UFPE - CIn - Matemática Discreta - IF670 - Mini-Prova 3 -16/10/2009

1 (0,5) Encontre a menor relação que contenha a relação {(1,2), (1,4), (3,3), (4,1)} e que seja reflexiva e transitiva.

Vamos considerar $R = \{(1,2),(1,4),(3,3),(4,1)\}$. Primeiro vamos achar o fecho transitivo de R e em seguida tornar o resultado uma relação reflexiva.

I. FECHO TRANSITIVO DE R (R*)

Como temos 4 elementos no domínio, então $R^* = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$.

a) $R^1 = R$

b) $R^2 = R \circ R = \{(1,1),(3,3),(4,2),(4,4)\}$

c) $R^3 = R^2 \circ R = \{(1,2),(1,4),(3,3),(4,1)\} = R$

d) $R^4 = R^3 \circ R = \{(1,2),(1,4),(3,3),(4,1)\} = R^2$

Logo, $R^* = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 = \{(1,2),(1,4),(3,3),(4,1),(1,1),(4,2),(4,4)\}$.

II. TORNANDO REFLEXIVA

Basta agora realizar a união com a relação diagonal $\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\}$.

$R^* \cup \Delta = \{(1,2),(1,4),(3,3),(4,1),(1,1),(4,2),(4,4)\} \cup \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

$R^* \cup \Delta = \{(1,2),(1,4),(3,3),(4,1),(1,1),(4,2),(4,4),(2,2)\}$

2 (0,5) Se R é uma relação reflexiva e transitiva então $R^n = R$ para todo inteiro positivo n? Justifique a sua resposta apresentando uma prova caso a resposta seja afirmativa ou um contra-exemplo, caso contrário.

A afirmação é verdadeira. Prova por indução:

I. BASE (n = 1): $R^1 = R$

Pela definição de potência de uma relação, $R^1 = R$.

II. HIPÓTESE INDUTIVA (n = k): $R^k = R$

III. TESE (n = k + 1): $R^{k+1} = R$

Como R é transitiva, para todo m inteiro positivo, $R^m \subseteq R$. Logo, $R^{k+1} \subseteq R$. Basta então provar que $R \subseteq R^{k+1}$.

Considere $(a,b) \in R$. Pela HI, $R^k = R$ e, portanto R^k é reflexiva. Como R^k é reflexiva, temos que $(b,b) \in R^k$.

Pela definição de potência de relação, $R^{k+1} = R^k \circ R$. Ora, se temos que $(a,b) \in R$ e $(b,b) \in R^k$, também temos que $(a,b) \in R^{k+1}$. Logo, $R \subseteq R^{k+1}$.

Finalmente, se $R^{k+1} \subseteq R$ e $R \subseteq R^{k+1}$, é verdade que $R^{k+1} = R$.

3 (1,0) Seja $\sum$ um alfabeto e $\sum^*$ o conjunto de todas as palavras sobre $\sum$. Então:

a) Encontre uma relação de equivalência em $\sum$ de modo que haja apenas uma classe de equivalência.

Para haver apenas uma classe de equivalência, todos os elementos devem se relacionar com os demais. Logo, a relação R_1 deve conter todos os pares ordenados possíveis, ou seja, $R_1 = \Sigma \times \Sigma$. Em outras palavras, $R_1 = \{(a,b) \mid a, b \in \Sigma\}$.

b) Encontre uma relação de equivalência em $\sum$ de maneira que todas as classes de equivalência sejam unitárias.

Vamos definir uma relação R_2 tal que as classes de equivalência sejam unitárias.

A classe de equivalência de um elemento a do domínio (neste caso, $\sum$) é $[a]_{R_2} = \{s \mid (a,s) \in R_2\}$. Como R_2 deve ser reflexiva e cada classe de equivalência deve ser unitária, então $R_2 = \{(a,b) \mid a = b\}$.

c) Particione de alguma forma $\sum^*$ de maneira a produzir 5 classes de equivalência. Construa a relação de equivalência induzida.

Há mais de uma solução. Uma solução simples utiliza aritmética modular. Dada uma palavra s de $\sum^*$, $|s|$ representará o tamanho da palavra s.

Podemos definir uma relação R_3 para produzir 5 classes de equivalência da seguinte forma: $R_3 = \{(a,b) \text{ tal que } |a| \equiv |b| \pmod 5\}$.