**Universidade Federal de Pernambuco**

**Centro de Informática**

**Graduação em Ciência da Computação**

Matemática Discreta - IF670 – Mini Prova 3 - 29/10/2010

1. (0,6) Indique a relação S tal que, unida à relação R = {(1,2), (2,3), (3,1)} do conjunto A = {1, 2, 3, 4}, define o fecho de R:
	1. Reflexivo

S = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)}

* 1. Simétrico

S = {(2,1), (3,2), (1,3)}

* 1. Transitivo

S = {(1,3), (2,1), (3,2), (3,3), (1,1), (2,2)}

1. (0,4) Determine e justifique se o fecho com respeito à propriedade P da relação R = {(0,0), (0,1), (1,1), (2,2)} no conjunto {0, 1, 2} existe ou não, se P é a propriedade:
	1. “não é reflexiva”.

O fecho de uma relação R relativo a uma propriedade P é a menor relação que contém os elementos de R e que possui a propriedade P. Com o R dado, é impossível adicionarmos elementos a essa relação para torná-la não-reflexiva, pois ela já possui os pares (0,0), (1,1) e (2,2). Portanto esse fecho não existe para essa relação.

* 1. “possui um número ímpar de elementos”.

Há várias relações que contêm R e possuem número ímpar de elementos (por exemplo, {(0,0), (0,1), (1,1), (1,2), (2,2)}), mas nenhuma delas é subconjunto das demais. Logo, o fecho para essa propriedade não existe.

1. (1,0) Uma relação R sobre um conjunto A é circular se para todo $x,y,z\in A$, se $(x,y)\in R$ e $(y,z)\in R$ então $(z,x)\in R$. Mostre que R é reflexiva e circular se e somente se R é uma relação de equivalência.

Relação Circular: $xRy∧yRz\rightarrow zRx$

Temos que provar que: R é circular e reflexiva $\leftrightarrow $ R é uma relação de equivalência

1. Ida ($\rightarrow $)

R é circular e reflexiva $\rightarrow $ R é uma relação de equivalência (reflexiva, simétrica e transitiva).

* Reflexiva: ok! Já foi dito que R é reflexiva.
* Simétrica:

 $\left(x,y\right)\in R∧\left(y,y\right)\in R \left(pois R é reflexiva\right)\rightarrow \left(y,x\right)\in R (pois R é cirular)$

Logo $\left(x, y\right)\in R\rightarrow (y, x)\in R$, então R é simétrica.

* Transitiva:

 $\left(x,y\right)\in R∧\left(y,z\right)\in R\rightarrow \left(z,x\right)\in R (pois R é circular) $

 $\left(z,x\right)\in R\rightarrow \left(x,z\right)\in R \left(pois R é reflexiva\right)$

Logo $\left(x, y\right)\in R∧\left(y, z\right)\in R\rightarrow \left(x, z\right)\in R$, então R é transitiva.

1. Volta ($\leftarrow $)

R é uma relação de equivalência $\rightarrow $ R é circular e reflexiva.

Se R é uma relação de equivalência, R é reflexiva (ok), simétrica e transitiva. Falta, então, mostrar que R é circular:

 $\left(x,y\right)\in R∧\left(y,z\right)\in R\rightarrow \left(x,z\right)\in R$ (pois R é transitiva)

 $\left(x,z\right)\in R\rightarrow \left(z,x\right)\in R$ (pois R é simétrica)

Logo $\left(x, y\right)\in R∧\left(y, z\right)\in R\rightarrow \left(z, x\right)\in R$, então R é circular.