Aula monitoria: dia 09/12/2010

Questões sobre indução

1) Sendo A conjunto gerado indutivamente que tem como base a string “1” e como função geradora a função f(x) = “1”+x+”0”, prove indutivamente que $\forall x : x \in A: Qu(x) > Qz(x)$ é verdade se Qu(x) a quantidade de “1” na string x e Qz(x) a quantidade de “0” na string x .

a) Mostre o objetivo de prova do caso base
b) Prove o caso base
c) Mostre a hipótese de indução
d) Mostre o objetivo de prova do passo indutivo
e) Prove o passo indutivo

RESPOSTA

a) $Qu(1) > \mathrm{Qz}(1)$
b) $Qu(1) = 1 \wedge Qz(1) = 0$
$Qu(1) > Qz(1)$
c) $Qu(s) > Qz(s)$
d) $Qu(f(s)) > Qz(f(s))$

Por que f(s)? Porque f(s) é o “sucessor” de s no conjunto, é a string que vem imediatamente depois de s.

e) $Qu(f(s)) = Qu(1 + s + 0)$ [def. de f(x)]
$= Qu(1) + Qu(s) + Qu(0)$ [def. de Qu(x)]
$= 1 + Qu(s) + 0 < 1 + Qz(s) + 0$ [hip. de indução)

$1 + Qz(s) + 0 = 0 + Qz(s) + 1$ [comutatividade]
$= Qz(1) + Qz(s) + Qz(0)$ [def. de Qz(x)]
$= Qz(1 + s + 0)$ [def. de Qz(x)]
$= Qz(f(s))$ [def. de f(x)]

$Qu(f(s)) > Qz(f(s))$ [substituindo 1+Qz(s)+0 por Qz(f(s)]

2) Sabendo que PROP é conjunto das fórmulas bem formadas da lógica proposicional prove que o $\forall p : p \in PROP$: $\mathrm{Abr(p)} = \mathrm{Op(p)}$ sendo Abr(x) o número de parênteses abrindo de uma string e Op(x) o número de operadores de uma string.

Dica: Abr((¬p)) = 1 + Abr(p) e Abr((pΔq)) = 1 + Abr(p) + Abr(q). A mesma regra vale substituindo Apr por Op nas duas equações.

a) Mostre o objetivo de prova do caso base
b) Prove o caso base
c) Mostre a hipótese de indução
d) Mostre o objetivo de prova do passo indutivo
e) Prove o passo indutivo

RESPOSTA

a) $Abr(\mathrm{T}) = \mathrm{Op(T)}$
   $Abr(\mathrm{F}) = \mathrm{Op(F)}$
   $Abr(p_1) = \mathrm{Op}(p_1), p_1$ é $fórmula\ sem\ operador$
b) Abr(T)=0 e Op(T)=0
   Abr(F)=0 e Op(F)=0
   Abr(p1)=0 eOp(p1)=0
c) Abr(p)=Op(p)
d) Abr((¬p))=Op((¬p)) e Abr((pΔq)), sendo Δ um operador binário da lógica proposicional e q uma proposição qualquer.
e) Abr((¬p)) = 1 + Abr(p)
   = 1 + Op(p) [hip. indução]
   = Op((¬p))

   Abr((pΔq)) = 1 + Abr(p) + Abr(q)
   = 1 + Op(p) + Op(q) [hip. indução]
   = Op((pΔq))