

# Normalização de Provas na Dedução Natural

**Teoremas e definições:** Extraídos das aulas do professor Ruy de Queiroz para a disciplina Lógica para Computação, UFPE.

**Transcrição e explicações:** David Barros Hulak.

## Conteúdo

Introdução .....	3
Definições .....	4
Tipos de redundância .....	5
(1.a) $\beta$ - E.....	5
(1.b) $\beta$ - OU .....	6
(1.c) $\beta$ - IMPLICA .....	7
(2.a) $\eta$ - E.....	8
(2.b) $\eta$ - OU.....	9
(2.c) $\eta$ - IMPLICA.....	10
Fórmula máxima .....	11
Procedimento de normalização de provas.....	12
Teorema da Existência da Forma Normal (a.k.a. “teorema da normalização fraca”).....	12
Teorema da Unicidade da Forma Normal.....	12
Teorema da Normalização Forte .....	12
Conclusão .....	13

## Introdução

Este material visa esclarecer o método da normalização de provas na dedução natural, bem como os teoremas relacionados à forma normal.

Uma apostila sobre dedução natural encontra-se na página da monitoria de Lógica para Computação, em [www.cin.ufpe.br/~mlogica](http://www.cin.ufpe.br/~mlogica), em caso de eventuais dúvidas.

## Definições

Uma dedução (ou “prova”) de um dado argumento  $\Gamma \vdash \varphi$  pode estar correta (no sentido de que só usa as regras legítimas), mas pode estar desnecessariamente longa.

É possível definir um processo genérico de “encurtar” essa dedução de modo a obter uma dedução o mais simples possível, que é o que chamamos de “prova direta” ou “prova normal”.

Uma prova não-direta (ou não-normal) contém redundâncias. Agora listamos os possíveis tipos de redundância que podem ocorrer.

1) Tipo  $\beta$ : Uma regra de eliminação está sendo aplicada imediatamente após uma regra de introdução para o mesmo operador.

2) Tipo  $\eta$ : Uma regra de introdução está sendo aplicada imediatamente após uma regra de eliminação para o mesmo operador.

## Tipos de redundância

### (1.a) $\beta$ - E

$$\frac{\frac{\frac{\Sigma_1 \quad \Sigma_2}{A_1 \quad A_2}}{A_1 \wedge A_2}}{A_1}}{\Sigma_3} \quad \text{simplifica-se para} \quad \begin{array}{l} \Sigma_1 \\ A_1 \\ \Sigma_3 \end{array} \Rightarrow$$

Percebe-se nesse caso que a introdução de  $A_1 \wedge A_2$  foi irrelevante para a dedução, pois ela foi utilizada para obtermos  $A_1$ , que já tínhamos anteriormente.

Logo, como aplicamos uma eliminação do E logo após introduzi-lo, precisamos utilizar a normalização tipo  $\beta$  para o operador E.

### (1.b) $\beta$ - OU

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_1 & & \\ A_1 & \text{simplifica-se para} & \Sigma_1 \\ \hline A_1 \vee A_2 & \Rightarrow & A_1 \\ \hline \begin{array}{cc} [A_1] & [A_2] \\ \Sigma_2 & \Sigma_3 \\ C & C \end{array} & & \begin{array}{c} \Sigma_2 \\ C \\ \Sigma_4 \end{array} \\ \hline C & & \\ \Sigma_4 & & \end{array}$$

Nessa situação, introduzimos  $A_1 \vee A_2$  e, a partir das suposições  $[A_1]$   $[A_2]$ , chegamos em  $C$  e em  $\Sigma_4$ .

Entretanto, não precisávamos abrir as hipóteses, dado que já tínhamos  $A_1$ . Podemos, sem nenhum problema, ir diretamente de  $A_1$  para  $\Sigma_2$  e depois para  $C$ .

Logo, a redundância em questão foi a introdução do OU seguida de sua eliminação. Fazemos, então, uma normalização tipo  $\beta$  para o operador OU.

### (1.c) $\beta$ - IMPLICA

	[A]		
	$\Sigma_1$		
$\Sigma_2$	B		
	_____		$\Sigma_2$
A	A $\rightarrow$ B	simplifica-se	A
	_____	para	$\Sigma_1$
	B	$\Rightarrow$	B
	$\Sigma_3$		$\Sigma_3$

Introduziu-se  $A \rightarrow B$  e, a partir dessa introdução e de  $A$ , extraímos  $B$  e, conseqüentemente,  $\Sigma_3$ .

Não precisávamos abrir a hipótese de  $A$  para conseguirmos  $B$ , pois já tínhamos  $\Sigma_2$  resultando em  $A$  e, a partir de  $A$ , conseguiríamos  $B$  através de  $\Sigma_1$ .

Ou seja, a introdução do IMPLICA e sua conseqüente eliminação fez com que precisássemos realizar uma normalização tipo  $\beta$  para o operador IMPLICA.

(2.a)  $\eta$  - E

$$\frac{\frac{\Sigma_1}{A_1 \wedge A_2}}{A_1} \quad \frac{\Sigma_1}{A_1 \wedge A_2}}{A_2} \quad \begin{array}{l} \text{simplifica-se} \\ \text{para} \\ \Rightarrow \end{array} \quad \frac{\Sigma_1}{A_1 \wedge A_2}}{\Sigma_2}$$

---

$$\frac{A_1 \wedge A_2}{\Sigma_2}$$

$A_1$  e  $A_2$  foram extraídos de  $A_1 \wedge A_2$  a partir de uma eliminação para, a partir de ambos, concluir-se  $\Sigma_2$

Não era necessário fazermos nenhuma das eliminações, visto que a conclusão  $\Sigma_2$  foi tomada a partir da veracidade simultânea de  $A_1$  e  $A_2$ , ou seja, de  $A_1 \wedge A_2$ , e não de algum dos dois separadamente.

Logo, eliminou-se o E para depois introduzi-lo. Com isso, concluímos que é necessário fazermos uma normalização do tipo  $\eta$  para o operador E.



(2.b)  $\eta$  - OU

$$\frac{\Sigma_1}{A_1 \vee A_2} \quad \frac{[A_1] \quad [A_2]}{A_1 \vee A_2 \quad A_1 \vee A_2} \quad \begin{array}{l} \text{simplifica-se} \\ \text{para} \\ \Rightarrow \end{array} \quad \frac{\Sigma_1}{A_1 \vee A_2} \quad \Sigma_2$$

Nesse caso fizemos de  $A_1 \vee A_2$  para  $[A_1]$  e  $[A_2]$  a eliminação do OU, para concluirmos introduzindo o mesmo  $A_1 \vee A_2$  na hora de fechar a hipótese.

Temos de fazer, então, uma **normalização do tipo  $\eta$  para o operador OU**.

(2.c)  $\eta$  - IMPLICA

$$\frac{\frac{\Sigma_1}{[A] \quad A \rightarrow B}}{B}}{A \rightarrow B} \quad \Sigma_2 \quad \begin{array}{c} \text{simplifica-se} \\ \text{para} \\ \Rightarrow \end{array} \quad \frac{\Sigma_1}{A_1 \rightarrow A_2} \quad \Sigma_2$$

Nesse cenário, extraímos **B** a partir de **[A]** e **A → B**, para depois introduzirmos novamente **A → B** e concluirmos  $\Sigma_2$ .

O IMPLICA foi desnecessariamente eliminado, pois o propósito da sua eliminação foi concluir **B** e, a partir dele, introduzir novamente o mesmo IMPLICA.

Fazemos, então, uma **normalização do tipo  $\eta$**  para o operador IMPLICA.

## Fórmula máxima

Seja  $\pi$  uma árvore de prova que contém redundâncias do tipo  $\beta$ . Então  $\pi$  contém uma fórmula  $\varphi$  que é:

- O resultado de uma regra de introdução.
- A maior premissa de uma regra de eliminação.

Chamamos  $\varphi$  de *fórmula máxima*.

Exemplos ( $\varphi$  em azul):

$$\begin{array}{c}
 1) \quad \Sigma_1 \quad \Sigma_2 \\
 \quad A_1 \quad A_2 \\
 \hline
 \quad A_1 \wedge A_2 \\
 \hline
 \quad A_1 \\
 \hline
 \quad \Sigma_3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 3) \quad [A] \\
 \quad \Sigma_1 \\
 \quad \Sigma_2 \quad B \\
 \hline
 \quad A \quad A \rightarrow B \\
 \hline
 \quad B \\
 \quad \Sigma_3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 2) \quad \Sigma_1 \\
 \quad A_1 \\
 \hline
 \quad A_1 \vee A_2 \\
 \hline
 \begin{array}{cc}
 [A_1] & [A_2] \\
 \Sigma_2 & \Sigma_3 \\
 C & C
 \end{array} \\
 \hline
 \quad C \\
 \quad \Sigma_4
 \end{array}$$

Obs.: Repare que, nos dois primeiros casos, a fórmula máxima é a única premissa da eliminação, logo é também a maior.

## **Procedimento de normalização de provas**

Seja  $\pi$  uma árvore de prova que contém redundâncias:

- 1) Escolha a maior fórmula máxima e aplique redução ali.
- 2) Se ainda há fórmulas máximas, volte ao passo 1.

A saída do procedimento pode conter redundâncias do tipo  $\eta$  e, nesse caso, aplicam-se as reduções do tipo  $\eta$  para se chegar à forma normal.

### **Teorema da Existência da Forma Normal (a.k.a. “teorema da normalização fraca”)**

O procedimento de normalização termina, produzindo uma prova na forma normal (Se  $\Gamma \vdash \varphi$  então existe uma dedução normal de  $\varphi$  a partir de  $\Gamma$ ).

### **Teorema da Unicidade da Forma Normal**

A forma normal de uma prova  $\pi$  é única, independente da ordem de aplicação das regras de redução (esse teorema só garante unicidade quando há somente redundância dos operadores de implicação e de conjunção).

### **Teorema da Normalização Forte**

Qualquer ordem de aplicação das regras de redução leva a uma forma normal.

## Conclusão

O método da dedução natural pode ser sempre aplicado sem redundâncias, e quando uma dedução estiver redundante, ela pode ser simplificada com regras de normalização.

Existem dois tipos de normalização e três casos para cada tipo. Além disso, podemos normalizar em tempo finito e, como não importa a ordem da aplicação das regras, sempre obteremos uma mesma prova normal para cada dedução.