Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Centro de Informática (CIn) - Graduação em Ciência da Computação

Matemática Discreta (IF670)

1ª Avaliação (2011-2) - 30 de Setembro de 2011

1. (1,5) Sejam A, B e C conjuntos arbitrários em um conjunto universo U. Considere também que $A \otimes B$ é o conjunto que contém todos os elementos que estão em A ou estão em B, mas não em ambos.

a) Forneça uma lista em ordem crescente dos seguintes itens:

a.1) $|A|$, $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|U|$, $|\emptyset|$
a.2) $|A - B|$, $|A \otimes B|$, $|A| + |B|$, $|A \cup B|$, $|\emptyset|$

b) Determine, usando as identidades entre conjuntos, se a seguinte igualdade é verdadeira: $((A \cup (B \cap C)) \cap (A \cup \overline{(\overline{C} \cup B)})) \cup \overline{A} \ = \ U$.

2. (1,0) Sejam a e b números reais com $a < b$. Use as funções piso e/ou teto para expressar a quantidade de inteiros n que satisfazem a inequação $a \leq n \leq b$.

3. (1,5) A sequência do número de Lucas é definida recursivamente como $l_0 = 2$, $l_1 = 1$ e $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$ para $n \geq 2$. Use indução matemática para mostrar que $l_0^2 + l_1^2 + \ldots + l_n^2 = l_n \cdot l_{n+1} + 2$, onde $n \geq 0$.

4. (2,0) Prove a seguinte identidade usando: **a)** o teorema binomial; **b)** argumento combinatório; e **c)** indução matemática.

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

.

5. (1,0) Quantos elementos estão na união de cinco conjuntos se cada conjunto possui 20000 elementos, cada par de conjuntos possui 2000 elementos em comum, cada três dos conjuntos possui 100 elementos em comum, cada quatro dos conjuntos possui 10 elementos em comum, e existe um elemento comum a todos os cinco conjuntos? Justifique a sua resposta

Questões para quem faltou uma mini-prova

1. Prove o teorema binomial usando indução matemática.
2. Seja n um inteiro positivo. Prove a seguinte identidade usando argumento combinatório.

$$\binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{2}$$