



Prova Final — 24 de Fevereiro de 2015

- Esta prova tem 03 questões.
- A duração da prova é de 02h00min.

■ QUESTÃO 1

Considere o processo de inserção dos valores $1, 2, \dots, n$ numa árvore AVL inicialmente vazia.

- Ilustre o processo para $n = 7$. (1,0pt)
- Qual a altura final da árvore (em função de n)? *Dica:* Considere o que acontece com $n = 1, 3, 7, 15, \dots$ (1,0pt)

■ QUESTÃO 2

O Algoritmo de Kruskal é um algoritmo guloso para encontrar uma árvore geradora de custo mínimo (MST) de um grafo ponderado que faz uso da estrutura de dados *union-find* da seguinte maneira:

Algoritmo Kruskal

Entrada $G = (V, E)$ grafo ponderado com n vértices.

Saída T uma MST de G

- $C \leftarrow$ union-find vazio
- para cada** $u \in V$ **faça**
- $\text{make-set}(C, u)$
- $T \leftarrow (V, E' = \emptyset)$ {MST inicialmente sem arestas}
- Ordena as arestas de E por peso
- para cada** aresta (u, v, w) de E em ordem crescente de peso **faça**
- se** $\text{find}(C, u) \neq \text{find}(C, v)$ **então**
- $E' \leftarrow E' \cup \{(u, v, w)\}$ {adiciona a aresta à MST}
- $\text{union}(C, u, v)$
- devolva** T

Seja então G o seguinte grafo representado como uma lista de adjacências:

- | | |
|---|---|
| $A \rightarrow (B, 1), (E, 4), (F, 8);$ | $E \rightarrow (A, 4), (F, 5);$ |
| $B \rightarrow (A, 1), (C, 2), (F, 6), (G, 6);$ | $F \rightarrow (A, 8), (B, 6), (E, 5), (G, 1);$ |
| $C \rightarrow (B, 2), (D, 3), (G, 2);$ | $G \rightarrow (B, 6), (C, 2), (D, 1), (F, 1), (H, 1);$ |
| $D \rightarrow (C, 3), (G, 1), (H, 4);$ | $H \rightarrow (D, 4), (G, 1);$ |

Considerando a execução do Algoritmo Kruskal sobre o grafo acima, pede-se:

- a) Represente graficamente o grafo G . (0,5pt)
- b) Represente graficamente a MST T encontrada. *Obs.:* Em caso de arestas com o mesmo peso, deve-se considerar a ordem alfabética das suas extremidades. Por exemplo, a aresta $(A, B, 1)$ deve ser considerada antes de $(F, G, 1)$, e esta antes de $(G, H, 1)$. (1,5pt)
- c) Represente graficamente a estrutura *union-find* C ao final da execução do algoritmo, considerando o emprego das heurísticas de *uninão ponderada* e *compressão de caminhos*. (1,5pt)
- d) Qual complexidade assintótica do Algoritmo Kruskal no pior caso? Justifique brevemente (máx 10 linhas). (1,5pt)

■ QUESTÃO 3

Uma máquina de vendas automática precisa determinar se é possível oferecer trocos em moedas. Para tal, ela deve implementar um programa que recebe o valor das moedas disponíveis, v_1, v_2, \dots, v_n , e o valor do troco a ser dado, t , e determina se é possível ou não oferecer o troco com essas moedas.

- a) Descreva como resolver o problema em tempo $O(tn)$ supondo que há um estoque ilimitado de moedas para cada valor disponível. Por exemplo, é possível dar um troco de $t = \$25$ mas não é possível dar um troco de $t = \$27$ apenas com moedas de $v_1 = \$5$ e $v_2 = \$10$. (1,5pt)
- b) Descreva como resolver o problema em tempo $O(tn)$ supondo que a máquina pode usar, no máximo, uma moeda de cada valor disponível. Nesse caso, por exemplo, já não seria possível dar um troco de $t = \$25$ apenas com moedas de $v_1 = \$5$ e $v_2 = \$10$. (1,5pt)

Obs.: As respostas podem ser dadas em pseudo-código usando diretamente algoritmos vistos em aula como sub-rotinas.

