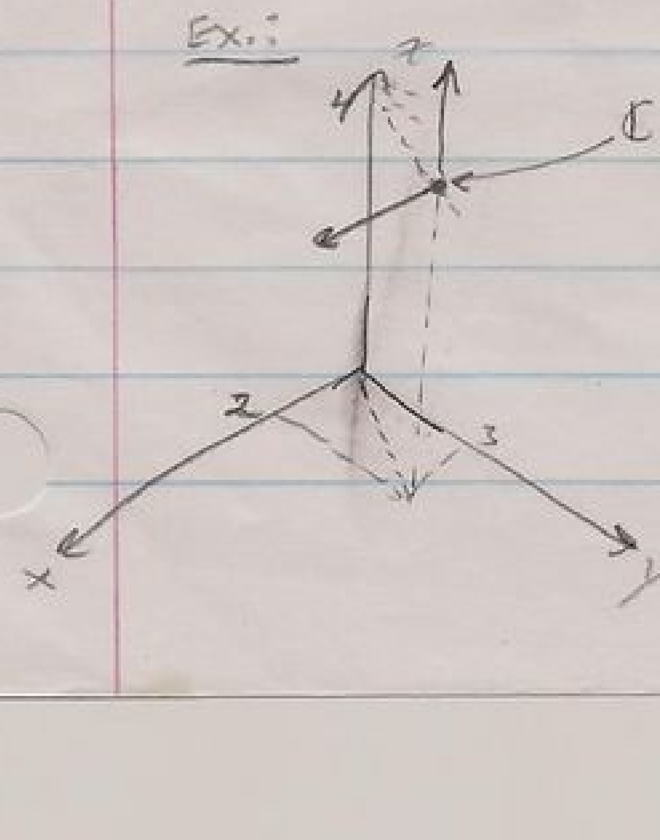
Suponha que: $U'' = (U_x, U_y, U_z)$

$V'' = (V_x, V_y, V_z)$

$N'' = (N_x, N_y, N_z)$

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \\ N_x & N_y & N_z \end{pmatrix}$$

Ex.:



$C = (2, 3, 4)$

$N = (0, -3, -4)$

$V' = (0, 0, 1)$

Com estes parâmetros de câmera, encontre o ponto $P = (5, -1, 2)$

(arbitrário, do usuário)

05/11/2009

EN COORDS. DE VISTA

$$V = V' - \frac{\langle V', N\rangle}{\langle N, N\rangle} \cdot N$$

$$V = (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1), (0,-3,-4)\rangle}{\langle (0,-3,-4), (0,-3,-4)\rangle} \cdot (0,-3,-4)$$

$$V = (0,0,1) - \frac{-4}{25}(0,-3,-4)$$

$$V = (0,0,1) - \left(0, \frac{12}{25}, \frac{16}{25}\right) = \left(0, -\frac{12}{25}, \frac{9}{25}\right)$$

$$N \times V = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{vmatrix} = \left(\frac{-27}{25} - \frac{48}{25}, 0, 0\right) = (-3, 0, 0)$$

NORMALIZANDO:

$$U'' = \frac{1}{\|U\|} U = \frac{1}{3}(-3,0,0) = (-1,0,0)$$

$$V'' = \frac{1}{\|V\|} V$$

$$\|V\| = \left\|\left(0, \frac{-12}{25}, \frac{9}{25}\right)\right\| = \frac{3}{25}\|(0,-4,3)\| = \frac{3}{25} \cdot 5 = \frac{3}{5}$$

$$V'' = \frac{5}{3}\left(0, \frac{-12}{25}, \frac{9}{25}\right) = \left(0, \frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$N'' = \frac{1}{\|N\|} \cdot N = \frac{1}{5}(0,-3,-4) = \left(0, -\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$$

$$[I]^{\varepsilon}_{G} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \end{pmatrix}$$

$$[P]_{G} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ -1 - 3 \\ 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \\ 0 & -3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

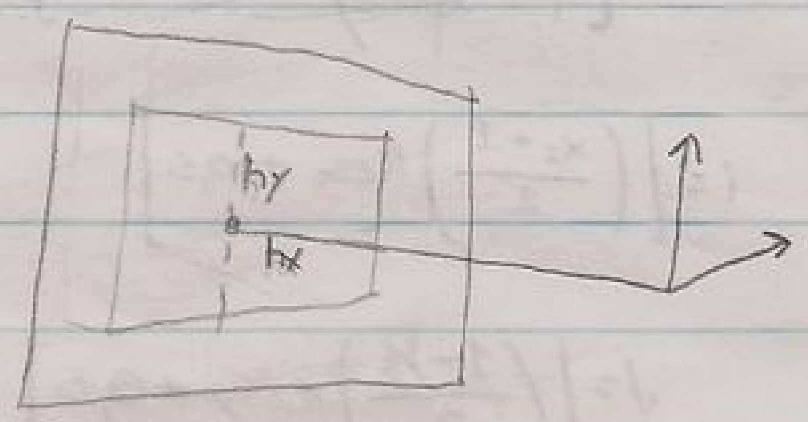
PROJEÇÃO EM PERSPECTIVA

AS COORDENADAS DE VISTA DE $\bar{P}$ SÃO:

$$\bar{p} = (x_s, y_s, d)$$

$$\bar{P} = \left(d \cdot \frac{x_v}{z_v},\ d\frac{y_v}{z_v},\ d\right)$$

NORMALIZAÇÃO DAS COORDENADAS: OS PARÂMETROS h_x, h_y



A IDEIA DA CONFIGURAÇÃO DO RETÂNGULO DE VISTA É NORMALIZAR AS COORDENADAS PROJETADAS DEIXANDO-AS ENTRE -1 E 1, PARA QUE A TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS DE TELA SEJA PADRÃO.

BASTA DIVIDIR POR h_x E h_y:

$$\boxed{x_s = \frac{d}{h_x} \cdot \frac{x_v}{z_v} \qquad y_s = \frac{d}{h_y} \cdot \frac{y_v}{z_v}}$$

APROVEITANDO O EXERCÍCIO ANTERIOR:

SUPONHA QUE $d = 2$, $h_x = 4$, $h_y = 3$

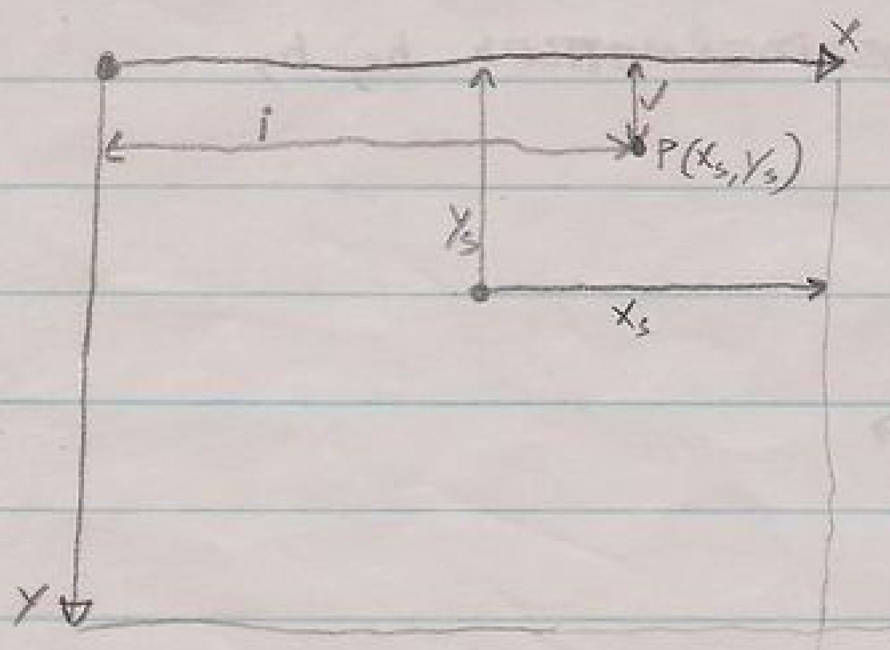
ENCONTRE A PROJEÇÃO EM PERSPECTIVA DE P.

$$\bar{P} = \left(\frac{\overset{d}{2}}{\underset{h_x}{4}} \cdot \frac{\overset{x_v}{(-3)}}{\underset{z_v}{4}},\ \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4}\right) = \left(-3/8,\ 1/3\right)$$

COORDENADAS DE TELA

SUPONHA QUE Res_x E Res_y CORRESPONDA AO TAMANHO ÚTIL DO MONITOR EM "PIXELS".

SUPONHA QUE (i, j) É A COORDENADA DE TELA DE UM DADO PIXEL. A ORIGEM É O PONTO SUPERIOR ESQUERDO, E O "Y" ORIENTADO PARA BAIXO.



$$i = \left\lfloor \left(\frac{x_s - (-1)}{2} \right) \cdot Res_x + 0,5 \right\rfloor$$

$$i = \left\lfloor \left(\frac{x_s + 1}{2} \right) Res_x + 0,5 \right\rfloor$$

$$j = \left\lfloor \left(\frac{1 - y_s}{2} \right) Res_y + 0,5 \right\rfloor$$

$\lfloor k \rfloor$: MAIOR INTEIRO MENOR QUE K (FUNÇÃO CHÃO)

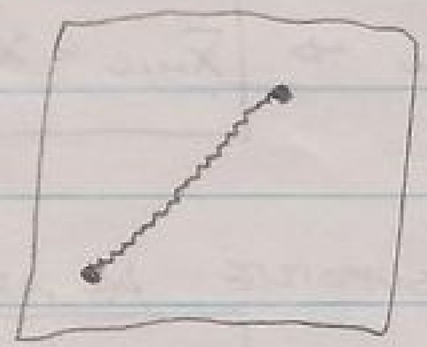
PREENCHIMENTO DE POLÍGONOS

("SCANLINE CONVERSION")

O MONITOR (OU QUALQUER DISPOSITIVO DE VISUALIZAÇÃO NOS DIAS DE HOJE) É MODELADO COMO UMA MATRIZ DE "PIXELS"

P/ CADA PIXEL EXISTEM 3 COMPONENTES (RED, GREEN, BLUE)
↳ 1 BYTE POR COMPONENTE
24 BITS POR PIXEL

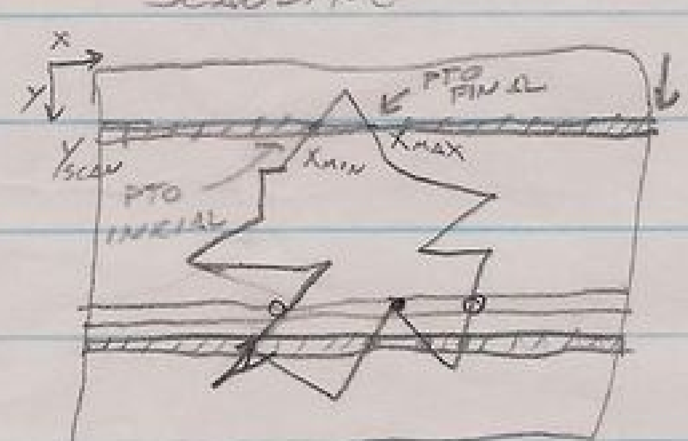
COMO A ÁREA ÚTIL DO MONITOR É UMA MATRIZ, ENTÃO QUALQUER SÍNTESE DE IMAGEM SOFRERÁ DAS CONSEQUENCIAS DA DISCRETIZAÇÃO



O EFEITO MAIS DIFÍCIL DE LIDAR É O CHAMADO "ALIASING". GERALMENTE ESTE FENÔMENO É MELHOR ENTENDIDO NO ESPAÇO DE FOURIER (DE FREQUENCIAS). A TRANSFORMADA DE FOURIER FAZ ESTA CONVERSÃO.

O OBJETIVO HOJE É COMO PREENCHER UMA ÁREA DO MONITOR DEFINIDA POR UM POLÍGONO.

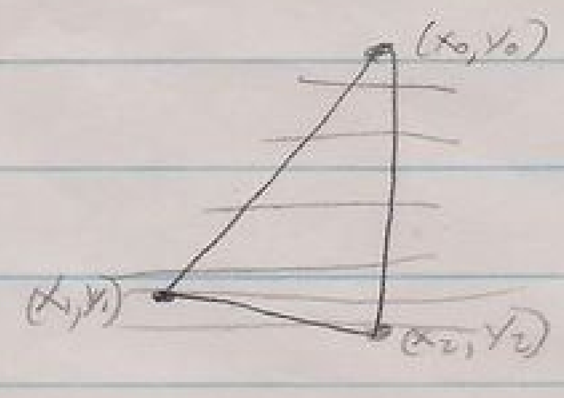
SCANLINE



PINTAM-SE (X_{MIN}, Y_{SCAN}) ↓ (X_{MAX}, Y_{SCAN})

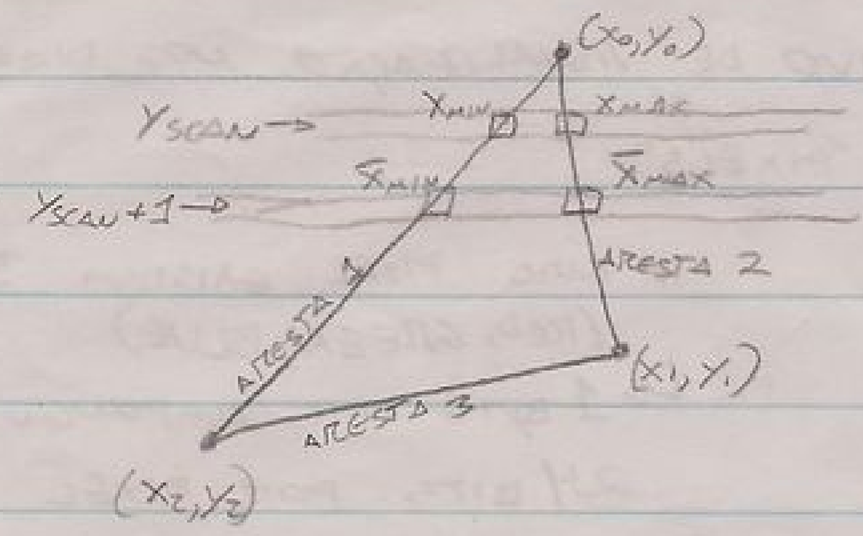
CUIDADO DEVE SER TOMADO QUANDO A RETA DE VARREDURA INTERSECTA UM VÉRTICE, POIS O EMPARELHAMENTO (X_{MAX}, X_{MIN}) MUDA.

"SCANLINE CONVERSION" DE TRIÂNGULOS



BASICAMENTE É UM ALGORITMO QUE TRABALHA SÓ COM 2 ARESTAS EM CADA MOMENTO (COMO EM QUALQUER POLÍGONO CONVEXO), MAS DISPENSA UM ALGORITMO ORDENADOR DE ARESTAS, POIS COM ALGUNS COMANDOS DE DECISÃO JÁ SE TEM A ORDEM DAS ARESTAS E VÉRTICES.

NESTE ALGORITMO, A CHAMADA "COERÊNCIA GEOMÉTRICA" PODE SER APLICADA DE FORMA BEM SIMPLES



CONSIDERE A EQUAÇÃO DA RETA DE SUPORTE DA ARESTA 1: $Y = AX + B$

COMO (X_{MIN}, Y_{SCAN}) SATISFAZ ESTA EQUAÇÃO:

$$Y_{SCAN} = A X_{MIN} + B \quad (EQ\ 1)$$

ASSIM COMO O PONTO $(\overline{X}_{MIN}, Y_{SCAN}+1)$:

$$Y_{SCAN} + 1 = A\overline{X}_{MIN} + B \quad (EQ\ 2)$$

FAZENDO EQ2 − EQ1:

$$1 = A\overline{X}_{MIN} - AX_{MIN} \rightarrow 1 + AX_{MIN} = A\overline{X}_{MIN} \rightarrow \boxed{\overline{X}_{MIN} = X_{MIN} + \frac{1}{A}}$$

OBS.: CUIDADO QDO $A = \emptyset$ (A FOR ZERO)

DE FORMA SEMELHANTE, P/ A RETA SUPORTE DA ARESTA 2:

SUPONHA QUE A EQ É: $Y = A'X + B'$ $\Rightarrow \boxed{\overline{X}_{MAX} = X_{MAX} + \frac{1}{A'}}$

Algoritmos de visibilidade (remoção de linhas/superfícies escondidas)

Existem 2 tipos (além dos híbridos)

1. Precisão de imagem
2. Precisão de objeto

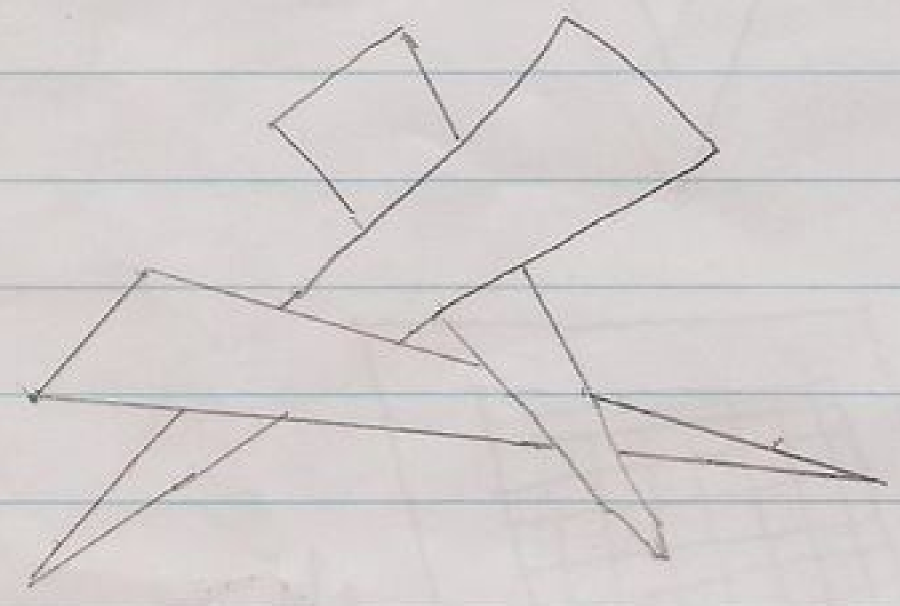
1. Precisão de imagem

A visibilidade é resolvida na síntese de imagem

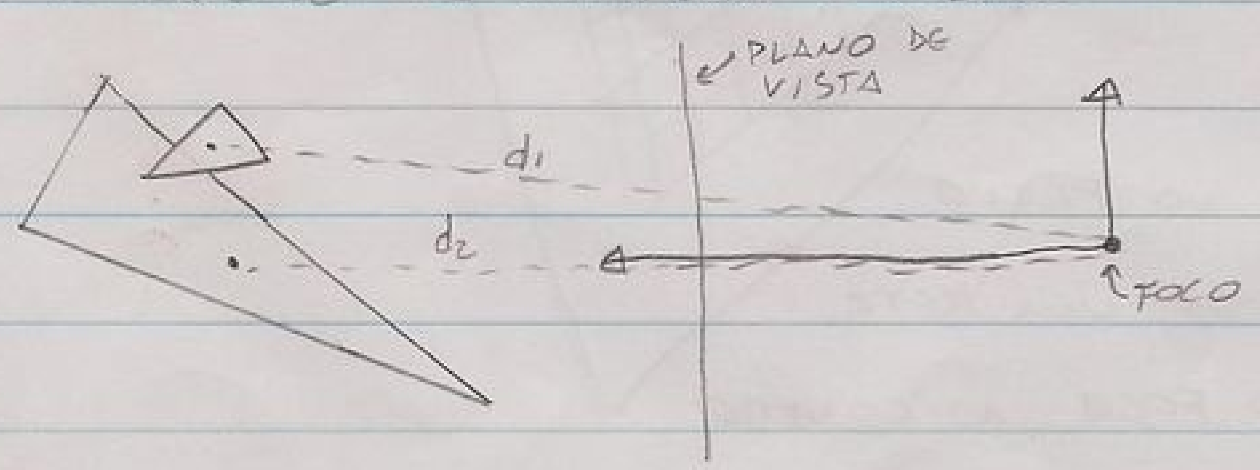
O algoritmo mais simples é o do **pintor**. Neste algoritmo, as faces são ordenadas com relação à sua distância ao foco e são pintadas na ordem da maior distância para a menor distância. A distância pode ser com relação ao baricentro ou ao vértice mais próximo, ou ainda à coordenada z de vista de um desses pontos.

Alguns problemas:

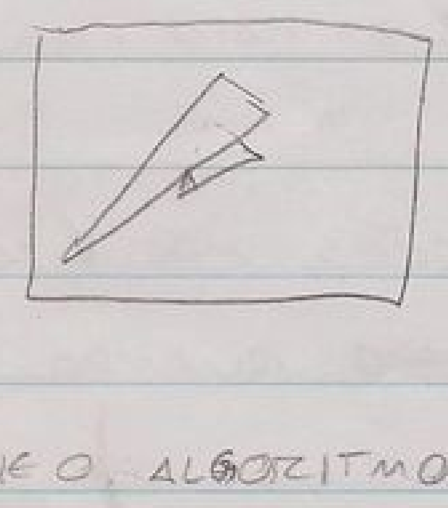
1. Entrelaçamento de triângulos



2. O cálculo da distância é ambíguo



$d_1 > d_2$

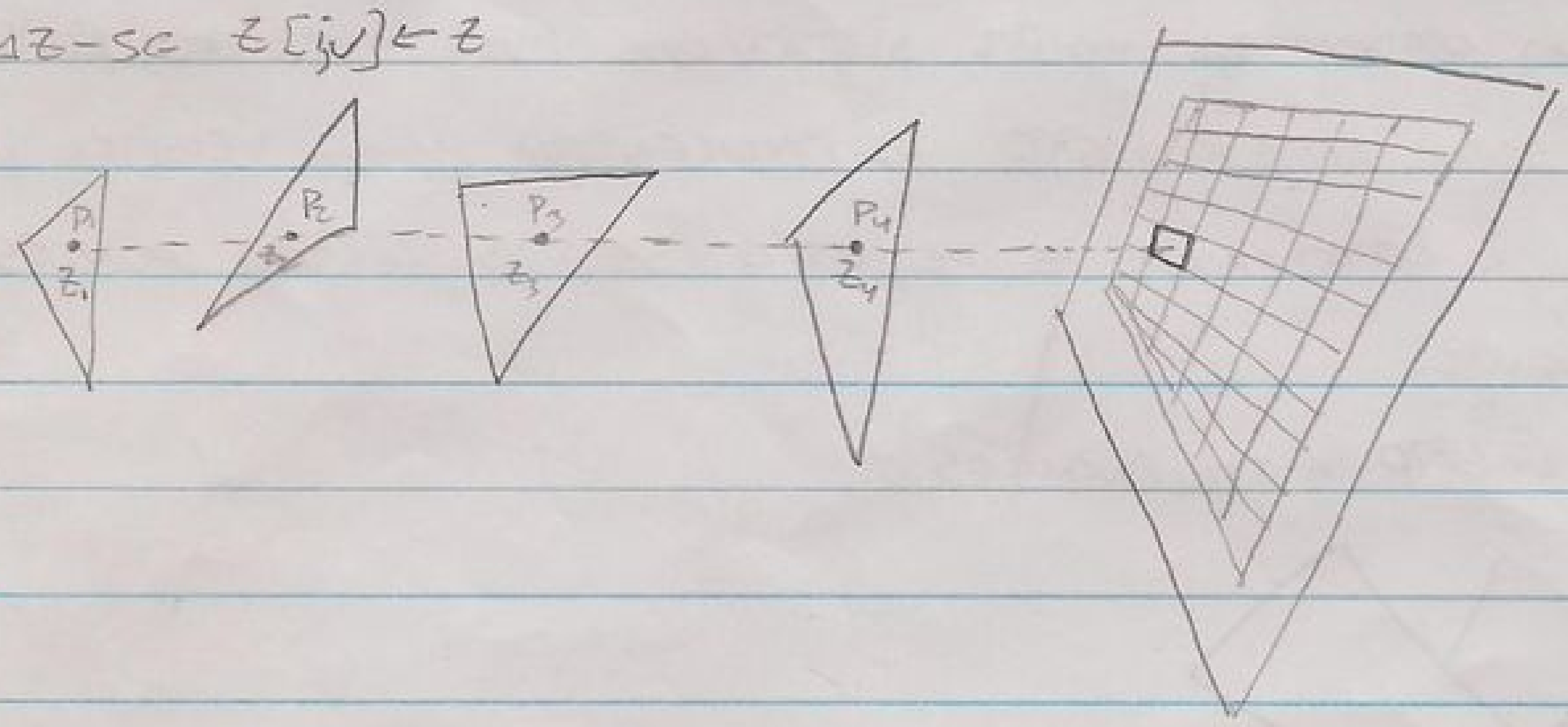


Isto mostra que o algoritmo do pintor é falho, embora seja simples

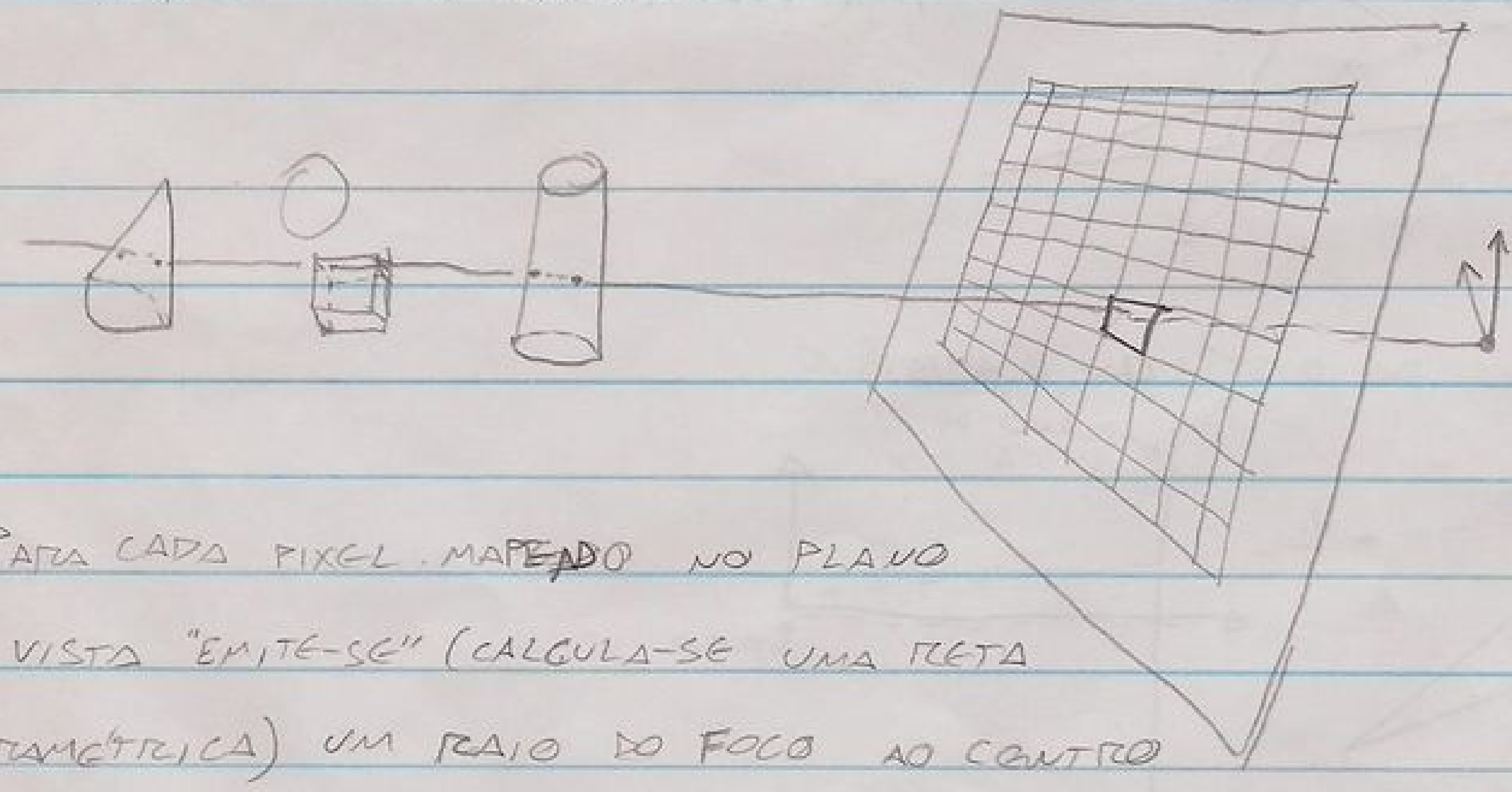
O ALGORITMO Z-BUFFER

UTILIZA UM "BUFFER" C/ UMA POSIÇÃO PARA CADA PIXEL (OU SEJA, O PIXEL (i,J) TERÁ NO "BUFFER" O ELEMENTO Z[i,J]). O Z[i,J] CORRESPONDE À COORDENADA Z DE VISTA DO ÚLTIMO PONTO PROJETADO NO PIXEL (i,J) E QUE TEVE SUA VISIBILIDADE RESOLVIDA.

NO MOMENTO EM QUE SE PROJETA UM PONTO NO PIXEL(i,J), FAZ-SE UMA CONSULTA AO Z-BUFFER NA POSIÇÃO (i,J). SE O Z[i,J] ≤ Z DO PONTO A SER PROJETADO, ENTÃO NADA A SE FAZER; CASO CONTRÁRIO, PINTA-SE O PIXEL COM A COR DO PONTO A SER PROJETADO, E FAZ-SE Z[i,J] ← Z



RAY TRACING BÁSICO

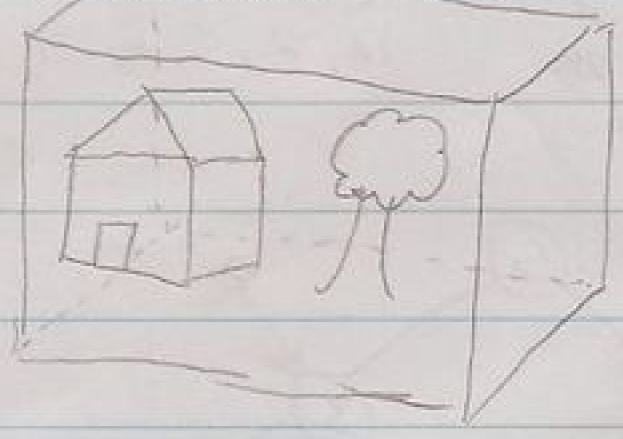


PARA CADA PIXEL MAPEADO NO PLANO DE VISTA "EMITE-SE" (CALCULA-SE UMA RETA PARAMÉTRICA) UM RAIO DO FOCO AO CENTRO DO PIXEL, E CALCULA-SE AS INTERSEÇÕES DO RAIO COM OS OBJETOS, E ESCOLHE-SE E PINTA-SE O MAIS PRÓXIMO.

DESVANTAGEM É O PREÇO DAS INTERSEÇÕES, MAS É UM ALGORITMO QUE NÃO APRESENTA FALHAS, E É ADEQUADO QUANDO UTILIZADO C/ O "RAY TRACING" RECURSIVO

Para otimizar o cálculo das interseções, pode-se utilizar:

1. "Bounding Box"

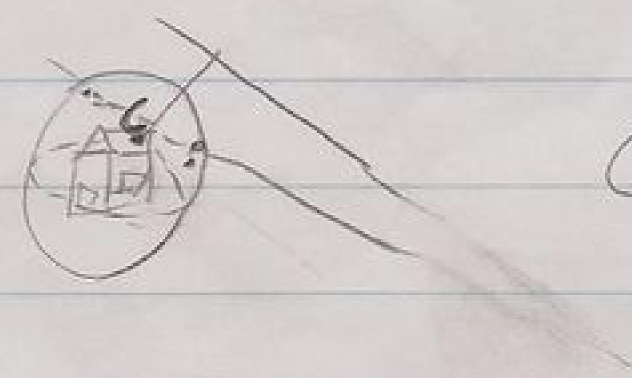


Um paralelepípedo retangular canonicamente orientado envolve a cena inteira. Faz-se então uma consulta prévia se o raio intersecta o B.B.; se sim, então calculam-se as interseções c/ os objetos dentro do B.B.

Também pode-se ter o B.B. p/ cada objeto ou partes de um objeto (estilo octree)

2. "Bounding Sphere"

Pode-se utilizar uma esfera envolvendo toda a cena ou objeto:

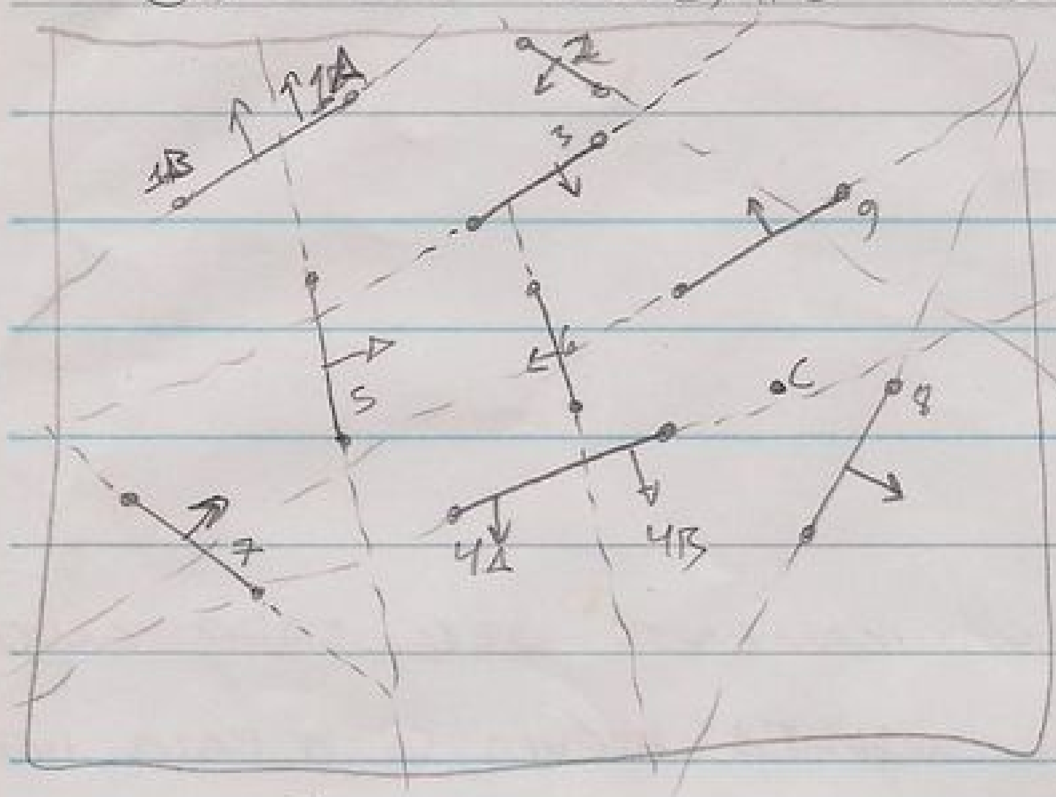


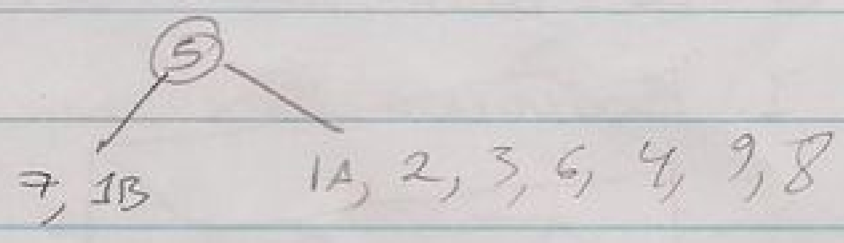
Calcula-se $d^2(c,r) < raio^2$

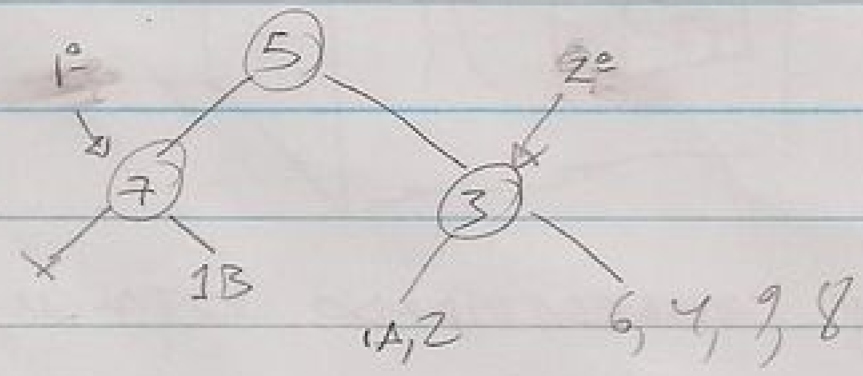
BSP: "Binary Space Partitioning"

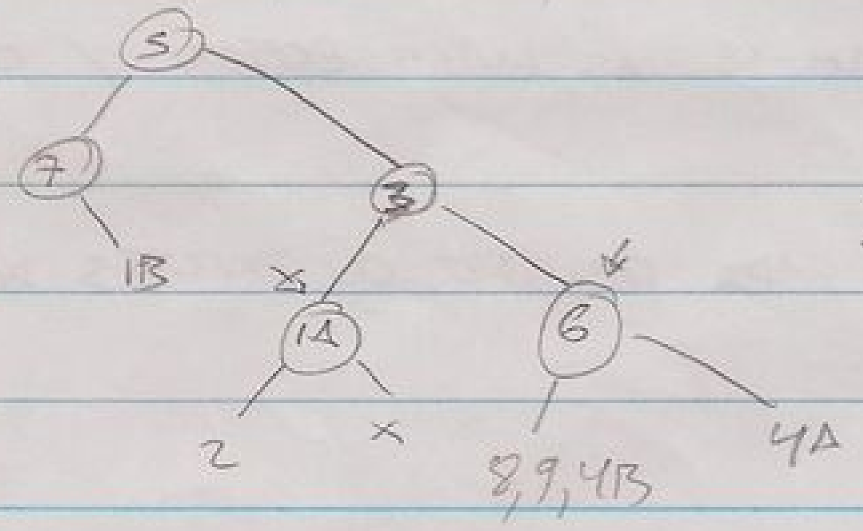
É um algoritmo de precisão de objeto. No caso ele particiona o espaço contendo a cena, e cria-se uma árvore de visibilidade, que permite ordenar as faces de forma a evitar sobreposições

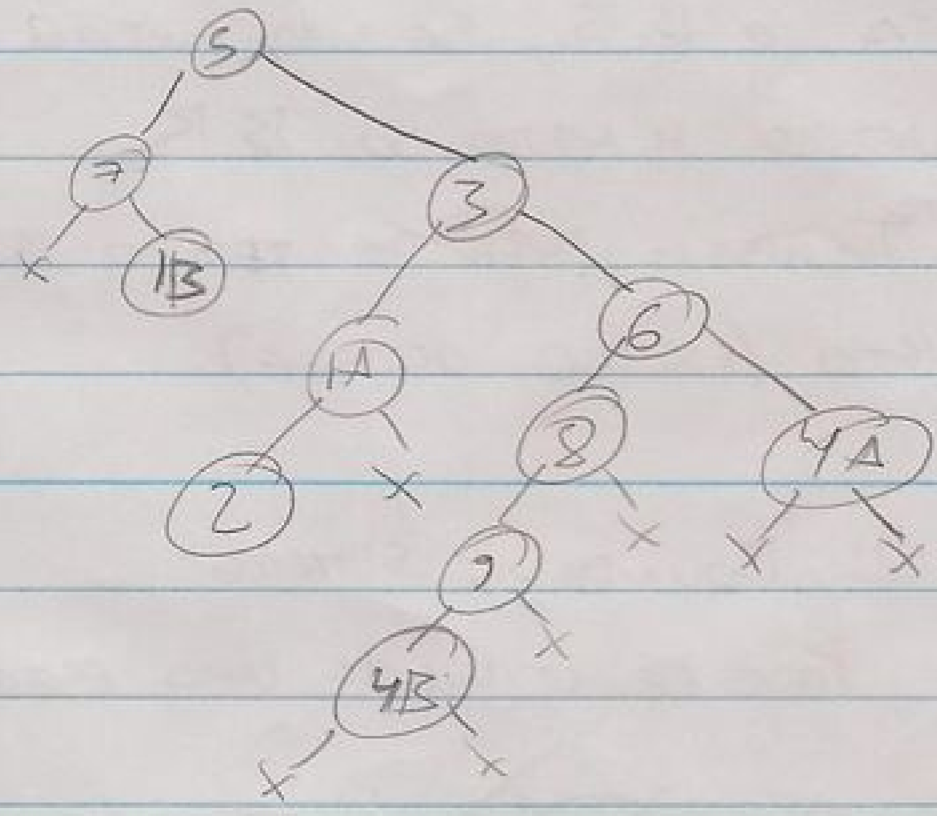
Considere o exemplo 2D











7, 1B, 5, 3, 2, 1A, 6, 4A, 8, 9, 4B

7, 1B 5, 3, 2, 1A, 6, 4A, 8, 9, 4B

7, 1B, 5, 2, 1A, 3, 6, 4A, 8, 9, 4B

7, 1B, 5, 1A, 2, 3, 6, 4A, 8, 9, 4B

2, 3, 4A, 6, 8, 4B, 9

8, 4B, 9

7, 1B, 5, 1A, 2, 3, 4A, 6, 8, 9, 4B

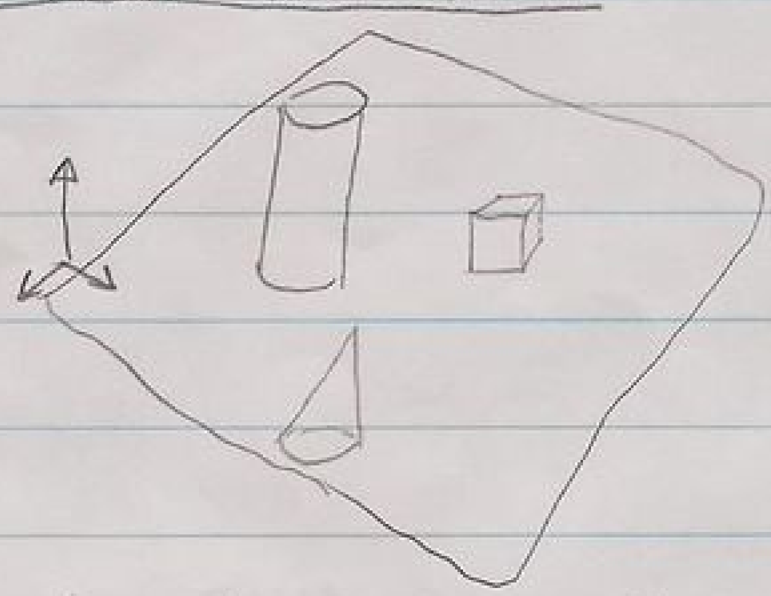
1ª PARTE 2ª PROV: 03/12
2ª PARTE : 10/12
2º EE : 10/12
3ª PROV : 14/12

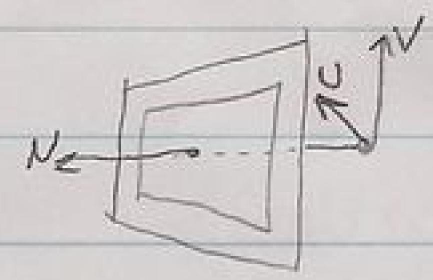
ILUMINAÇÃO

MODELO DE PHONG

- COMPONENTE AMBIENTAL
- COMPONENTE DIFUSA
- COMPONENTE ESPECULAR

COMPONENTE AMBIENTAL





VARIÁVEIS DA COMPONENTE AMBIENTAL

I_A = INTENSIDADE DA COR AMBIENTAL

I_A POSSUI TRÊS COMPONENTES

R, G, B

PODE SER VISTO COMO UM VETOR COM 3 COMPONENTES

I_A VALE PARA TODA A CENA

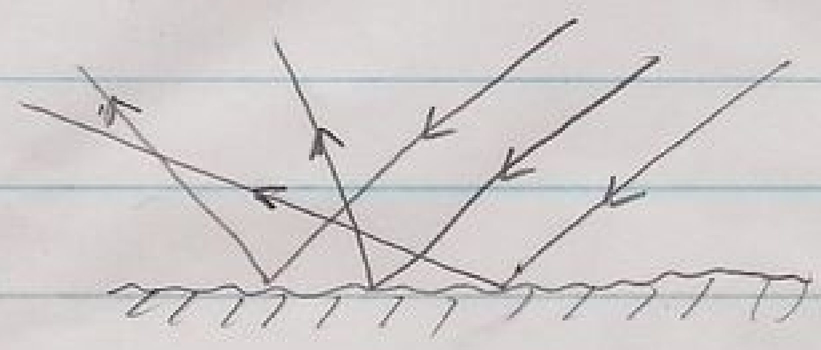
K_A = ESCALAR, COEFICIENTE DE REFLEXÃO AMBIENTAL; INDIVIDUAL PARA CADA OBJETO

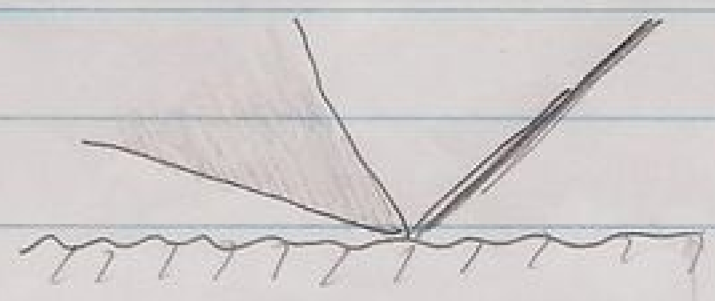
DIGAMOS QUE I É A COR FINAL DE UM DADO PONTO DE UM CERTO OBJETO.

$I = K_A \cdot I_A$

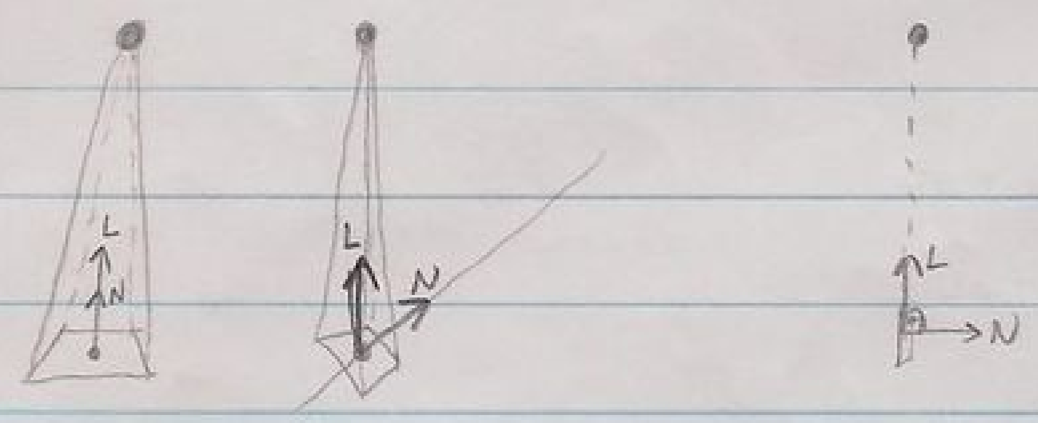
CONSIDERANDO APENAS A COMPONENTE AMBIENTAL

COMPONENTE DIFUSA





FONTE DE LUZ PONTUAL



$$\cos\theta = \frac{\langle N, L \rangle}{\|N\| \cdot \|L\|}$$

CONSIDERE A CONSTANTE DIFUSA:

K_d, TRÊS COMPONENTES

$$K_d \equiv \begin{pmatrix} K_{d\,RED} \\ K_{d\,GREEN} \\ K_{d\,BLUE} \end{pmatrix},$$ COM VALORES ENTRE 0 E 1

$I_L \equiv$ INTENSIDADE DA FONTE DE LUZ. TRÊS COMPONENTES C/ VALORES ENTRE 0 E 255

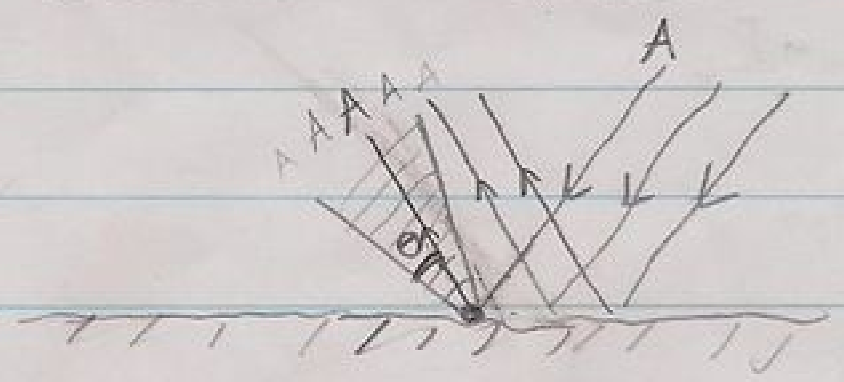
ASSUMINDO QUE SÃO CONHECIDOS $\overset{\text{VETOR NORMAL}}{N}$ E L, P/ UM DADO PONTO.

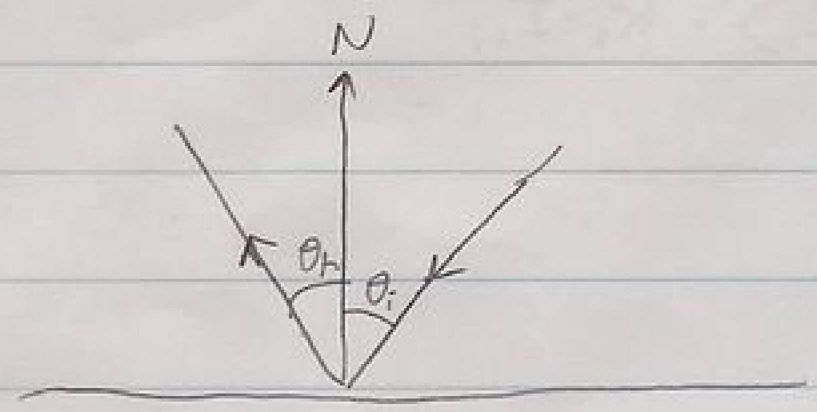
ASSUMINDO TAMBÉM QUE: $\|N\| = \|L\| = 1$ ENTÃO:

$$I_d = \langle N, L \rangle \cdot K_d * I_L$$

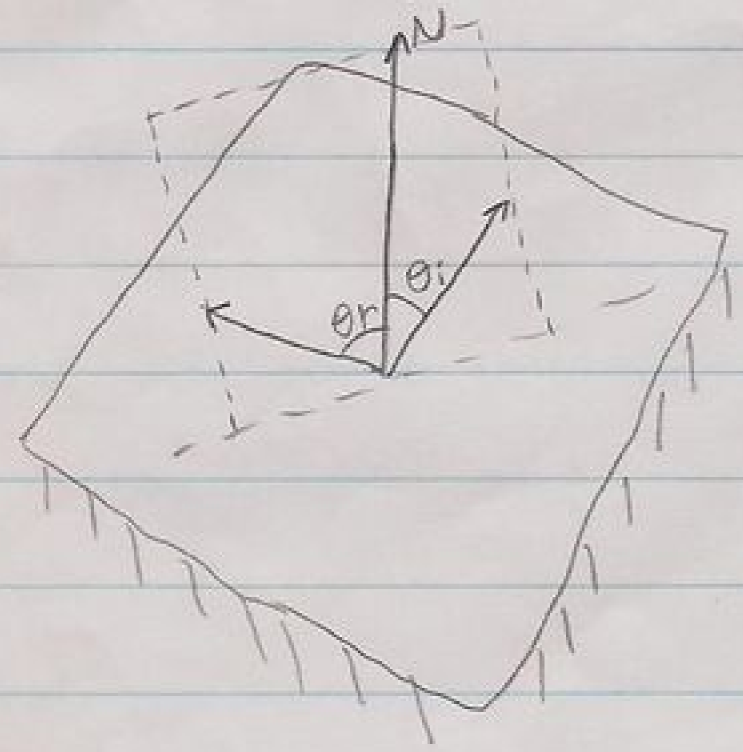
$$\begin{pmatrix} K_{dR} \\ K_{dG} \\ K_{dB} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_{LR} \\ I_{LG} \\ I_{LB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{dR} \cdot I_{LR} \\ K_{dG} \cdot I_{LG} \\ K_{dB} \cdot I_{LB} \end{pmatrix}$$

Componente especular





Lei de Snell: $\theta_r = \theta_i$



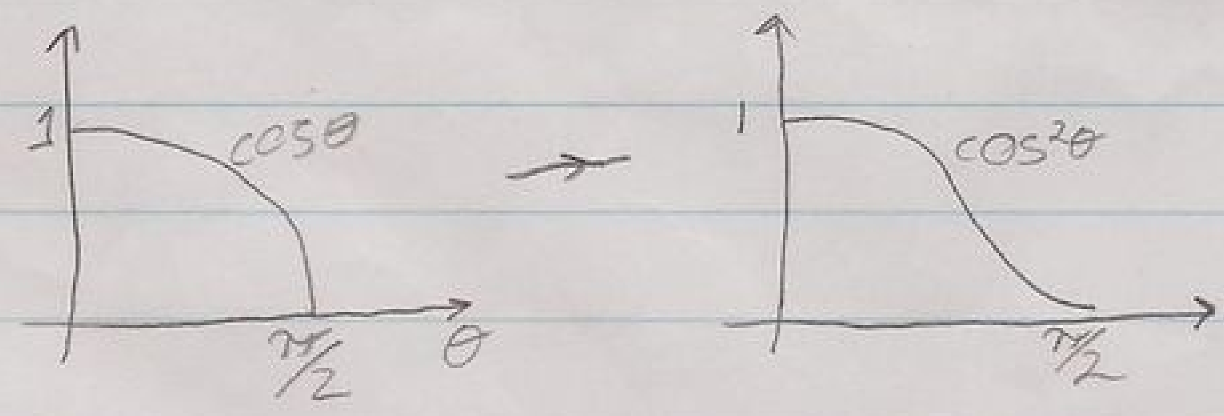
Assumindo conhecidos V, R, N e L:

(normalizados)

Considere K_s = coef. de reflexão especular entre 0 e 1

$I_s = \langle V, R\rangle \cdot k_s \cdot I_L \rightarrow I_s = \langle V, R\rangle^{\nu} \cdot k_s \cdot I_L$

escalar



ν é o coef. de rugosidade, ν assume valores reais positivos

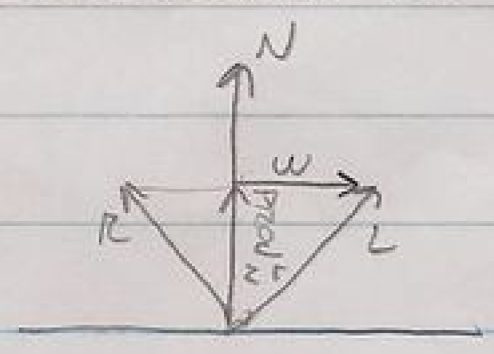
Composição da cor:

$$I = k_a \cdot I_a + \langle N, L \rangle \cdot k_d * I_L + \langle V, R \rangle^{\nu} \cdot k_s \cdot I_L$$

Se houver m fontes de luz:

$$I = k_a \cdot I_a + \sum_{i=1}^{m} \langle N, L_i \rangle \cdot k_d * I_{L_i} + \langle V, R_i \rangle^{\nu} \cdot k_s \cdot I_{L_i}$$

Calculando R:



Considere $W = L - PROJ_N^L$

$R = PROJ_N^L + (-W)$

$R = PROJ_N^L - L + PROJ_N^L$

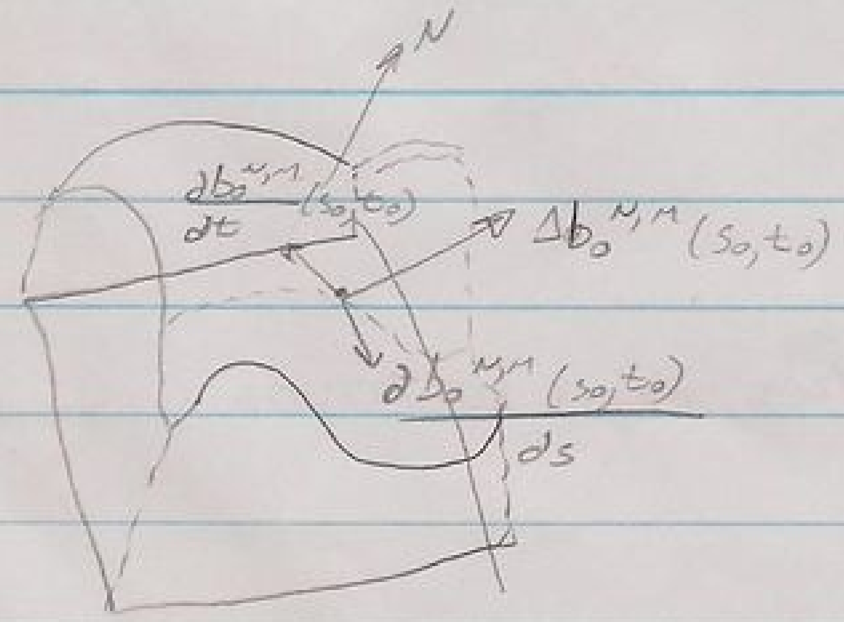
$R = 2 PROJ_N^L - L$

$R = 2 \cdot \frac{\langle L, N \rangle}{\langle N, N \rangle} \cdot N - L$

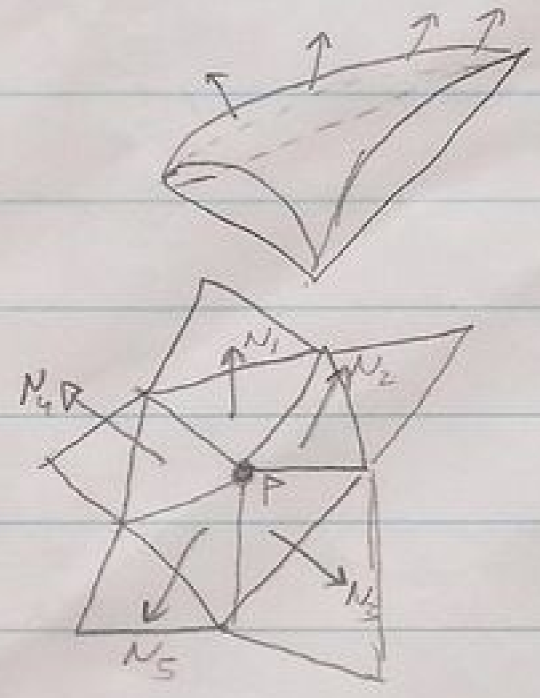
Como $\|N\| = 1$, então:

$$\boxed{R = 2 \langle L, N \rangle \cdot N - L}$$

Computando as normais



No caso do projeto, temos uma superfície aproximada por triângulos



$$N_P = \frac{1}{5}(N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5)$$

O cálculo da normal num vértice é feito através da média aritmética das normais dos triângulos que compartilham aquele vértice.

$$\|N_P\| = \frac{1}{5}\|N_1 + N_2 + \dots + N_5\|$$

$$\frac{1}{\|N_P\|} N_P = \frac{1}{\cancel{\frac{1}{5}}\|N_1 + \dots + N_5\|} \cdot \cancel{\frac{1}{5}}(N_1 + \dots + N_5)$$

O algoritmo tem 3 passos:

1 - Calcule as normais nos triângulos;

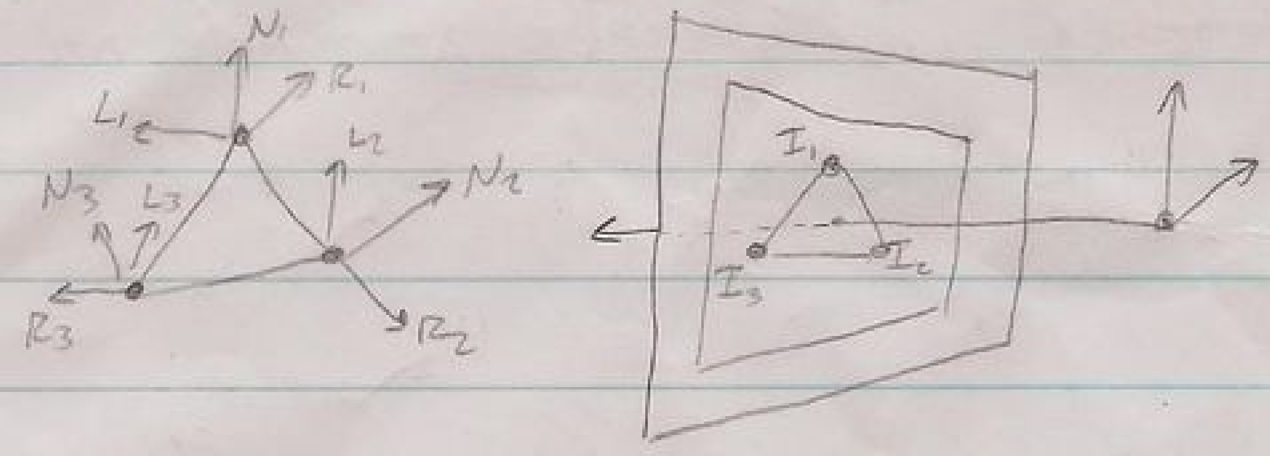
2 - Para cada triângulo adicione a normal ao campo normal de cada vértice do triângulo;

3 - Normalize as normais dos vértices.

Técnicas de "shading"

- Gouraud Shading
- Phong Shading

A técnica de Gouraud Shading é basicamente computar a cor de um ponto do interior como uma interpolação das cores nos vértices do triângulo



Calcule a combinação baricêntrica:

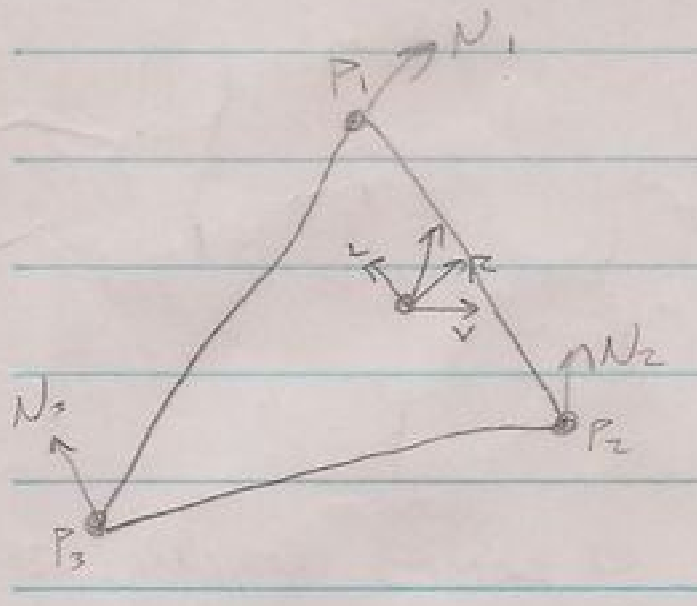
$\bar{P} = (i, j)$ pixel no interior

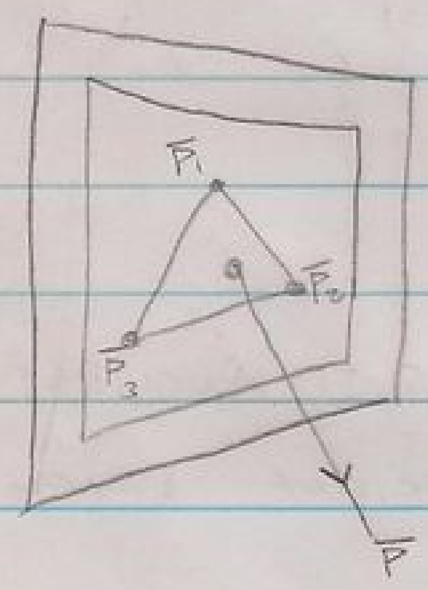
$\bar{P} = \alpha\bar{P}_1 + \beta\bar{P}_2 + \gamma\bar{P}_3$, onde $\alpha + \beta + \gamma = 1$

$I = \alpha I_1 + \beta I_2 + \gamma I_3$

Phong Shading

É uma interpolação de normais





$\bar{P} = \alpha\bar{P}_1 + \beta\bar{P}_2 + \gamma\bar{P}_3$

$P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$

$N = \alpha N_1 + \beta N_2 + \gamma N_3$

Com os vetores N, L, R, V de P, calculamos uma eq. de iluminação p/ P e pintamos $\bar{P}$ com I

P/ O DIA 27/11

PARTE BÁSICA DO 2º PROJETO

OBJETIVO: TOMAR COMO ENTRADA UM OBJETO TRIANGULARIZADO E PINTAR COM CORES ALEATÓRIAS (CADA TRIÂNGULO C/ 1 COR)

COMO É FEITO:

1. CARREGAR OS PONTOS NUMA LISTA;

ARQUIVO:

Nº TRIÂNGULOS

NPTS NFACES
X_1 Y_1 Z_1
X_2 Y_2 Z_2
⋮
X_{NPTS} Y_{NPTS} Z_{NPTS}

ÍNDICE DOS PONTOS

A_1 B_1 C_1
A_2 B_2 C_2
⋮
A_{NFACES} B_{NFACES} C_{NFACES}

2. CARREGA OS TRIÂNGULOS

3. CARREGA OS DADOS DA CÂMERA;

CÂMERA:

C_x C_y C_z
N_x N_y N_z
V_x V_y V_z
d h_x h_y

4. CONFIGURA A CÂMERA (CRIAR O SISTEMA ORTOGONAL U, V, N);

5. CONVERTER AS COORDENADAS P/ COORDENADAS DE VISTA;

6. PROJETAR OS TRIÂNGULOS, ORDENADOS PELO "Z" DO BARICENTRO

7. PINTAR OS TRIÂNGULOS NA ORDEM DO MAIOR Z P/ O MENOR Z. (USANDO O SCANLINE)