Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Centro de Informática (CIn)

Matemática Discreta (IF760)

Primeira Mini-Prova (2009-1)

1. (0,5) Use as identidades entre conjuntos para determinar se a seguinte afirmação é verdadeira: "Sejam ***A*** e ***B*** conjuntos arbitrários, então,

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

Há várias possibilidades: desenvolver o lado esquerdo apenas, o lado direito apenas ou desenvolver ambos os lados. O importante é que as fórmulas obtidas nos dois lados sejam iguais.

I) Desenvolvendo o lado esquerdo:

$$(A \cup B) - (A \cap B) \therefore (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) \therefore (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \therefore$$
$$((A \cup B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cup B) \cap \overline{B}) \therefore$$
$$((A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A})) \cup ((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B})) \therefore$$
$$(\{\} \cup (B \cap \overline{A})) \cup ((A \cap \overline{B}) \cup \{\}) \therefore (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \therefore$$
$$(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \therefore (A - B) \cup (B - A)$$

II) Desenvolvendo o lado direito:

$$(A - B) \cup (B - A) \therefore (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \therefore$$
$$((A \cap \overline{B}) \cup B) \cap ((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}) \therefore$$
$$((A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B)) \cap ((A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})) \therefore$$
$$((A \cup B) \cap U) \cap (U \cap (\overline{B} \cup \overline{A})) \therefore$$
$$(A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \therefore (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \therefore$$
$$(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) \therefore (A \cup B) - (A \cap B)$$

---

2. (0,5) Se A é enumerável e B é não enumerável então $A \cap B$ é enumerável? Justifique sua resposta usando uma prova.

P1: A é enumerável
P2: B não é enumerável
Q: $A \cap B$

1) Todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável. Logo, de P1, todo subconjunto de A é enumerável.

2) Todo elemento de $A \cap B$ também é elemento de A. Logo $A \cap B \subseteq A$.

3) De 1 e 2 temos que $A \cap B$ é enumerável.

---

3. (0,5) Encontre o menor inteiro *n* de forma que $f(x)$ é $O(x^n)$ para cada uma das seguintes funções. Justifique cada resposta (resposta sem justificativa não é considerada).

a) $f(x) = 2x^2 + x^3(\log x)^4$

$$f(x) = \underbrace{2x^2}_{O(x^2)} + \underbrace{x^3}_{O(x^3)} \underbrace{(\log x)^4}_{O(x^4)}$$

$$O(\max(x^2, (x^3 * x^4)))$$

$$O(\max(x^2, x^7)) \Rightarrow O(x^7)$$

$$n = 7$$

b) $f(x) = \lfloor x \rfloor \lceil x \rceil$

$$f(x) = \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{O(x)} * \underbrace{\lceil x \rceil}_{O(x)}$$

$$O(x * x)$$

$$O(x^2)$$

$$n = 2$$

---

4. (0,5) Use indução matemática para provar que $n^2 - 7n + 12$ é um inteiro não negativo, para *n* inteiro e maior que 3.

I) Caso base: n = 4

$$4^2 - 7.4 + 12 \geq 0$$

$$16 - 28 + 12 \geq 0 \therefore 0 \geq 0 \quad \text{OK}$$

II) Hipótese indutiva: n = k

$$k^2 - 7.k + 12 \geq 0 \qquad \text{H.I.}$$

III) Tese: n = k+1

$$(k+1)^2 - 7.(k+1) + 12 \geq 0$$

$$k^2 + 2k + 1 - 7k - 7 + 12 \geq 0$$

$$\underbrace{k^2 - 7k + 12}_{H.I} + 2k - 6 \geq 0$$

Pela H.I., a expressão marcada é não-negativa. Mas *2k-6* também é não-negativo (uma vez que *k > 3*) . Como a soma de dois inteiros não-negativos é um inteiro não-negativo, a tese está provada.
