**Matemática Discreta (IF670)**

**3ª Mini-Prova (2011.2) – 26 de outubro de 2011**

**1.** Determine se as seguintes sentenças são verdadeiras ou falsas e justifique cada resposta.

1. **(0,4)** $a≡b \left(mod c\right)⇒\left(a+x\right)≡\left(b+x\right)(mod (c+x))$

**Solução:**

Falso. Podemos provar que essa sentença é falsa apresentando um contra-exemplo. Atribuindo, por exemplo, 2 a $a$, 4 a $b$, 2 a $c$ e 3 a $x$, vemos que a sentença não se confirma.

$$4≡2 \left(mod 2\right)$$

$$(4+3)≢(2+3) (mod (2+3))$$

1. **(0,4)** $a≡b \left(mod c\right)⇒ax≡bx (mod cx)$

**Solução:**

Verdadeiro.

$$a≡b \left(mod c\right)⇒ax≡bx (mod cx)$$

$\left\{\begin{array}{c}a=ck\_{1}+r\\ b=ck\_{2}+r\end{array}⇒a-b=c(k\_{1}-k\_{2})\right.$

$$\left\{\begin{array}{c} ax=cxk\_{1}^{'}+r^{'}\\bx=cxk\_{2}^{'}+r^{'}\end{array}⇒ax-bx=cx\left(k\_{1}^{'}-k\_{2}^{'}\right)⇒x\left(a-b\right)=xc\left(k\_{1}^{'}-k\_{2}^{'}\right)\right.$$

$$⇒a-b=c\left(k\_{1}^{'}-k\_{2}^{'}\right)$$

$$ \left\{ \begin{array}{c}a-b=c\left(k\_{1}-k\_{2}\right)\\a-b=c\left(k\_{1}^{'}-k\_{2}^{'}\right)\end{array}⇒\right.k\_{1}-k\_{2}=k\_{1}^{'}-k\_{2}^{'}$$

Pode-se provar também dessa forma:

$$a≡b \left(mod c\right)\rightarrow c|(a-b)\rightarrow a-b=cm, m\in Z $$

Multiplicando a expressão $1$ por um inteiro $x$, temos:

$$x(a-b) = xcm\rightarrow ax-bx = cxm\rightarrow cx|(ax-bx)\rightarrow ax≡bx (mod cx)$$

1. **(0,4)** $\left(\left(a≡b \left(mod c\right)\right)∧\left(x≡y \left(mod z\right)\right)\right)⇒\left(a+x\right)≡(b+y) (mod (c+z))$

**Solução:**

Falso. Podemos provar que essa sentença é falsa apresentando um contra-exemplo. Atribuindo, por exemplo, 9 a $a$, 2 a $b$, 7 a $c$, 11 a $x$, 3 a $y$ e 4 a $z$, vemos que a sentença não se confirma.

$$\left(\left(9≡2 \left(mod 7\right)\right)∧\left(11≡3 \left(mod 4\right)\right)\right)$$

$$\left(9+11\right)≢(2+3) (mod (7+4))$$

**Correção:**

* Acertou: pontuação total.
* Acertou mas errou na demonstração: metade.
* Errou: 0,0

**2. (0,4)** Aplique o Teorema Chinês do Resto para encontrar X, dado que: X ≡ 5 (mod 7), X ≡ 3 (mod 5) e X ≡ 2 (mod 9).

**Solução:**

**M = 7.5.9 = 315**

**M1 = 45, M2 = 63, M3 = 35**

Y1.M1 ≡ 1(mod7)

Y1.45 ≡ 1(mod7)

Y1.3 ≡ 1(mod7)

**Y1 = 5**

Y2.M2 ≡ 1(mod5)

Y2.63 ≡ 1(mod5)

Y2.3 ≡ 1(mod5)

**Y2 = 2**

Y3.M3 ≡ 1(mod9)

Y3.63 ≡ 1(mod9)

Y3.3 ≡ 1(mod9)

**Y3 = 8**

X ≡ 5.5.45 + 3.2.63 + 2.8.35 (mod 315)

X≡ 2963 (mod 315) ≡ **173 (mod 315)**

**Correção:**

* Acertou (basta montar a equação final): **0,4**.
* Acertou o algoritmo do Teorema, mas errou nos cálculos: **0,3**.
* Errou: 0,0

**3.** **(0,4)** Aplique o algoritmo de Euclides para calcular os dois menores inversos positivos de 7 mod 26.

**Solução:**

26 = 3.7 + 5 (logo 5 = 26 - 3.7 (I) )

7 = 1.5 + 2 (logo 2 = 7 – 1.5 (II) )

5 = 2.2 + 1 (logo 1 = 5 - 2.2 (III) )

Substituindo II em III: 1 = 3.5 – 2.7 (IV)

Substituindo I em IV: 1 = 3.26 – 11.7

O primeiro inverso positivo de 7 mod 26 é -11+ 26 = **15**

O segundo inverso positivo de 7 mod 26 é 15 + 26 = **41**

**Correção:**

* Acertou: **0,4**.
* Acertou sem usar o algoritmo de Euclides: **0,2**.
* Errou: 0,0