Processos Estacionários

Domingos Sávio de O. Santos Jr.

Capítulo 2

3 de septiembre de 2018

Processos Lineares

- Os processos lineares envolvem os modelos:
  - AR (auto-regressivo);
  - MA (médias móveis);
  - ARMA (auto-regressivo e médias móveis);
- Esses modelos provêm um framework para o estudo de processos estacionários;

Processos Lineares

- Série temporal X_t é um processo linear se tiver a representação:

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \tag{1}$$

para todo t no qual Z_t WN(0,σ^2) e ψ_j é uma sequencia de constantes com $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j < \infty$

Processos Lineares

- Em termos do operador de deslocamento para trás B, Eq. 3 pode ser descrita em:

$$X_t = \psi(B) Z_t, \tag{2}$$

no qual $\psi(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j B^j$. Um processo linear é chamado de média móvel (MA) se $\psi_j = 0$ para todo $j < 0$. Exemplo se:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \tag{3}$$

Processos Lineares

- Observação: A condição $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j < \infty$ garante convergência, desde que:

$$E|Z_t| \leq \sigma, \tag{4}$$

$$E|X_t| \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} (|\psi|E|Z_{t-j}|) \leq (\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j|)\sigma < \infty. \tag{5}$$

- $\psi(B)Z_t$ pode ser considerado como um filtro linear, no qual é produzido a saída X_t apartir do Z_t.

Processos Lineares

- Um processo AR(1) é definido como uma solução estacionária de X_t de :

$$X_t - \phi_{t-1} X_{t-1} = Z_t, \tag{6}$$

  no qual Z_t WN(0,σ^2), $|\phi_{t-1}| < 1$ não possui correlação com X_s para cara $s < t$.

- Um processo linear é dado por:

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \tag{7}$$

Processos Lineares

- Mostrando que $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$ é a única solução estacionária de $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t$, considerando Y_t uma solução de série estacionária qualquer.

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi Y_{t-1} + Z_t \\ &= Z_t + \phi Z_{t-1} + \phi^2 Y_{t-2} \\ &= \ldots \\ &= Z_t + \phi Z_{t-1} + \ldots + \phi^k Z_{t-k} + \phi^{k+1} Y_{t-k-1} \end{aligned} \tag{8}$$

Introdução ao processo ARMA

- A série temporal X_t é um processo ARMA se sua estacionariedade for satisfeita (para todo t):

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}, \tag{9}$$

no qual Z_t WN$(0{,}\sigma^2)$, $\phi + \theta \neq 0$;

Propriedades da média da amostra e função de autocorrelação

- A estimação de μ, γ e p(.) = γ(.) γ(0) a partir das observações de Xn ... Xt desempenha um papel importante nos problemas de inferência e no desenvolvimento de um modelo apropriado para os dados;

Propriedades da média da amostra e função de autocorrelação

- Estimação de μ
  - a estimação de da μ média de um processo estacionário é dada pela média da amostra:

$$\hat{X}_n = n^{-1}(X_1, X_2, ..., X_n), \tag{10}$$

Este é um estimador imparcial de μ, desde que:

$$E(\hat{X}_n) = n^{-1}(EX_1, ..., EX_n) = \mu \tag{11}$$

Propriedades da média da amostra e função de autocorrelação

- Estimação de μ
  - Para muitas séries temporais para modelos lineares e ARMA, (para largos "n"),$\hat{X}_n$ é aproximadamente normal com média μ e variância $n^{-1} \sum_{|h-|<\infty} \gamma(h)$
  - então um intervalo de confiança de μ é aproximadamente 95 %:

$$(\hat{X}_n - 1{,}96\nu^{1/2}/\sqrt{n}, \hat{X}_n + 1{,}96\nu^{1/2}/\sqrt{n}) \qquad (12)$$

Propriedades da média da amostra e função de autocorrelação

- Estimação de μ
  - Para muitas séries temporais para modelos lineares e ARMA, (para largos "n"),$\hat{X}_n$ é aproximadamente normal com média μ e variância $n^{-1} \sum_{|h-|<\infty} \gamma(h)$
  - então um intervalo de confiança de μ é aproximadamente 95 %:

$$(\hat{X}_n - 1{,}96\nu^{1/2}/\sqrt{n}, \hat{X}_n + 1{,}96\nu^{1/2}/\sqrt{n}) \tag{13}$$

Propriedades da média da amostra e função de autocorrelação

- Estimação de $\gamma(.)$ e p(.)
  - autocovariância:

$$\gamma(h) = n^{-1} \sum_{t=1}^{n-|h|} (X_{t+|h|} - \hat{X}_n)(X_t - \hat{X}_n) \tag{14}$$

  - autocorrelação:

$$\hat{p}(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \tag{15}$$

Propriedades da média da amostra e função de autocorrelação

- Estimação de $\gamma(.)$ e p(.)
  - Sem informações adicionais retirada dos dados observados $(X_1, ..., X_n)$ é impossível obter estimativas razoáveis de γ(h) e p(h) para $h \geq n$;
  - Até mesmo para casos em que h é um pouco maior que n, as estimações são inconfiáveis (desde haja apenas poucos dados disponíveis);

Propriedades da média da amostra e função de autocorrelação

- Estimação de $\gamma(.)$ e p(.)
  - Então qual tamanho da amostra mínima que devemos utilizar?

Forecasting time series

- Previsão de um passo à frente de uma série AR(1)

$$X_t = Z_t + \phi X_{t-1}, t = 0, \pm 1, ..., \tag{16}$$

no qual $|\phi| < 1$ e Z_t WN(0,σ^2)

- Chamaremos de $P_n X_{n+h}$ o melhor preditor linear apartir de $X_n, ..., X_1$, para n $\geq$ 1;
- solução é $a_n = (\phi, 0, ..., 0)'$
- Então:

$$P_n X_{n+1} = a_n' X_n = \phi X_n \tag{17}$$