Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Centro de Informática (CIn)
Graduação em Ciência da Computação e Engenharia da Computação

Lógica para Computação

(IF673)
2º Semestre de 2008
3ª Mini-Prova
03 de setembro de 2008

1. (1,0) (Sintaxe da Lógica Proposicional)
Defina uma função que, ao receber uma proposição φ, conta o número de variáveis distintas que ocorrem em φ. Use essa função para provar que, para toda φ pertencente PROP, o número de variáveis distintas ocorrendo em φ é no máximo igual ao número de subproposições de φ.

O primeiro passo para resolver questões de prova por indução sobre a complexidade de alguma fórmula é definir as funções recursivas envolvidas. Neste caso precisamos definir uma função que calcule o número de variáveis distintas e outra que calcule o número de subexpressões de uma expressão.

I)Definição das funções

1)Função *f* que retorna o conjunto contendo as variáveis distintas

f: PROP → *P*(PROP)
f(E) = {E} se ‘E’ for atômica
f((¬E)) = f(E)
f((E1 □ E2)) = f(E1) U f(E2)

Como f(E) retorna o conjunto que contém as variáveis que ocorrem em ‘E’, basta aplicarmos |f(E)| para obtermos o número de variáveis distintas.

2)Função *g* que retorna o conjunto com as subexpressões

g: PROP → *P*(PROP)
g(E) = {E} se ‘E’ for atômica
g((¬E)) = {(¬E)} U g(E)
g((E1 □ E2)) = {(E1 □ E2)} U g(E1) U g(E2)

Como g*(E)* retorna um conjunto cujos elementos são as subexpressões de E, |g*(E)*| retorna o número de subexpressões de E.

Dados dois conjuntos A e B, se B é subconjunto de A (ou seja, B ⊆ A), então temos que |B| ≤ |A|. Como |f(E)| e |g(E)| representam o número de variáveis distintas e o de subexpressões de ‘E’ respectivamente, se provarmos que $f(E) \subseteq g(E)$, então estará provado que $|f(E)| \leq |g(E)|$. Conseqüentemente, estará provado que o número de variáveis distintas numa fórmula é no máximo igual ao número de subexpressões da mesma.

Portanto vamos provar que para toda fórmula ‘E’ da lógica proposicional, <u>$f(E) \subseteq g(E)$.</u>

II)Prova por indução

1)Caso base: ‘E’ é atômica

$$f(E) \subseteq g(E)$$
$$\{E\} \subseteq \{E\}$$

OK

2)Casos indutivos:

2a) Operador unário: negação

H.I.: $f(E) \subseteq g(E)$

TESE: $f((\neg E)) \subseteq g((\neg E))$

$$f(E) \subseteq \{(\neg E)\} \cup g(E)$$

Pela H.I. temos que $f(E) \subseteq g(E)$. Logo, $f(E) \subseteq \{(\neg E)\} \cup g(E)$. c.q.d.

2b) Operadores binários

H.I.: $f(E1) \subseteq g(E1)$ *e* $f(E2) \subseteq g(E2)$

TESE: $f((E1 \square E2)) \subseteq g((E1 \square E2))$

$$f(E1) \cup f(E2) \subseteq \{(E1 \square E2)\} \cup g(E1) \cup g(E2)$$

Considere quatro conjuntos A, B, C e D. Se $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$, então é verdade que $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$. Pela H.I. sabemos que $f(E1) \subseteq g(E1)$ e que $f(E2) \subseteq g(E2)$ e portanto $(f(E1) \cup f(E2)) \subseteq (g(E1) \cup g(E2))$.

Como $(f(E1) \cup f(E2)) \subseteq (g(E1) \cup g(E2))$, também é verdade que $(f(E1) \cup g(E2)) \subseteq (\{(E1 \square E2)\} \cup g(E1) \cup g(E2))$ e dessa forma provamos a nossa tese.

Com todos os casos indutivos provados fica provado que, para toda fórmula da lógica proposicional, o conjunto formado pelas varáveis de uma fórmula (f(E)) é subconjunto do conjunto de subexpressões da mesma (g(E)). Portanto, o número de variáveis distintas (|f(E)|) é no máximo igual ao número de subexpressões (|g(E)|).