Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Informática
Bach. em Ciência da Computação

IF672cc Algoritmos e Estr. de Dados 2016.2
Prof. Paulo Fonseca

Primeira Prova — 29 de Setembro de 2016

- Esta prova tem 05 questões.
- A duração da prova é de 02h00min.

QUESTÃO 1 (1,5pt)

Considere o problema de procurar um valor num array *infinito* cujos elementos estão em ordem estritamente crescente. Para tal, é proposta a seguinte extensão da busca binária.

Algorithm *infinite_binary_search*
Input $X = \langle x_0, x_1, x_2, \ldots \rangle$ t.q $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$;
v, valor procurado.
Output A posição de X na qual v ocorre, se existir, ou -1, se $v \notin X$.

```
j ← 0
while true do
    r ← 2^(2^j)
    i ← binary_search( X[0 : r], v )
    if i ≠ −1 or X[r] > v then
        return i
    end if
    j ← j + 1
end while
end
```

Seja n o menor valor tal que $n = 2^{2^j}$, para algum $j \geq 0$, e $X[n] \geq v$. Indique o custo assintótico exato (em número de comparações) do algoritmo acima em função de n no pior caso. Justifique adequadamente a sua resposta. *Nota:* $\sum_{j=0}^{k} 2^j = 2^{k+1} - 1$.

QUESTÃO 2 (1,5pt)

Ilustre a tabela de dispersão de tamanho $m = 11$ após a inserção das chaves

$$63,\ 125,\ 85,\ 112, 58,$$

nesta ordem. A tabela armazena no máximo um elemento por posição, e emprega a técnica de *double hashing* com as funções de dispersão

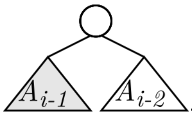
$$h_0(k) = k \mod m \quad \text{e} \quad h_1(k) = 7 - (k \mod 7).$$

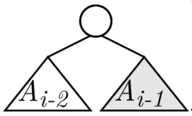
QUESTÃO 3 (2,0pt)

Forneça uma permutação do array $X = \langle 0, \ldots, 7 \rangle$ que corresponde ao *pior caso* da variação do algoritmo *Quicksort* visto em aula no qual o pivô escolhido é o elemento 'do meio' $X[\lfloor (l+r)/2 \rfloor]$, onde l e r correspondem aos limites do intervalo a ser particionado. Ilustre a execução do algoritmo para essa entrada, exibindo o array imediatamente após cada execução da função *partition*.

QUESTÃO 4 (2,5pt)

Seja A_i uma árvore cuja estrutura é definida por

- $A_0 =$ 
- $A_1 =$ 
- $A_i =$ 

, se i é par
- $A_i =$ 

, se i é ímpar.

a) Represente uma árvore A_5 cuja enumeração *em ordem* dos nós é a sequência $0, 10, 20, 30, \ldots, 140$.

b) Considerando a árvore do item (a) como uma AVL, represente a inserção do valor $v = 85$, exibindo a árvore imediatamente após a inserção (antes das rotações), e imediatamente após cada rotação que se fizer necessária.

QUESTÃO 5 (2,5pt)

Considere o problema de combinar m arrays ordenados de tamanho n, $X^j = \langle x_0^j, \ldots, x_{n-1}^j \rangle$, para $j = 0, \ldots, m-1$, numa única sequência ordenada de tamanho mn, $Y = \langle y_0, \ldots, y_{mn-1} \rangle$. Sejam os dois algoritmos a seguir.

Algoritmo A. Posiciona um índice cursor $i_j \leftarrow 0$ na primeira posição de cada array X^j. Para cada $k = 0, \ldots, mn-1$, escolhe sucessivamente o mínimo dentre os valores $\{X^j[i_j] \mid 0 \leq j < m \wedge i_j < n\}$, e insere o mínimo escolhido na posição $Y[k]$. Se o elemento foi escolhido na sequência X^r, avança o cursor $i_r \leftarrow i_r + 1$.

Algoritmo B. Posiciona um índice cursor $i_j \leftarrow 0$ na primeira posição de cada array X^j. Cria uma *min heap* H com os pares $\{(X^j[i_j], j); 0 \leq j < m\}$, usando o primeiro elemento do par como chave de comparação. Para cada $k = 0, \ldots, mn-1$, extrai um elemento $(X^r[i_r], r)$ de H e o insere na posição $Y[k]$. Avança o cursor $i_r \leftarrow i_r + 1$ e, se $i_r < n$, insere o próximo elemento $(X^r[i_r], r)$ em H.

a) Considerando que o Algoritmo A escolhe o mínimo 'percorrendo' todos os elementos considerados, indique seu custo assintótico exato no pior caso em função de m e n. Justifique adequadamente (máx 05 linhas).

b) Indique o custo assintótico exato do Algoritmo B em função de m e n no pior caso. Justifique adequadamente (máx. 05 linhas).

c) Ilustre a execução do Algoritmo B para os $m = 5$ arrays de tamanho $n = 2$, $X^0 = \langle 6, 7 \rangle$, $X^1 = \langle 1, 3 \rangle$, $X^2 = \langle 4, 5 \rangle$, $X^3 = \langle 0, 8 \rangle$, e $X^4 = \langle 2, 9 \rangle$. Ilustre a criação da min heap H, bem como cada inserção ou extração realizada sobre ela.