Curvas e superfícies de Bézier e B-splines *

Lenimar Nunes de Andrade

11 de agosto de 1999

Resumo

Este texto define, dá exemplos e cita as principais propriedades das curvas de Bézier e B-splines. Estes são dois tipos de curvas ou superfícies bastante utilizados em Modelagem Geométrica.

Sumário

1 Curvas de Bézier

As curvas de Bézier foram estudadas no início dos anos 60 por De Casteljau em uma empresa francesa, com a finalidade de criar um método eficiente para modelagem de carros.

A idéia de De Casteljau é bastante simples. Dados $n+1$ pontos $B_0, B_1, \cdots, B_n$ no $\mathbb{R}^3$, definimos uma curva $P : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ através de interpolações lineares sucessivas: consideramos inicialmente a linha poligonal ligando os pontos B_i a B_{i+1} com $i = 0, 1, \cdots, n-1$. Em seguida, para cada $t \in [0,1]$ definimos em cada segmento $\overline{B_i B_{i+1}}$ um ponto $B_i^{(1)}$ por interpolação linear $B_i^{(1)} = tB_i + (1-t)B_{i+1}$. Construímos desse modo uma nova poligonal definida pelos novos pontos $B_0^{(1)}, B_1^{(1)}, \cdots, B_{n-1}^{(1)}$. A linha poligonal assim obtida possui $n-1$ segmentos e sua construção é mostrada na figura 1 (com $n = 3$).

Prosseguindo a construção acima usando a nova poligonal $B_0^{(1)}, B_1^{(1)}, \cdots, B_{n-1}^{(1)}$, após n etapas obtemos um ponto $B_0^{(n)} \in \mathbb{R}^3$. Este ponto é, por definição, o valor de $P(t)$.

Alguns cálculos simples mostram que $P(t)$ é uma função polinomial de grau n na variável t. Além disso, $P(t)$ pode ser escrita como uma combinação linear dos pontos

*Disponível em ftp://mat.ufpb.br/pub/docs/cursos/bezier.zip

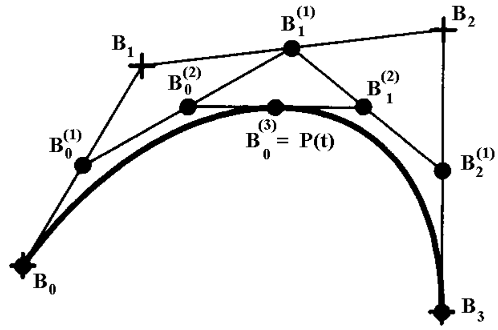

Figura 1: Algoritmo de *De Casteljau*

$B_0, B_1, \cdots, B_n$ na qual os coeficientes são polinômios de grau n na variável t. Por exemplo, para $n = 3$ obtemos que

$$P(t) = (1-t)^3 B_0 + 3t(1-t)^2 B_1 + 3t^2(1-t) B_2 + t^3 B_3$$

e, por indução, para qualquer n temos

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} B_i.$$

Definição 1.1 *Os polinômios*

$$J_{ni}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad t \in [0,\, 1]$$

utilizados para definir as curvas de Bézier são chamados polinômios de Bernstein.

Os gráficos de alguns polinômios de Bernstein $J_{40}, J_{41}, J_{42}, J_{43}$ e J_{44} são mostrados na figura 2.

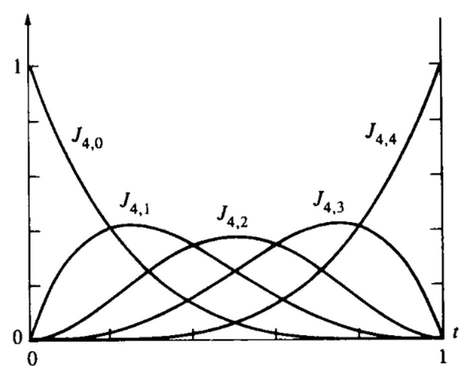

Figura 2: Polinômios de Bernstein

A equação de $P(t)$ em função dos polinômios de Bernstein foi descoberta por P. Bézier também no início da década de 60, sem ter conhecimento do trabalho de De Casteljau. A relação entre os trabalhos de De Casteljau e de Bézier só veio a ser conhecida por volta de 1970. Por essa razão, a curva $P(t)$ definida anteriormente é chamada *curva de Bézier.* A linha poligonal formada pelos pontos iniciais $B_0, \cdots, B_n$ é chamada *polígono de controle.*

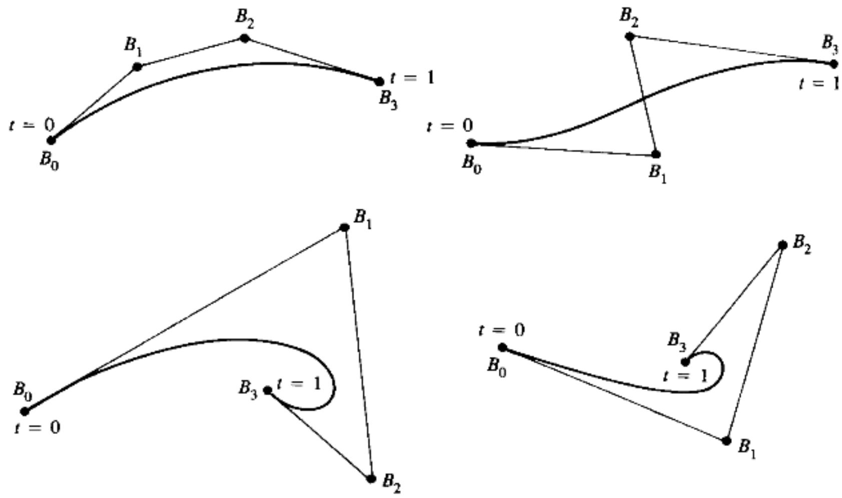

Figura 3: Curvas de Bézier definidas por B_0, B_1, B_2, B_3

A partir da formulação de Bézier é imediato verificar que a curva de Bézier interpola apenas o ponto inicial e o ponto final do polígono de controle. Além disso, é tangente ao lado do polígono de controle que contém esses pontos (veja figura 3). Outras propriedades importantes das curvas de Bézier são:

Invariância afim. Se T é uma transformação afim do espaço, $B_0, \cdots, B_n$ é um polígono de controle e $P(t)$ a respectiva curva de Bézier, então $T(P(t)) = P_T(t)$, onde $P_T(t)$ é a curva de Bézier associada ao polígono $T(B_0), \cdots, T(B_n)$.

Fecho convexo. A curva de Bézier está contida no fecho convexo do polígono de controle.

A propriedade da invariância afim é importante pois permite que construções geométricas com curvas de Bézier possam ser realizadas em um sistema de coordenadas mais conveniente, e depois transformados para o sistema de coordenadas desejado.

Como consequência da propriedade do fecho convexo temos que se o polígono de controle está contido em um subespaço afim, então a curva de Bézier correspondente também está contida no mesmo espaço.

Um grande inconveniente na utilização das curvas de Bézier é que o grau dos polinômios cresce com o número de pontos do polígono de controle. Este problema pode ser contornado particionando o polígono de controle original e fazendo a combinação de várias curvas de Bézier.

Outro inconveniente é a falta de controle local. Isto significa que uma alteração de um ponto no polígono de Bézier acarreta alterações em toda a curva de Bézier – o que ocorre porque os polinômios de Bernstein não se anulam em pontos do intervalo $]0, 1[$.

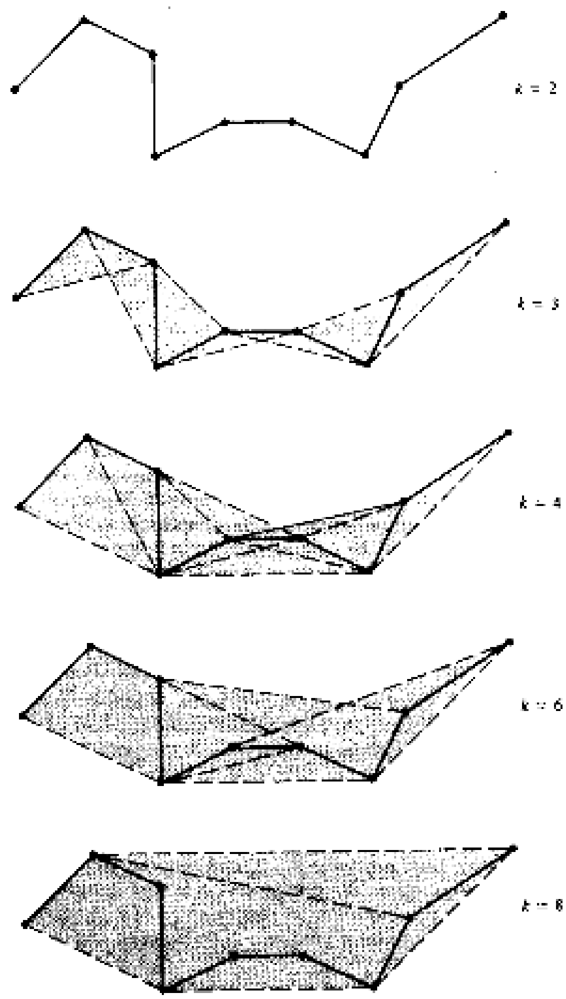

Figura 4: Fecho convexo para $k = 2, 3, 4, 6, 8$

2 Curvas B-splines

Nesta seção (e sempre que nos referirmos a B-splines) utilizaremos a convenção $\frac{0}{0} = 0$.

Sejam $B_1, B_2, \cdots, B_{n+1}$ os $n+1$ pontos de um *polígono de controle*, k um inteiro tal que $2 \le k \le n+1$ e (x_i) uma seqüência crescente finita (chamada *vetor de nós*) composta de $n+k+1$ números reais. A curva *B-spline* associada aos B_i e aos x_j é definida por

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{ik}(t), \quad t_{\text{min}} \le t \le t_{\text{max}}.$$

Os N_{ik} são funções polinomias por partes definidas recursivamente por

$$N_{i1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{se} \quad t \notin [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

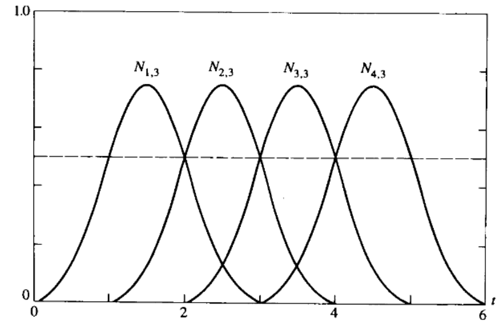

Figura 5: N_{ik} com vetor de nós uniforme $X = (0 \ \ 1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 4 \ \ 5 \ \ 6), \ n = k = 3$

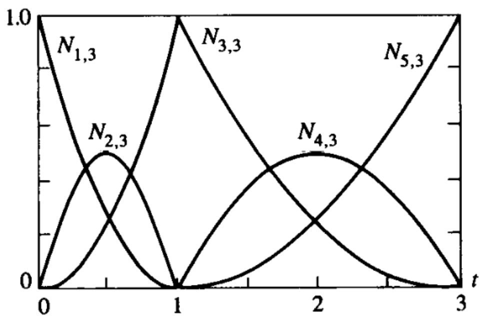

Figura 6: $X = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3)$

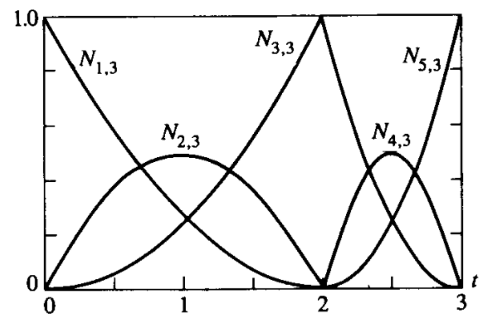

Figura 7: X = (0 0 0 2 2 3 3 3)

e

$$N_{ik}(t) = \frac{(t - x_i)N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t)N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}.$$

2.1 Propriedades das curvas B-splines

- $P(t)$ é uma curva polinomial por partes de grau $k-1$ em cada intervalo $[x_i, \ x_{i+1}]$.
- As derivadas de $P(t)$ de ordens $1, 2, \cdots, k-2$ são funções contínuas (ou seja $P \in C^{k-2}$).
- $N_{ik}(t) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n+1} N_{ik}(t) = 1$.
- Quando o polígono de controle é plano, a curva B-spline está contida na união dos fechos convexos de k pontos vizinhos desse polígono (veja figura 4).
- A curva B-spline possui invariância afim. Isto significa que transformações aplicadas aos pontos da curva e aos pontos do polígono de controle podem ser comutadas.
- A curva B-spline possui controle local. Isto significa que modificações feitas em um ponto do polígono de controle afetam apenas uma vizinhança de pontos e não a curva inteira (veja figura 8 onde foi modificada a posição do ponto B_5).

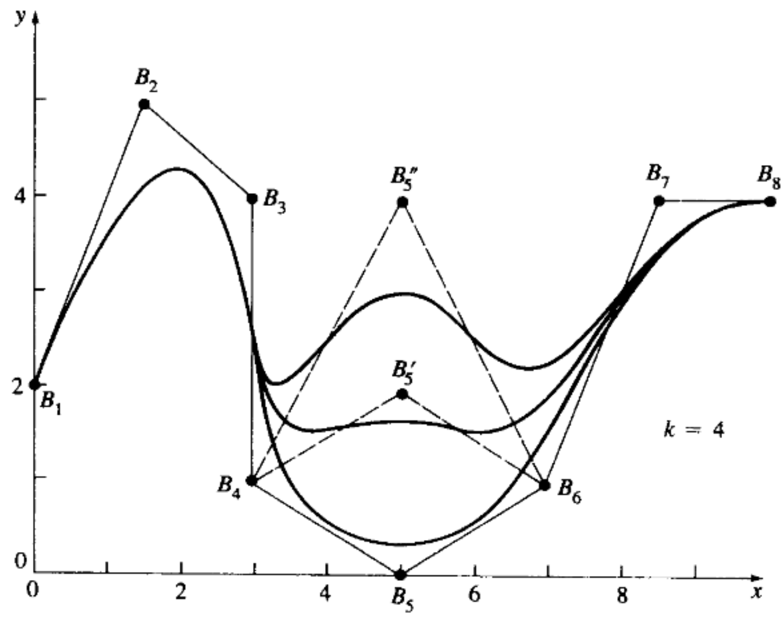

Figura 8: Controle local de uma curva B-spline

2.2 Alguns tipos especiais de vetor de nós

Vetor de nós uniforme Os x_i são igualmente espaçados, como por exemplo em

$$X = (\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5\ ).$$

Vetor de nós aberto-uniforme O primeiro e o último x_i são repetidos k vezes e os nós internos são igualmente espaçados. Além disso, o primeiro x_i deve ser igual a 0 e o último igual a $n - k + 2$, como no seguinte exemplo:

$$X = (\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 3\ ).$$

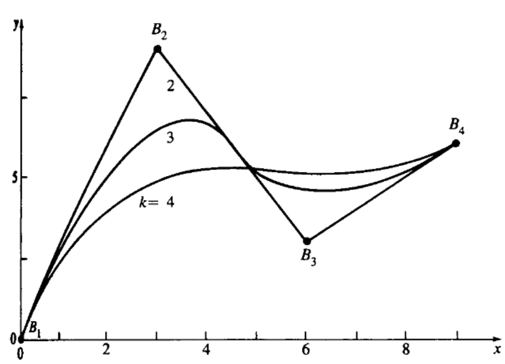

Figura 9: Curvas B-spline com $k\ =\ 2, 3, 4$

De um modo geral, um vetor de nós aberto-uniforme é tal que

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 1 \leq i \leq k \\ i-k & \text{se} \quad k+1 \leq i \leq n+1 \\ n-k+2 & \text{se} \quad n+2 \leq i \leq n+k+1 \end{cases}$$

Quando $n = k$ e o vetor de nós é aberto-uniforme, a curva B-spline reduz-se a uma curva de Bézier.

Vetor de nós não-uniforme Podem não ser igualmente espaçados ou ter repetição nos nós internos como nos seguintes exemplos:

$$X_1 = (\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2\ )$$

$$X_2 = (\ 0 \quad 1/5 \quad 1/4 \quad 1/3 \quad 1 \quad 1 \quad 4\ )$$

Uma alteração no vetor de nós pode levar a mudanças radicais no formato dos vetores básicos $N_{ik}(t)$ de uma curva B-spline. A figura 5 mostra alguns gráficos dos N_{ik} quando o vetor de nós é uniforme. As figuras 6 e 7 mostram gráficos com vetores de nós não-uniformes.

Alterações no valor de k levam a mudança nos graus das funções polinomias por partes (que são de graus $k-1$) e mudanças significativas na curva B-spline (veja figura 9). Quando $k = 2$ a curva B-spline coincide com o polígono de controle. À medida que k aumenta, a curva torna-se mais suave e mais distante do polígono.

Além das curvas B-splines e curvas de Bézier, são muito utilizadas em Modelagem Geométrica as curvas *B-splines racionais* que são as curvas cujos polinômios *básicos* são da forma

$$R_{ik}(t) = \frac{h_i N_{ik}(t)}{\sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{ik}(t)}$$

onde $h_i \geq 0, \ \forall i$. As curvas B-splines racionais constituem uma família muito importante de curvas para a Modelagem Geométricas porque permitem construções bastante aproximadas de circunferências e das cônicas de um modo geral.

Quando o vetor de nós de uma curva B-spline racional não é uniforme então temos o que se chama NURBS (*Non Uniform Rational B-Spline*).

3 Superfícies de Bézier

A idéia de curva de Bézier pode ser "generalizada" para superfícies dando origem ao que chamamos *superfície de Bézier*.

Sejam $B_{ij}, \ i = 0, \cdots, m, \ j = 0, \cdots, n$, um conjunto de pontos no $\mathbb{R}^3$ de tal forma que sua projeção no plano $x0y$ seja formada pelos vértices de mn retângulos de mesmas dimensões (congruentes). A superfície de Bézier definida pelos B_{ij} é a superfície $Q : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} B_{ij} J_{ni}(u) K_{mj}(v)$$

onde $J_{ni}(u)$ e $K_{mj}(v)$ são polinômios de Bernstein:

$$J_{ni}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \quad \text{e} \quad K_{mj}(v) = \binom{m}{j} v^j (1-v)^{m-j}.$$

Algumas propriedades conhecidas das superfícies de Bézier são:

- A superfície é invariante por tranformações afins.
- A superfície está contida no fecho convexo (tridimensional) do polígono (não plano) de controle definido pelos B_{ij}.
- A superfície geralmente segue a forma do poligono de controle. (ver figura 10)
- A superfície passa pelos 4 pontos "dos cantos" no polígono de controle (ver figura 10).
- É uma superfície polinomial cujo grau é $m + n$.

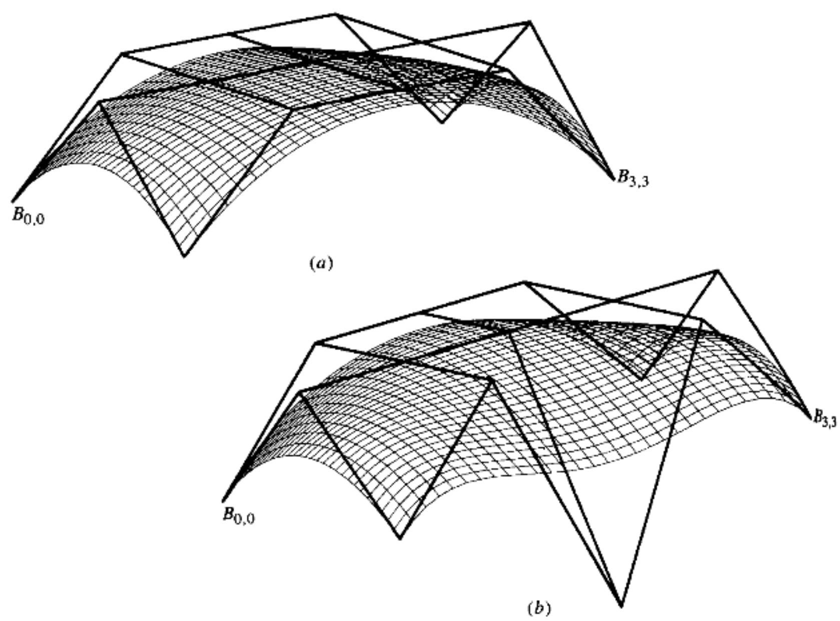

Figura 10: Superfícies de Bézier

4 Superfícies B-splines

São definidas de forma semelhante às superfícies de Bézier, bastando trocar as funções básicas J_{ni} e K_{mj} pelos N_{ik} que definem as curvas B-splines. Dessa forma, dados k e l, uma superfície B-spline é uma superfície $Q : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$Q(u,v) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{ij} N_{ik}(u) M_{jl}(v)$$

onde os N_{ik} e os M_{jl} são funções polinomias por partes definidas recursivamente por

$$N_{i1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{se} \quad t \notin [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

$$N_{ik}(t) = \frac{(t - x_i)N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t)N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}.$$

e

$$M_{j1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t \in [y_j, y_{j+1}] \\ 0, & \text{se} \quad t \notin [y_j, y_{j+1}] \end{cases}$$

$$M_{jl}(t) = \frac{(t - y_j)M_{j,l-1}(t)}{y_{j+l-1} - y_j} + \frac{(y_{j+l} - t)M_{j+1,l-1}(t)}{y_{j+l} - y_{j+1}}.$$

onde (x_i) e (y_j) são vetores de nós previamente definidos.

Algumas propriedades das superfícies B-splines são:

- A superfície é invariante por transformações afins.
- A superfície está contida no fecho convexo (tridimensional) do polígono (não plano) de controle definido pelos B_{ij}.
- Possui controle local (veja figura 11).

Superfícies B-splines racionais podem ser usadas na modelagem de objetos mais sofisticados. Veja por exemplo as figuras 12 e 13.

Referências

[1] J. M. Gomes e L. Velho, *Conceitos Básicos de Computação Gráfica*, VII Escola de Computação, 1990

[2] D. Rogers, J. Adams, *Mathematical Elements for Computer Graphics*, McGraw-Hill, 1990

[3] Foley et al., *Computer Graphics, principles and practice*, Addison-Wesley, 1990

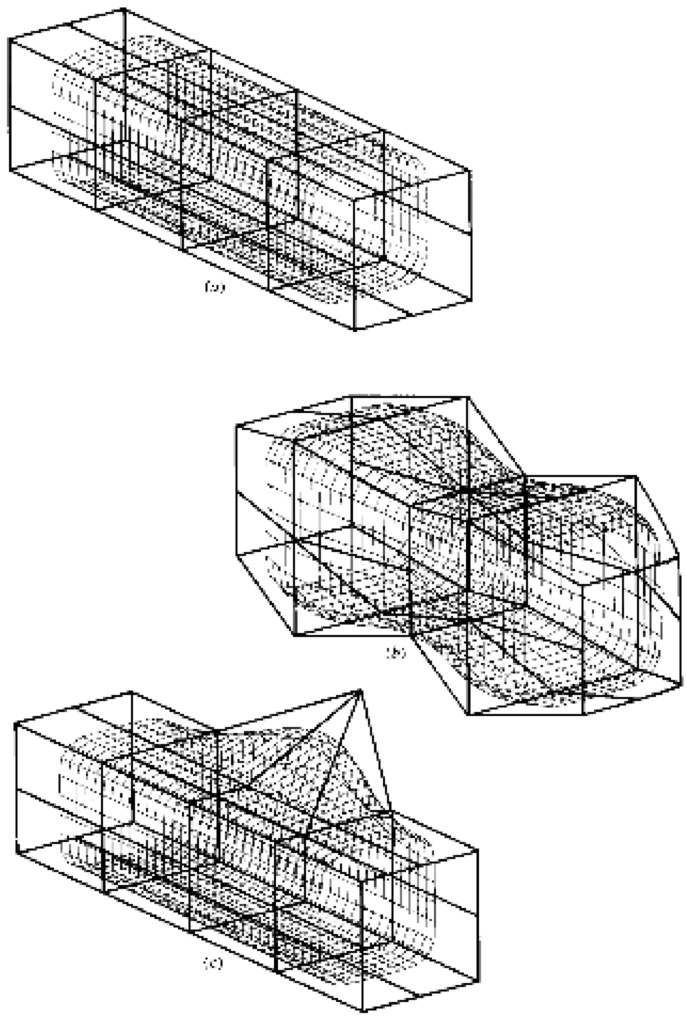

Figura 11: Controle local em superfícies B-splines

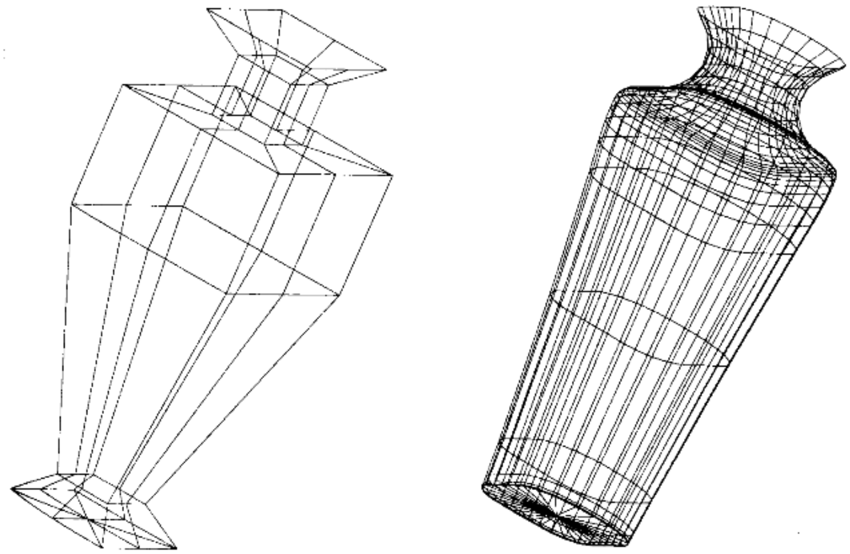

Figura 12: B-splines racionais

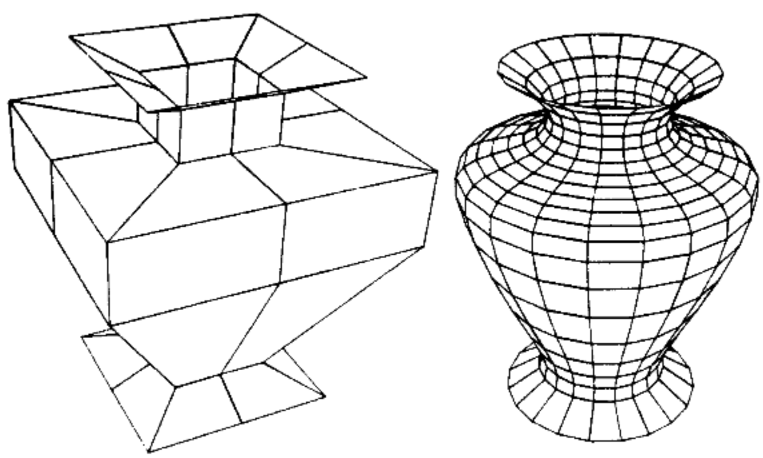

Figura 13: B-splines racionais