tipo A

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) - Centro de Informática (CIn)
Matemática Discreta (IF670) - 1ª Avaliação (2009-1)

1. **(2,8)** Responda no lugar indicado verdadeiro (V) ou falso (F) (**uma resposta errada anula uma certa**).

(V) Se x é um número real que não é um inteiro então sempre é verdade que $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 1$.

(V) Se A é um conjunto não enumerável e B é um conjunto enumerável então $A - B$ é não enumerável.

(F) Uma boa estimativa "O grande" para $(n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2+1))$ é $2^n n^3$.

(F) Sejam A e B subconjuntos de um conjunto finito universal U. Então $|\bar{A} \cap \bar{B}| = |U| - |A \cap B|$.

(V) Suponha que f é uma função de A em B, onde A e B são conjuntos finitos e $|A| = |B|$. Então f é injetora se e somente se f é sobrejetora.

(V) Se o conjunto das partes de A é subconjunto do conjunto das partes de B. Então $A \subseteq B$.

(V) Se a, b, e m são inteiros com $m \geq 2$ e $a \equiv b \pmod m$ então $mdc(a,m) = mdc(b,m)$.

2. **(1,2)** Determine o número de divisões usadas pelo algoritmo de Euclides para encontrar o m.d.c. dos números de fibonacci f_n e f_{n+1} para n inteiro e não negativo. Justifique sua resposta usando indução matemática.

3. **(1,0)** Sejam n e r inteiros positivos com $r < n$. Use a identidade de PASCAL para provar que

$$\binom{n}{r-1} = \binom{n+2}{r+1} - 2\binom{n+1}{r+1} + \binom{n}{r+1}$$

4. **(2,0)**

a) Use o pequeno teorema de Fermat para computar 3^{2004} mod 7, 3^{2004} mod 11 e 3^{2004} mod 13. 1 4 1

b) Use os resultados obtidos em a e o teorema chinês do resto para encontrar 3^{2004} mod 1001 (observe que $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$).

Resp = 92

tipo B

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) - Centro de Informática (CIn)
Matemática Discreta (IF670) - 1ª Avaliação (2009-1)

1. (2,8) Responda no lugar indicado verdadeiro (V) ou falso (F) (**uma resposta errada anula uma certa**).

(V) Se x é um número real que não é um inteiro então sempre é verdade que $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 1$.

(F) Se A é um conjunto não enumerável e B é um conjunto enumerável então $A - B$ é enumerável.

(V) Uma boa estimativa "O grande" para $(n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2+1))$ é $n!\, n^3$.

(V) Sejam A e B subconjuntos de um conjunto finito universal U. Então $|\bar{A} \cap \bar{B}| = |U| - |A| - |B| + |A \cap B|$.

(V) Suponha que f é uma função de A em B, onde A e B são conjuntos finitos e $|A| = |B|$. Então f é injetora se e somente se f é sobrejetora.

(V) Se $A \subseteq B$ então o conjunto das partes de A é subconjunto do conjunto das partes de B.

(V) Se a, b, e m são inteiros com $m \geq 2$ e $a \equiv b \pmod{m}$ então $mdc(a,m) = mdc(b,m)$.

2. (1,2) Determine o número de divisões usadas pelo algoritmo de Euclides para encontrar o m.d.c. dos números de fibonacci f_n e f_{n+1} para n inteiro e não negativo. Justifique sua resposta usando indução matemática.

3. (1,0) Sejam n e r inteiros positivos com $r < n$.Use a identidade de PASCAL para provar que

$$\binom{n}{r-1} = \binom{n+2}{r+1} - 2\binom{n+1}{r+1} + \binom{n}{r+1}$$

4. (2,0)

a) Use o pequeno teorema de Fermat para computar 3^{2005} *mod* 7, 3^{2005} *mod* 11 e 3^{2005} *mod* 13.

3 1 3

b) Use os resultados obtidos em a e o teorema chinês do resto para encontrar 3^{2005} *mod* 1001 (observe que $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$).

Resp = 276

Questão 2

nºs de Fibonacci $0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 8 \ \ldots$

$f_0 \ f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6 \ldots$

Base

$n = 0$: $mdc(0,1) = 1$

↳ nenhuma divisão

$n = 1$

$mdc(f_1, f_2) = mdc(1,1) = \underbrace{mdc(1,0)}_{1 \text{ divisão}} = 1$

$n = 2$: $mdc(f_2, f_3) = \underbrace{mdc(1,2) = mdc(1,0)}_{1 \text{ divisão}} = 1$

Conjecture ; $n-1$ divisões p/ $n \geq 2$

H.I p/ $n = k$ => $k-1$ divisões

Provar p/ $n = k+1$ => k divisões

$mdc(f_{k+1}, f_{k+2}) = mdc(f_{k+1}, f_k)$

Pelo H.I $k-1$ divisões

$+1$

k divisões.

→ $f_{k+2} = f_k + f_{k+1}$

O resto da divisão de $f_k + f_{k+1}$ por f_{k+1} é f_k

$\boxed{\text{Resposta: } n-1 \text{ divisões}}$

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) - Centro de Informática (CIn)
Matemática Discreta (IF670) - 1ª Avaliação (2009-1)

Questão extra para quem faltou uma mini-prova

Suponha que m é um inteiro positivo. Use indução matemática para provar que se a e b são inteiros com $a \equiv b \ (mod\ m)$ então $a^k \equiv b^k \ (mod\ m)$, onde $k \geq 0$.