

Matemática Discreta (IF670) - 1ª Avaliação (2002-2) - 24/04/2008

1. (2,5) Diga se as afirmativas a seguir são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta. Respostas sem justificativas ou com justificativas erradas não serão consideradas. Nas questões de conjuntos não usar diagrama de Venn como justificativa.

a) Se a, b e m são inteiros de forma que $m \geq 2$ e $a \equiv b \pmod{m}$, então o $\text{mdc}(a, m) = \text{mdc}(b, m)$;

b) Se $a \equiv b \pmod{c}$ e $x \equiv y \pmod{z}$ então $ax \equiv by \pmod{cz}$.

c) Sejam A, B e C conjuntos arbitrários. Então, $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

d) Sejam A e B conjuntos arbitrários, temos que $B \subseteq \bar{A} \cup (A \cap B)$ sempre é verdade.

e) Se f e g são funções injetoras e é possível construir $f \circ g$, então nem sempre é verdade que $f \circ g$ é injetora.

2. (2,0) Seja a seguinte identidade.

$$3^n = \binom{n}{0} + 2 \binom{n}{1} + \dots + 2^{n-1} \binom{n}{n-1} + 2^n \binom{n}{n}$$

a) Aplique o teorema binomial para provar essa identidade;

b) Prove a identidade usando indução matemática.

3. (1,5) a) Mostre que $2^{340} \equiv 1 \pmod{11}$ usando o pequeno teorema de Fermat;

b) Mostre que $2^{340} \equiv 1 \pmod{31}$ usando o fato de que $2^{340} = 32^{68}$;

c) Conclua (usando o teorema chinês do resto) a partir de (a) e (b) que $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$.

4. (1,0) Dê a melhor estimativa O grande para as seguintes funções. Justifique cada resposta.

a) $f(x) = (x! + 2^x)(x^3 + \log(x^2 + 1))$ **b)** $f(x) = \lfloor x \rfloor \cdot \lceil x \rceil$

Questão extra para quem faltou uma mini-prova

Suponha que m é um inteiro positivo. Use indução matemática para provar que se a e b são inteiros com $a \equiv b \pmod{m}$ então $a^k \equiv b^k \pmod{m}$, onde $k \geq 0$.