Monitoria Matemática Discreta - MP8 - 2013.1

Grafos

Guilherme Peixoto e Duhan Caraciolo

Motivação


Praça de Boa Viagem - Rua Doutor Nylo Dorn
UFPE, Recife - Pernambuco
Talvez você queira outro endereço: UFPE, Recife - Pernambuco
Adicionar destino - Mostrar opções
COMO CHEGAR
Trajetos sugeridos
Av. Recife
13,4 km, 24 min
No tráfego atual: 29 min
BR-101
16,9 km, 28 min
No tráfego atual: 39 min
Av. Mal. Mascarenhas de Morais e Av. Recife
16,4 km, 30 min
No tráfego atual: 37 min
Recife
Várzea
Iputinga
Cordeiro
Graças
Encruzilhada
Salgadinho
Amarela
Derby
Prado
Paissandu
Torrões
San Martin
Afogados
São José
Bacia Portuária
Curado IV
Curado
Jardim São Paulo
Cavaleiro
Barragem Duas Unas
Santo Aleixo
Areias
Pina
Primeiro Jardim de Boa Viagem
Barro
Sucupira
Socorro
Imbiribeira
Jaboatão dos Guararapes
Moreno
R. Brasil
Cohab
Ibura
Boa Viagem
UR-06
Jordão
Jardim Jordão
Muribeca
Estr. p/ Eng. Macujê
408
232
101
PE-007

Motivação

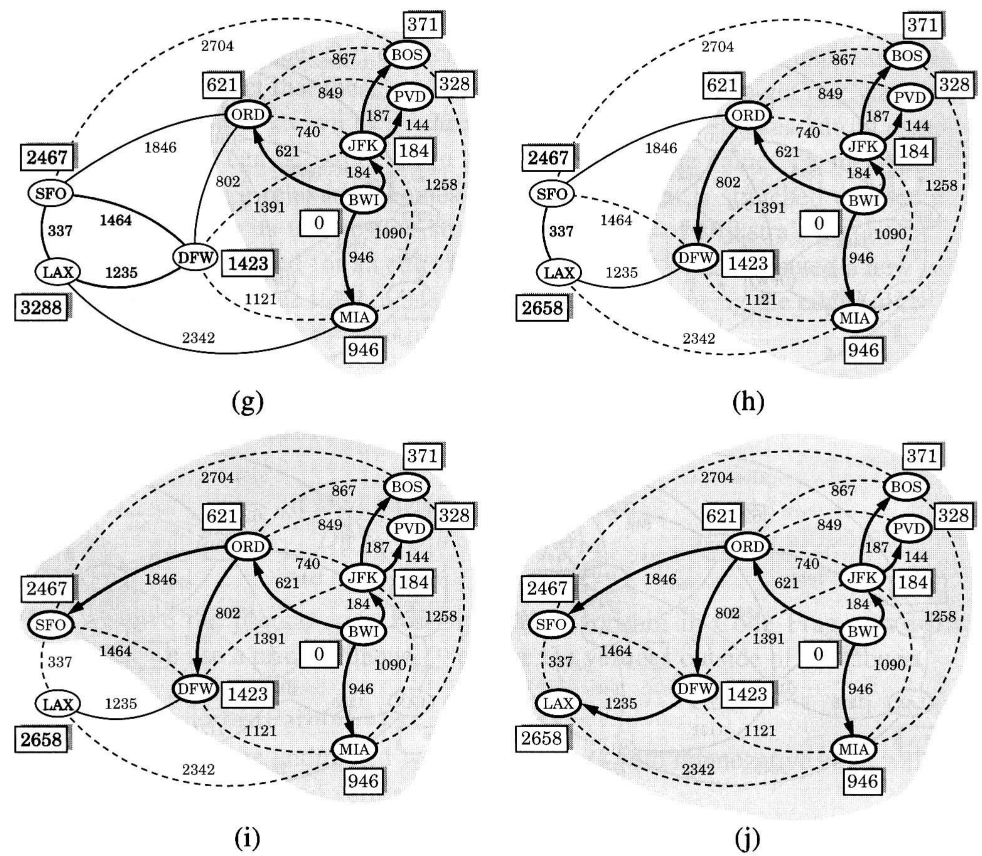
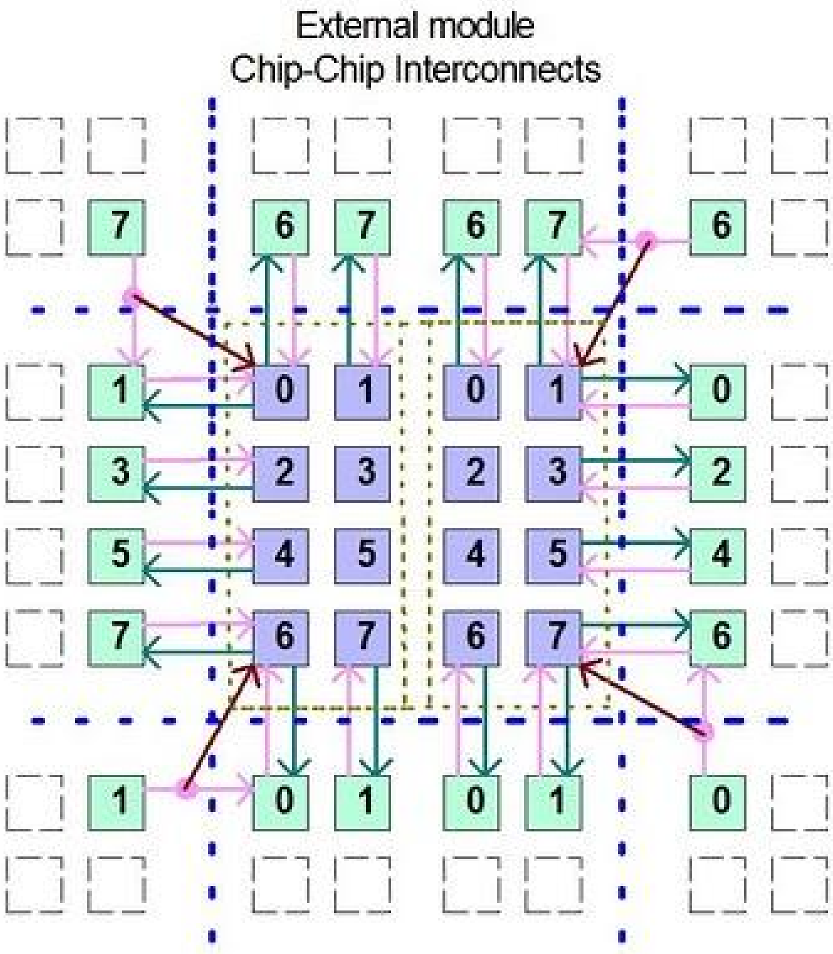
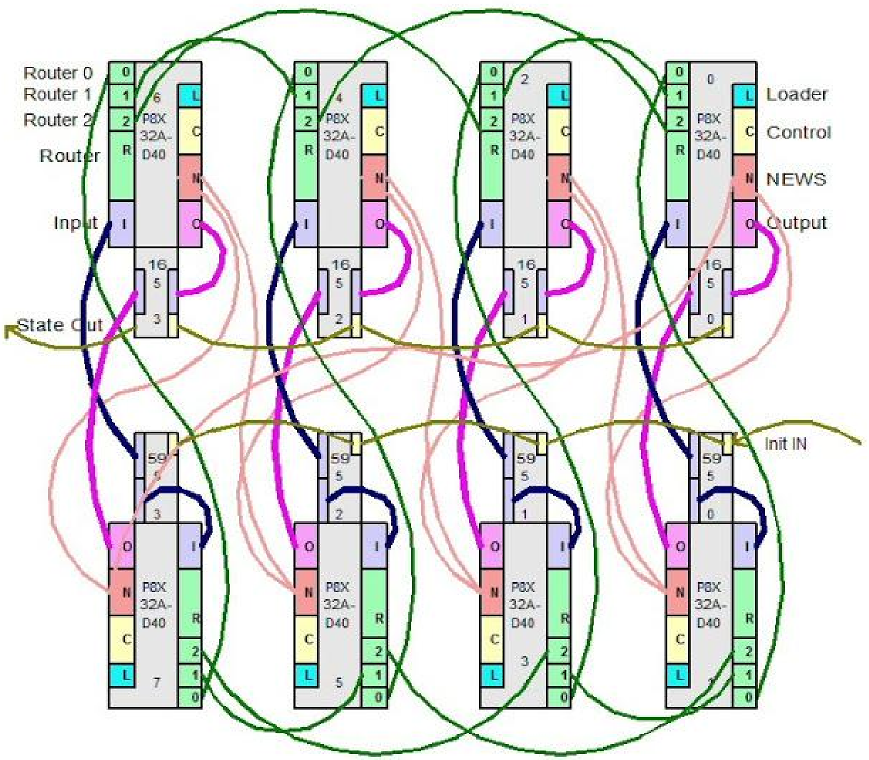


Figure 13.15: An example execution of Dijkstra's algorithm. (Continued from Figure ref:dijkstra:example:1.)

Motivação



External module
Chip-Chip Interconnects



Router 0
Router 1
Router 2
Router
Input
State Out
Loader
Control
NEWS
Output
Init IN

Definições (vai ter um **bocado**)

- Um grafo **G=(V,E)** é um conjunto V não vazio de vértices (ou nós) e um conjunto de arestas (pares não ordenados de elementos* de V);

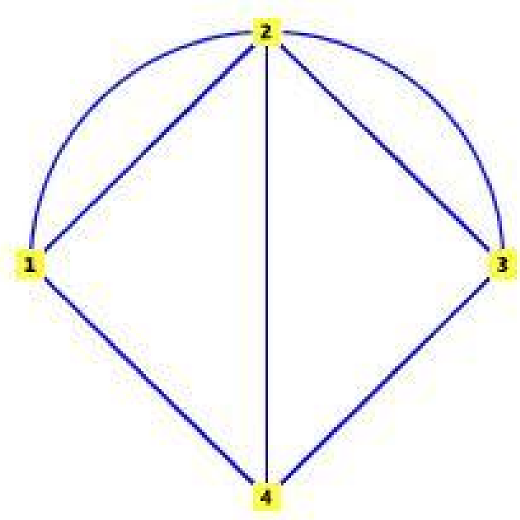
- Cada aresta ***e*** pertencente ao conjunto E é denotado por **{x, y}**, de forma que ***x*** e ***y*** são *extremos* da aresta ***e;***

- Dois vértices são adjacentes se e somente se existe uma aresta unindo-os; duas arestas são adjacentes se e somente se têm ao menos um vértice em comum;

- Os vértices *(u,v)* são ***incidentes*** na aresta *e* se e somente se eles são extremos de *e* (de forma que *e* é incidente aos vértices *u, v)*

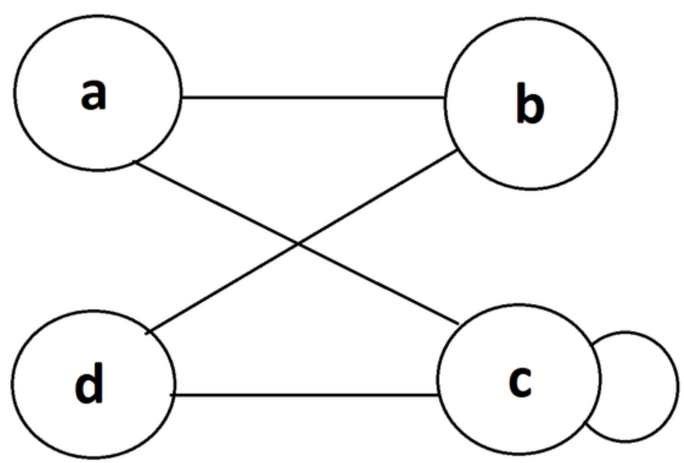
Definições (ainda tem bastante)

- Multigrafo
  - Informalmente: grafo que contém arestas múltiplas
  - Função *f* de E em $\{\{u,v\} \mid u,v \in V, u \neq v\}$
  - As arestas *e1* e *e2* são chamadas de múltiplas caso $f(e1)=f(e2)$



Definições (ainda tem um moi)

- Pseudografo
  - Informalmente: grafo que contém laços
  - Laço: uma aresta formada por um par de vértices idênticos -> f(e) = {u,u} = {u]
  - Função *f* de E em {{u,v} | u,v ∈ V}



Definições (acaba não)

- Grau de um vértice: grau(v)
  - número de arestas que incidem em *v* (ou o número de arestas adjacentes a *v*)
  - um laço conta duas vezes para o grau!
  - grau(v)=0 -> vértice **isolado;**
  - grau(v)=1 -> vértice **pendente;**
  - vértice ímpar, par -> número ímpar/par de arestas
  - Grafo **k-regular:** todos os vértices têm o mesmo grau *k*

Para o quê é realmente importante saber grau do vértice:

Soma dos graus de um grafo (acabou definições!!!!)

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|E|$$

E se o grafo é *regular* de *grau r?*

$$\sum_{v \in V} g(v) = r|v| \Rightarrow 2|E| = r|v| \Rightarrow |E| = \frac{r|v|}{2}$$

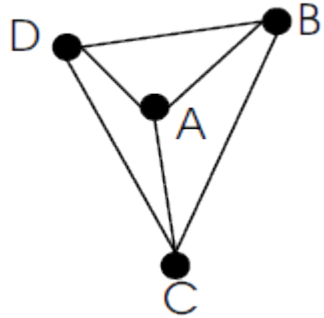
Definições (nop, ainda tem mais)

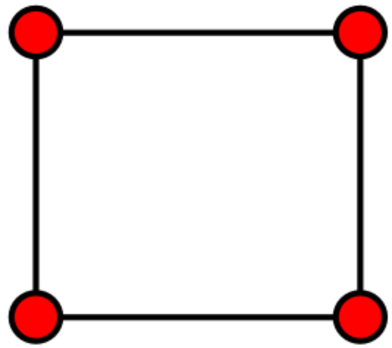
- Grafo *k-regular*: n vértices, todos de grau k
- Grafo completo (Kn): n vértices, todo vértice v -> grau(v) = n-1
  - Tipo específico de grafo regular
  - |E| = (r * |v|) / 2
  - |E| = ((n - 1) n) / 2
- Grafo nulo (Nn): n vértices, 0 arestas
- Grafo cíclico (Cn): grafo regular de grau 2 com n vértices
- Grafo roda (Wn): grafo obtido a partir do Cn através da ligação de cada vértice do Cn a um novo vértice v
- Grafos n-cúbicos (Qn): grafos cujos vértices representam as 2^n cadeias de bits de tamanho n
  - Propriedade: dois vértices do Qn são adjacentes se e somente se as cadeias diferem por apenas um bit
  - Como são os grafos Q2 e Q3?
- Grafos orientados (dígrafos): quando o par que representa uma aresta é *ordenado* (ex: (1,2) != (2,1))
  - grau de entrada(v): quantas arestas chegam no vértice *v*
  - grau de saída(v): quantas arestas partem do vértice *v*
  - Sum(grau_in(vi)) = Sum(grau_out(vi)) = | A |
- Grafo Bipartido: quando é possível separar o conjunto de vértices V em dois subconjuntos V1 e V2 tal que todas as arestas une um vértice de V1 a um vértice de V2

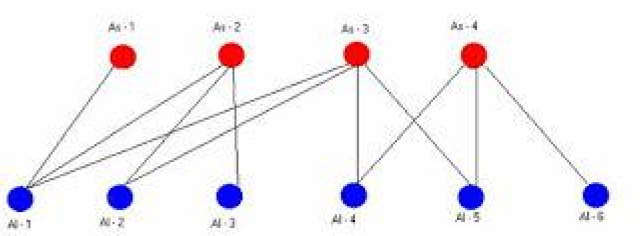
Definições (agora acabou mesmo)

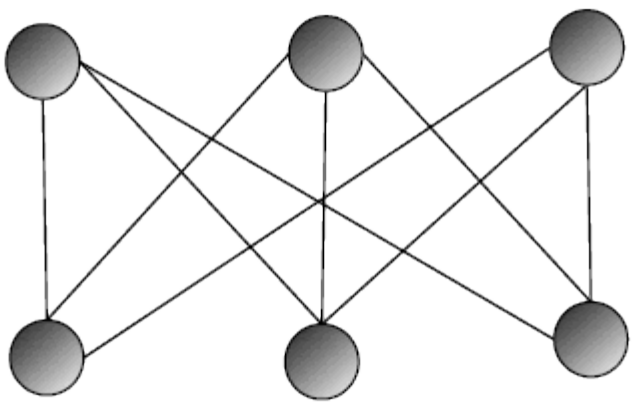
- Grafo complementar: um grafo G’ é complementar de G se e somente se:
  - V = V’
  - Dois vértices são adjacentes em G’ se e somente se não são em G
  - Grafo regular -> complemento regular
- Grafo bipartido completo K(m,n): um grafo é bipartido em V1 e V2, porém será completo se todo vértice em V1 é adjacente a todo vértice de V2
- Subgrafo: um grafo G’ é subgrafo de um grafo G se o seu conjunto de vértices e arestas (V’, A’) está contido em V e A (respectivamente)
  - Subgrafo próprio: quando G’ é distinto de G

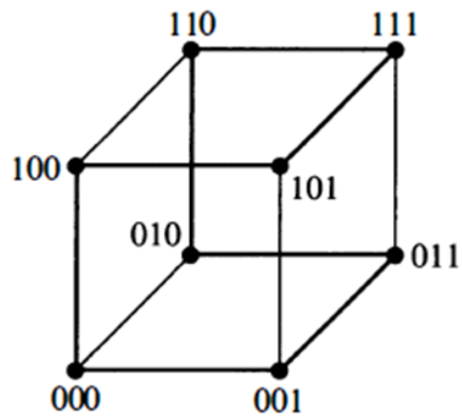
Grafos (agora acabou mesmo)

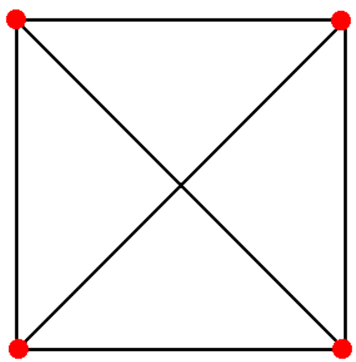










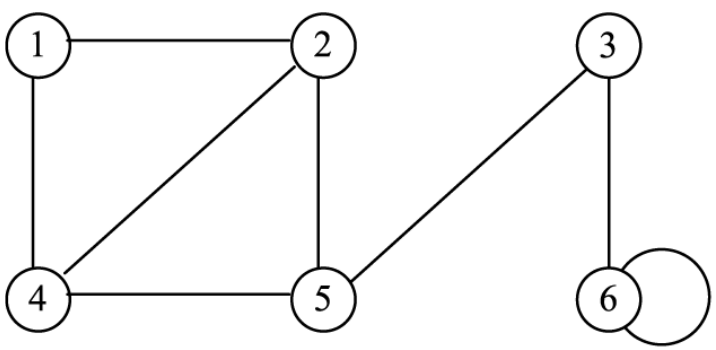


Questões

1. Para que valores de *m* e *n* K(m,n) é regular?
2. Qual o grafo complementar de K(m,n)?
3. Para que valores de *n* Cn, Kn são bipartidos?
4. Quantos vértices possui um grafo regular de grau 4 com 10 arestas?
5. Qual o complemento do grafo Qn?
6. Para um grafo regular G de *n* vértices e *m* arestas, quantas arestas tem o complemento de G?
7. “Questão”: prove que para todo grafo, o número de vértices com grau ímpar deve ser par

Representação de Grafos

1. Matriz de Adjacências
2. Lista de Adjacências
3. Tabela com vértices inciais e finais
4. Matriz de Incidência

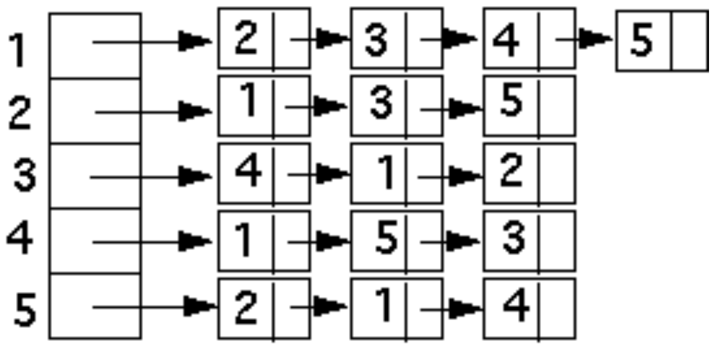


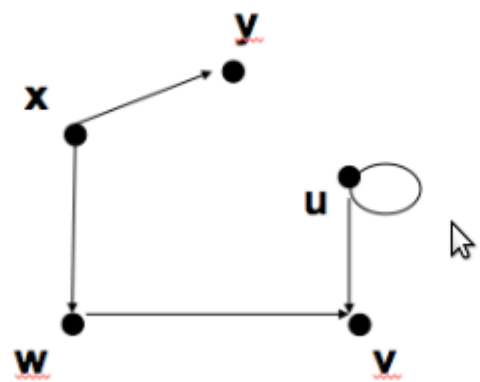
(a)

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	1	0	0	1	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	1	1	0	0	1	0
5	0	1	1	1	0	0
6	0	0	1	0	0	1

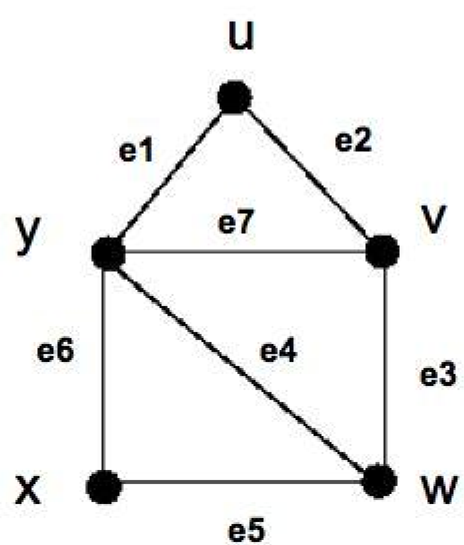
(b)

Representação de Grafos





Iniciais	Terminais
u	u,v
v	
w	v
x	w,y
y	



	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7
u	1	1	0	0	0	0	0
v	0	1	1	0	0	0	1
w	0	0	1	1	1	0	0
x	0	0	0	0	1	1	0
y	1	0	0	1	0	1	1

Isomorfismo de Grafos

Dois grafos simples G1 e G2 são isomorfos se existe uma correspondência um a um (função f) entre os vértices de G1 e G2, com a propriedade de que a e b são adjacentes em G1 se e somente se f(a) e f(b) são adjacentes em G2, para todo a,b V1. A função f é chamada de isomorfismo.

Invariantes devem ser mantidas:

- G1 e G2 têm o mesmo número de vértices;
- G1 e G2 têm o mesmo número de arestas;
- G1 e G2 têm os mesmos graus de vértices

Não existe algoritmo ótimo para determinar isomorfismo entre dois grafos (melhor resultado até hoje foi $2^{O(\sqrt{(n \log n)})}$ - 2008)

Isomorfismo de Grafos

Determine se os grafos abaixo são isomorfos: