Dedução Natural

Dedução natural é um dos sistemas dedutivos utilizados para construir demonstrações formais na Lógica, tais demonstrações são realizadas através de uma árvore de dedução utilizando regras de introdução e eliminação.

Regras de Introdução

Introdução da CONJUNÇÃO

Seja A e B ∈ PROP se A é verdade e B também é verdade então podemos deduzir que A ∧ B também é verdade

Representação:

$$\frac{A \qquad\qquad B}{A \wedge B}$$

Introdução da DISJUNÇÃO

Seja A e B ∈ PROP se A é verdade então podemos deduzir que A ∨ B também é verdade

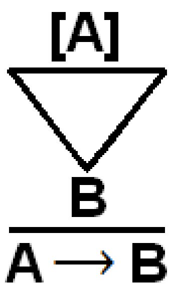
Representação:

$$\frac{A}{A \vee B}$$

Introdução da IMPLICAÇÃO

Seja A e B ∈ PROP se suponhamos que A é verdade e por meio de derivações descobrirmos que B também é verdade então podemos deduzir que A → B também é verdade

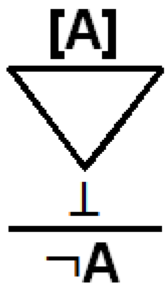
Representação:



Introdução da NEGAÇÃO

Seja A ∈ PROP se suponhamos que A é verdade e por meio de derivações chegarmos ao absurdo então podemos deduzir que ¬A é verdade

Representação:



Regras de Eliminação

Eliminação da CONJUNÇÃO

Seja A e B ∈ PROP se A ∧ B é verdade então A e B também são verdades.

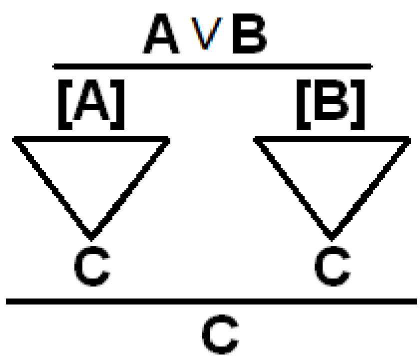
Representação:

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

Eliminação da DISJUNÇÃO

Seja A e B ∈ PROP se A ∨ B é verdade então ou A ou B podem ser verdades (pelo menos um deles). Sendo assim somos obrigados a supor A e B e das duas suposições chegarmos a uma proposição C ∈ PROP que seja comum as duas suposições.

Representação:



Eliminação da IMPLICAÇÃO

Seja A e B ∈ PROP se A → B é verdade então se A for verdade B também é então podemos supor que A é verdade afim de eliminar a implicação, se soubermos que A é verdade então não precisamos supor.

Representação:

$$\dfrac{[A] \qquad A \longrightarrow B}{B}$$

Eliminação da NEGAÇÃO

Seja A e B ∈ PROP se ¬A é verdade então podemos realizar uma troca afim de forçar um absurdo e eliminar a negação.

Representação:

$$\dfrac{\neg A}{A \longrightarrow \bot}$$

Redução ao absurdo

O absurdo acontece quando tentamos provar algo a partir de uma suposição e chegamos ao absurdo, então o q supomos é absurdo. Quando supomos um absurdo tudo q for dito é verdade, pois qualquer coisa é consequência lógica de algo insatisfatível.

Exemplos de prova de consequência lógica por dedução natural

1) $P, P \to Q \vdash P \land Q$

   Temos que P e $P \to Q$ é verdade, para eliminarmos a implicação precisamos supor P mas P nesse sistema já é verdade. Então temos.

$$\dfrac{P \qquad \dfrac{P \quad P \longrightarrow Q}{Q}}{P \land Q}$$

   Está provado que $P, P \to Q \vdash P \land Q$

2) $(P \land Q) \to R,\ Q \to P,\ Q \vdash R$

   Temos duas implicações para eliminar, o $Q \to P$ parece ser o caminho pois temos que Q é verdade, então P também é verdade, se P e Q são verdades então $P \land Q$ é verdade, se $P \land Q$ é verdade então R também é.

$$\dfrac{\dfrac{Q \qquad \dfrac{Q \quad Q \to P}{P}}{P \land Q} \qquad (P \land Q) \to R}{R}$$

   Está provado que $(P \land Q) \to R,\ Q \to P,\ Q \vdash R$

3) $P \lor (Q \land R) \vdash P \lor Q$

Temos agora uma disjunção para eliminar a mais difícil delas porque somos obrigados a supor duas expressões e encontrar algo em comum às duas árvores.

$$\dfrac{P \lor (Q \land R) \qquad \dfrac{[P]}{P \lor Q} \qquad \dfrac{\dfrac{[Q \land R]}{Q}}{P \lor Q}}{P \lor Q}$$

Está provado que $P \lor (Q \land R) \vdash P \lor Q$

4) $P \lor Q, \neg P \vdash Q$

Temos que eliminar a disjunção e somos obrigados a supor q P é verdade, mas sabemos que ¬P é verdade então podemos gerar um absurdo e concluir qual quer coisa dele, concluímos então que Q é verdade, do outro lado da árvore também temos a suposição de Q, o que nos faz concluir que Q é verdade.

$$\dfrac{P \lor Q \qquad \dfrac{\dfrac{\neg P \quad [P]}{\bot}}{Q} \qquad [Q]}{Q}$$

Está provado que $P \lor Q, \neg P \vdash Q$