Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Centro de Informática (CIn)
Graduação em Ciência da Computação

Matemática Discreta para Computação
(IF670)
1^o Semestre de 2013
6^a Miniprova
Recife, 15 de Agosto de 2013

1 (0,5) Relações de Equivalência

1. **(0,5)** Quantos dos inteiros $\{0, 1, ..., m-1\}$ são primos em relação a m? Esta é uma quantidade importante denotada por $\phi(m)$ e chamada "totiente" de m. (O nome em inglês, 'totiente', foi dado pelo matemático britânico J. J. Sylvester, que gostava de inventar novas palavras.) A função ϕ é chamada função totiente de Euler, porque Euler foi a primeira pessoa a estudá-la. Euler descobriu, por exemplo, que o Teorema de Fermat, que estudamos recentemente, pode ser generalizado para bases que não são primas da seguinte maneira:

   $$n^{\phi(m)} \equiv 1 \quad (mod \quad m), \quad se \quad n \perp m$$

   Mas bem, isto não será importante nesta questão. Há muitas outras propriedades interessantes envolvendo esta função. Nesta questão, iremos utilizá-la apenas para definir uma relação sobre pares ordenados de inteiros.

   Inicialmente, seja $k = \phi(100! \text{ mod } 10000007)$.

   Seja R a relação sobre os pares ordenados de inteiros positivos tal que $((a, b), (c, d)) \in R \longleftrightarrow a^k + b^k = c^k + d^k$. Mostre que a relação R é uma relação de equivalência.

2 (0,5) Ordens Parciais

1. **(0,5)** Seja $(S, \leq)$ um poset. Dizemos que um elemento $y \in S$ **cobre** um elemento $x \in S$ se $x \leq y$ e não existe nenhum elemento $z \in S$ tal que $x \leq z \leq y$. O conjunto de pares (x, y) tais que y cobre x é chamado de **relação de cobertura** de $(S, \leq)$. Qual é a relação de cobertura da ordem parcial $\{(a, b) | a \quad divide \quad b\}$ no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$?