Capítulo 2

Processos Estacionários

Objetivos

- Definir propriedades básicas;
- Definir os processos lineares;
- Introdução do processo ARMA;
- Propriedades da média da amostra e função de auto-correlação;
- Previsão de séries temporais estacionárias;

Propriedades Básicas

- As funções de auto-covariância (ACVF) e auto-correlação (ACF):
  - São ferramentas bastante interessantes para medir o grau de dependência entre dois pontos distintos de uma série temporal;
  - Principalmente para realizar previsão;
  - Por isso antes de realizar a previsão analisaremos as propriedades das funções de auto-covariância e auto-correlação de séries temporais estacionárias;

Propriedades Básicas

- Definições importantes:
  - Esperança: $E(x) = \mu.$
  - Variância: $\sigma^2(x) = E[(x-\mu)^2]$
  - Covariância: $\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t), \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$
  - ACF: $\rho(h) = \dfrac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$

Propriedades Básicas

- Propriedades da autocovariância ($\gamma(.)$):

$$\gamma(0) \geq 0, \text{ já que } \mathrm{Var}(X_t) \geq 0$$
$$|\gamma(h)| \leq \gamma(0) \text{ para todo } h, \text{dado que a correlação} \leq 1$$
$$\begin{aligned}\gamma(h) = \gamma(-h) \text{ para todo } h, \gamma(h) &= Cov(X_{t+h}, X_t) \\ &= Cov(X_t, X_{t+h}) \\ &= \gamma(-h)\end{aligned}$$

- Autocovariância têm outra propriedade fundamental, a de **definição não-negativa**:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i \kappa(i-j) a_j \geq 0$$

para todo inteiros positivos n e vetor a = (a_1,..., a_n)' com componentes de valores reais a_i.

- Uma função de valores reais definidas por inteiros é a função função de autocovariancia de uma série temporal se somente se for definida por não negativa

Propriedades Básicas

- Observações:
  - A função de autocorrelação possui todas as propriedades da função de autocovariância e satisfaz a condição adicional de p(0) = 1;
  - É mais simples identificar a estacionariedade da série pela função de autocovariância do que identificar pela condição de não-negativa;

Propriedades Básicas

- Estritamente estacionária: diz respeito à invariância de deslocamento (no tempo) de suas distribuições de dimensões finitas;

- Fracamente estacionária: diz apenas respeito à invariância de deslocamento (no tempo) do primeiro e do segundo momento de um processo;

Propriedades Básicas

- Propriedades de uma série estritamente estacionária:
  a) as variáveis X_t são identicamente distribuídas;
  b) $(X_1, \ldots, X_n)' \stackrel{d}{=} (X_{1+h}, \ldots, X_{n+h})'$ para todos inteiros t e h;
  c) $\{X_t\}$ é fracamente estacionária se E()< ∞ para todo t;
  d) fracamente estacionária não implicam em estritamente estacionária;
  e) Uma Série iid é estritamente estacionária;

Propriedades Básicas

- $\{X_t\}$ é estritamente estacionária, então : x_1, x_2, x_3 ...
  - Possuem a mesma função de distribuição:

$$(x_1, x_2), (x_5, x_7), (x_9, x_{11}).$$

  - Possuem também a mesma função de distribuição conjunta:

$$(x_1, x_3, x_5), (x_7, x_9, x_{11}), (x_{13}, x_{15}, x_{17})$$