

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Centro de Informática (CIn)
Graduação em Ciência da Computação e Engenharia da Computação

Lógica para Computação
(IF673)
2º Semestre de 2008
2ª Mini-Prova
20 de Agosto de 2008

1. $(1,0)$ (Conjuntos Indutivos)

Considere o conjunto C das cadeias binárias que tenham o formato ww onde w é uma cadeia binária. (Ou seja, C é o conjunto das cadeias que podem ser divididas ao meio resultando em duas metades idênticas.) Dê uma definição indutiva para C , e identifique: o conjunto 'base' da geração indutiva (i.e., X), e o conjunto de funções geradoras (i.e., F). (Dica: a função de concatenação, ao tomar duas palavras w e v como argumentos de entrada, retorna a palavra wv .)

O conjunto base é $X = \{\varepsilon\}$.

Considere BITS o conjunto de todas as cadeias de bits. O conjunto F das funções geradoras é $F = \{f, g\}$ onde:

$f: \text{BITS} \rightarrow \text{BITS}$
 $f(w) = 0w'0w''$

$g: \text{BITS} \rightarrow \text{BITS}$
 $g(w) = 1w'1w''$

Onde w' e w'' representam a primeira e a segunda metades da cadeia w , respectivamente. Para gerar o conjunto pedido, basta aplicar indutivamente as funções do conjunto F à base.

Obs: as funções de F também poderiam ter sido definidas da seguinte forma:

$f: \text{BITS} \rightarrow \text{BITS}$
 $f(w) = w'0w''0$

$g: \text{BITS} \rightarrow \text{BITS}$
 $g(w) = w'1w''1$

(i) Descreva em poucas palavras quais são: o menor e o maior conjunto indutivo de X sob F .

Para que um conjunto seja indutivo em relação à base X e ao conjunto de funções F , duas condições devem ser respeitadas:

- i) o conjunto deve conter a base X ;
- ii) o conjunto deve ser fechado sob todas as operações de F .

O conjunto definido em I) possui apenas as cadeias que atendem à propriedade de pedida (resultar em duas metades idênticas ao serem quebradas ao meio) e atende às condições i) e ii). Logo é o menor conjunto (fecho) indutivo.

O conjunto BITS também respeita as condições i) e ii), logo também é indutivo. Como não há outro conjunto de cadeias de bits maior do que BITS, ele é o maior conjunto indutivo.

(ii) Considerando suas definições de quem é X e quem são as funções de F , podemos dizer que o conjunto C é livremente gerado?

Para que o fecho indutivo de X sob F seja livremente gerado, as três condições devem ser satisfeitas:

- i) todas as funções de F sejam injetoras em relação ao fecho indutivo;
- ii) os conjuntos imagem sob o fecho indutivo das funções de F devem ser disjuntos;
- iii) nenhuma função de F sob o fecho indutivo pode gerar elementos da base X .

Em outras palavras, para ser livremente gerado, cada elemento do fecho deve ser gerado de forma única. Se a base X e o conjunto F forem definidos como em I), o fecho indutivo satisfará as três condições e portanto será livremente gerado.

Caso o fecho tenha sido definido diferente de I), é preciso verificar se as três condições são satisfeitas.

Para todas as respostas, em caso positivo, demonstre; em caso negativo, justifique adequadamente.