

# FUNDAMENTOS DE ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

**PREFIXOS NO SISTEMA  
INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)**

<b>Múltiplo</b>	<b>Prefixo</b>	<b>Símbolo</b>
$10^9$	Giga	G
$10^6$	Mega	M
$10^3$	Quilo	k
$10^{-3}$	Mili	m
$10^{-6}$	Micro	$\mu$
$10^{-9}$	Nano	n
$10^{-12}$	Pico	p

**FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS ÚTEIS**

$$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen } \theta$$

$$\text{cos}(-\theta) = \text{cos } \theta$$

$$\text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \text{cos } \omega t$$

$$\text{cos}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen } \omega t$$

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \text{ cos } \beta + \text{cos } \alpha \text{ sen } \beta$$

$$\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cos } \alpha \text{ cos } \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$$

$$\text{sen } 2\theta = 2 \text{ sen } \theta \text{ cos } \theta$$

$$\text{cos } 2\theta = \text{cos}^2 \theta - \text{sen}^2 \theta$$

$$\text{sen}^2 \theta = \frac{1 - \text{cos } 2\theta}{2}$$

$$\text{cos}^2 \theta = \frac{1 + \text{cos } 2\theta}{2}$$

## FÓRMULAS COM INTEGRAIS ÚTEIS

---

$$\int \operatorname{sen}^2 t \, dt = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t + C$$

$$\int \operatorname{cos}^2 t \, dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t + C$$

$$\int \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{t}{a} + C$$

$$\int t e^{at} \, dt = (t - 1) e^t + C$$

$$\int e^{at} \operatorname{sen} bt \, dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sen} bt - b \operatorname{cos} bt) + C$$

$$\int e^{at} \operatorname{cos} bt \, dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{cos} bt + b \operatorname{sen} bt) + C$$

$$\int t \operatorname{sen} bt \, dt = \frac{1}{b^2} \operatorname{sen} bt - \frac{t}{b} \operatorname{cos} bt + C$$

$$\int t \operatorname{cos} bt \, dt = \frac{1}{b^2} \operatorname{cos} bt + \frac{t}{b} \operatorname{sen} bt + C$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \, dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{cos}(\omega t + \alpha) \, dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sen}(n\omega t + \alpha) \, dt = 0; \text{ inteiro}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{cos}(n\omega t + \alpha) \, dt = 0; n \text{ inteiro}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sen}(m\omega t + \alpha) \operatorname{cos}(n\omega t + \alpha) \, dt = 0; m, n \text{ inteiros}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sen}^2(\omega t + \alpha) \, dt = \pi/\omega$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{cos}^2(\omega t + \alpha) \, dt = \pi/\omega$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{cos}(m\omega t + \alpha) \operatorname{cos}(n\omega t + \beta) \, dt = 0, m \neq n; m, n \text{ inteiros} \\ = \pi \operatorname{cos}(\alpha - \beta)/\omega, m = n$$

**FUNDAMENTOS  
DE ANÁLISE  
DE CIRCUITOS  
ELÉTRICOS**

---

# FUNDAMENTOS DE ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

**David E. Johnson**

*Professor Emeritus, Louisiana State University  
Science and Mathematics Division  
Birmingham-Southern College*

**John L. Hilburn**

*President, Microcomputer Systems Inc.*

**Johnny R. Johnson**

*Professor Emeritus, Louisiana State University  
Department of Mathematics  
University of North Alabama*

**Tradução**

**Onofre de Andrade Martins**

*Engenheiro Eletricista  
Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica  
pela Escola Federal de Engenharia de Itajubá, MG*

**Marco Antonio Moreira de Santis**

*Professor Adjunto  
Departamento de Engenharia Elétrica - PUC - MG*

Quarta edição



**Prentice/Hall do Brasil**

---

Título do original em inglês  
*Basic Electric Circuit Analysis*  
Copyright © 1990, 1986, 1984, 1978 by  
Prentice-Hall, Inc.  
A Division of Simon & Schuster  
Englewood Cliffs, New Jersey 07632

Direitos exclusivos para a língua portuguesa  
Copyright © 1994 by  
**EDITORA PRENTICE-HALL DO BRASIL LTDA.**  
Travessa do Ouvidor, 11  
Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040

Reservados todos os direitos. É proibida a duplicação ou  
reprodução deste volume, no todo ou em parte,  
sob quaisquer formas ou por quaisquer meios  
(eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia ou outros),  
sem permissão expressa da Editora.

# Conteúdo

## 1. INTRODUÇÃO, 1

- 1.1 Definições e unidades, 2
- 1.2 Carga e corrente, 4
- 1.3 Tensão, energia e potência, 6
- 1.4 Elementos ativos e passivos, 10
- 1.5 Análise de circuitos, 12  
Problemas, 12

## 2. CIRCUITOS RESISTIVOS, 14

- 2.1 Lei de Ohm, 15
- 2.2 Leis de Kirchhoff, 19
- 2.3 Resistência em série e divisão de tensão, 24
- 2.4 Resistências em paralelo e divisão de corrente, 29
- 2.5 Exemplos de análise, 33
- 2.6 Amperímetros, voltímetros e ohmímetros, 37
- 2.7 Resistores reais, 40  
Problemas, 41

## 3. FONTES DEPENDENTES OU CONTROLADAS, 46

- 3.1 Definições, 47
- 3.2 Circuitos com fontes dependentes, 48
- 3.3 Amplificadores operacionais, 50
- 3.4 Circuitos amplificadores  
Problemas, 55

## 4. MÉTODOS DE ANÁLISE, 60

- 4.1 Análise nodal, 61
- 4.2 Um exemplo, 64
- 4.3 Circuitos contendo fontes de tensão, 66
- 4.4 Circuito contendo AMP-OP'S, 70
- 4.5 Análise de malhas, 72
- 4.6 Circuitos contendo fontes de corrente, 74
- 4.7 Dualidade, 78
- 4.8 Análise de circuitos com ajuda de computador usando SPICE, 80  
Problemas, 84  
Problemas para aplicação de computadores, 90

## 5. TEOREMAS DE REDE, 91

- 5.1 Circuitos lineares, 92
- 5.2 Superposição, 95
- 5.3 Teoremas de Thévenin e de Norton, 100
- 5.4 Fontes práticas, 106
- 5.5 Transferência máxima de potência, 111
- 5.6 Circuitos equivalentes de Thévenin e SPICE, 113  
Problemas, 114  
Problemas de aplicação de computadores, 118

- 6. INDEPENDÊNCIA DAS EQUAÇÕES, 119**
  - 6.1 Gráfico de uma rede, 120
  - 6.2 Árvore e co-árvore, 122
  - 6.3 Equações independentes de tensões, 123
  - 6.4 Equações independentes de corrente, 127
  - 6.5 Aplicação em um circuito, 129  
Problemas, 131
  
- 7. ELEMENTOS ARMAZENADORES DE ENERGIA, 133**
  - 7.1 Capacitores, 134
  - 7.2 Energia armazenada em capacitores, 137
  - 7.3 Capacitores em série e em paralelo, 139
  - 7.4 Indutores, 142
  - 7.5 Energia armazenada em indutores, 145
  - 7.6 Indutores em série e em paralelo, 146
  - 7.7 Regime permanente em corrente contínua, 149
  - 7.8 Capacitores e indutores práticos, 151
  - 7.9 Dualidade e linearidade, 152
  - 7.10 Circuitos singulares, 153  
Problemas, 156
  
- 8. CIRCUITOS SIMPLIFICADOS RC E RL, 161**
  - 8.1 Circuitos RC sem fontes, 162
  - 8.2 Constantes de tempo, 165
  - 8.3 Circuito RL sem fontes, 168
  - 8.4 Resposta a uma função de excitação constante, 172
  - 8.5 O caso geral, 175
  - 8.6 Um procedimento simplificado, 178
  - 8.7 A função degrau unitário, 181
  - 8.8 Resposta ao degrau, 185
  - 8.9 Aplicação da superposição, 189
  - 8.10 SPICE e resposta transitória, 192  
Problemas, 195  
Problemas de aplicação de computadores, 200
  
- 9. CIRCUITOS DE SEGUNDA ORDEM, 201**
  - 9.1 Circuitos com dois elementos armazenadores, 202
  - 9.2 Equações de segunda ordem, 204
  - 9.3 A resposta natural, 205
  - 9.4 Tipos de frequências naturais, 207
  - 9.5 A resposta forçada, 211
  - 9.6 Excitação na frequência natural, 213
  - 9.7 A resposta completa, 215
  - 9.8 Circuito RLC paralelo, 218
  - 9.9 Circuito RLC série, 223
  - 9.10 Métodos alternativos para a obtenção das equações representativas, 226
  - 9.11 SPICE para respostas transitórias de circuitos de ordem elevada, 229  
Problemas, 232  
Problemas de aplicação de computadores, 237
  
- 10. EXCITAÇÃO SENOIDAL E FASORES, 238**
  - 10.1 Propriedades das senóides, 239
  - 10.2 Exemplo de um circuito RL, 243
  - 10.3 Um método alternativo usando números complexos, 244
  - 10.4 Excitações complexas, 247
  - 10.5 Fasores, 250
  - 10.6 Relações tensão-corrente para fasores, 252
  - 10.7 Impedância e admitância, 256
  - 10.8 Leis de Kirchhoff e associações de impedância, 259
  - 10.9 Circuitos fasoriais, 262  
Problemas, 265
  
- 11. ANÁLISE EM REGIME PERMANENTE C.A., 269**
  - 11.1 Análise nodal, 270
  - 11.2 Análise de malha, 275



- 11.3 Teoremas de rede, 277
- 11.4 Diagramas fasoriais, 282
- 11.5 SPICE para circuitos em regime permanente c.a., 285
  - Problemas, 286
  - Problemas de aplicação de computadores, 293

## **12. POTÊNCIA EM REGIME PERMANENTE C.A., 294**

- 12.1 Potência média, 295
- 12.2 Superposição e potência, 300
- 12.3 Valores eficazes, 304
- 12.4 Fator de potência, 305
- 12.5 Potência complexa, 308
- 12.6 Medição da potência, 312
  - Problemas, 313

## **13. CIRCUITOS TRIFÁSICOS, 319**

- 13.1 Sistemas monofásicos, a três fios, 320
- 13.2 Sistemas trifásicos Y-Y, 324
- 13.3 A conexão em delta, 329
- 13.4 Transformações Y-Y, 332
- 13.5 Medida da potência, 336
- 13.6 Análise de circuitos trifásicos com SPICE, 339
  - Problemas, 341
  - Problemas de aplicação de computador, 343

## **14. FREQUÊNCIA COMPLEXA E FUNÇÕES DE REDE, 344**

- 14.1 A senóide amortecida, 345
- 14.2 Frequência complexa e fasores generalizados, 348
- 14.3 Impedância e admitância, 350
- 14.4 Funções de rede, 354
- 14.5 Pólos e zeros, 356
- 14.6 A resposta natural da função de rede, 358
- 14.7 Frequências naturais, 360
- 14.8 Quadripolos, 362
- 14.9 Aplicações dos parâmetros dos quadripolos, 369
- 14.10 Associações de quadripolos, 374
  - Problemas, 378

## **15. RESPOSTA EM FREQUÊNCIA, 384**

- 15.1 Respostas em amplitude e fase, 385
- 15.2 Filtros, 387
- 15.3 Ressonância, 390
- 15.4 Funções passa-faixa e índice de mérito, 392
- 15.5 Uso dos diagramas de pólos e zeros, 395
- 15.6 Fator de escala da função de rede, 397
- 15.7 O decibel, 401
- 15.8 Resposta em frequência com o SPICE, 403
  - Problemas, 405
  - Problemas de aplicação de computador, 410

## **16. TRANSFORMADORES, 411**

- 16.1 Indutância mútua, 412
- 16.2 Armazenamento de energia, 420
- 16.3 Circuitos com transformadores lineares, 422
- 16.4 Impedância refletida, 425
- 16.5 O transformador ideal, 427
- 16.6 Circuitos equivalentes, 432
- 16.7 Análise de transformadores com SPICE, 433
  - Problemas, 435
  - Problemas de aplicação de computador, 438

## **17. MÉTODOS DE FOURIER, 439**

- 17.1 A série trigonométrica de Fourier, 440
- 17.2 Propriedades de simetria, 446

- 17.3 Resposta a excitações periódicas, 449
- 17.4 A série exponencial de Fourier, 452
- 17.5 Espectro de frequência, 455
- 17.6 A transformada de Fourier, 458
- 17.7 Operações com a transformada de Fourier, 462
- 17.8 Série de Fourier e SPICE, 466
  - Problemas, 467
  - Problemas de aplicação de computador, 470

## **18. TRANSFORMADAS DE LAPLACE, 471**

- 18.1 Definição, 472
- 18.2 Alguns resultados especiais, 474
- 18.3 A função impulso, 480
- 18.4 A antitransformada, 484
- 18.5 Aplicações a equações com integrais e derivadas, 489
- 18.6 O circuito transformado, 492
- 18.7 Funções de rede, 497
  - Problemas, 502

**Apêndice A Determinantes e regra de Cramer, 505**

**Apêndice B Eliminação de Gauss, 508**

**Apêndice C Números complexos, 511**

**Apêndice D Fórmula de Euler, 516**

**Apêndice E Métodos computacionais, 519**

**Apêndice F Respostas a problemas ímpares selecionados, 527**

**Índice alfabético, 532**

# Prefácio

Esse livro foi escrito para um curso de um ano ou de um semestre em análise de circuitos lineares, em nível de graduação. Esse é um curso básico em engenharia elétrica e é, normalmente, o primeiro contato do estudante com seu campo de estudo escolhido. É importante, portanto, para o livro-texto, cobrir completamente os fundamentos do assunto e, ao mesmo tempo, ser tão simples de entender quanto for possível. Estes foram nossos objetivos ao escrever este livro.

A maioria dos estudantes da teoria elementar de circuitos já terá estudado eletricidade e magnetismo num curso de física. Esse conhecimento prévio é útil, evidentemente, mas não é um pré-requisito para se ler o livro. O material aqui apresentado pode ser facilmente entendido por um estudante que tenha tido cursos básicos em cálculo integral e diferencial. A teoria de equações diferenciais necessária em análise de circuitos está totalmente incluída no texto e integrada com os tópicos apropriados da teoria de circuitos. Igualmente, determinantes, eliminação de Gauss e a teoria dos números complexos são apresentados em apêndices.

O amplificador operacional é apresentado imediatamente após o estudo do resistor e aparece, como esperado, juntamente com resistores, capacitores e indutores, como um elemento básico ao longo do texto. Do mesmo modo, fontes dependentes e sua construção com o emprego de amplificadores operacionais, são estudadas no início e encontradas rotineiramente em quase todos os capítulos.

Para auxiliar o leitor a compreender o texto, são fornecidos exemplos em abundância e numerosos exercícios, com suas respectivas respostas, são incluídos no final de cada seção. A maioria dos exemplos resolvidos é nitidamente destacada e numerada para facilitar sua referência. Problemas, alguns mais difíceis e outros mais simples que os exercícios do final das seções, estão incluídos no final de cada capítulo, e as respostas dos problemas de número ímpar são dadas num apêndice. A maioria dos exercícios foi projetada para dar respostas simples, como 6 volts, e não 6,128... volts, sem sacrifício de seus aspectos práticos. Esperamos, com esse procedimento, ter minimizado o tedioso e desnecessário trabalho aritmético e ter tornado o assunto "teoria de circuitos" mais interessante e gratificante.

Um esforço especial foi feito para incluir vários problemas e exercícios com valores reais dos elementos, e, evidentemente, fatores de escala de redes, também incluídos, podem ser usados para transformar todos os problemas remanescentes em problemas práticos. No capítulo de respostas em amplitude e fase, estão dados problemas sobre circuitos tão práticos como filtros elétricos. Filtros ativos, usando amplificadores operacionais, assim como filtros passivos, são usados como exemplos. Finalmente, um pequeno e selecionado grupo de exercícios e problemas foi usado para estender a teoria discutida nos capítulos. Desta forma, um material opcional foi incluído, sem acréscimo no texto dos capítulos.

Os nove primeiros capítulos do livro são dedicados a terminologia e análise no domínio do tempo, e os nove últimos capítulos lidam com análise no domínio da frequência. Alguns assuntos podem ser omitidos sem haver perda de continuidade. O capítulo sobre topologia de rede, um assunto bastante interessante, pode ser estudado inteiramente, parcialmente ou totalmente eliminado. Os Capítulos 17 e 18 sobre métodos de Fourier e Laplace, estando no final, podem ser facilmente omitidos se estes tópicos forem cobertos em outro curso, como algumas vezes o são. Por outro lado, pode-se omitir o procedimento clássico de equações diferenciais na teoria dos circuitos e ir diretamente aos métodos de transformada de Laplace e Fourier.

Nesta quarta edição, mantivemos o formato e as características básicas que foram bem recebidas nas três primeiras edições. Fizemos modificações ao longo do livro para melhor esclarecer o material e usamos recursos gráficos de forma mais eficiente, para salientar as equações e exemplos mais importantes e tornar o livro mais agradável de ser lido. Nossa nova edição contém, também, uma abundante quantidade de problemas no final dos capítulos, que foram totalmente revisados para essa edição. Para o leitor interessado em soluções de circuitos via computador, sugerimos o programa SPICE de análise de circuitos, que é descrito num apêndice, e exemplos usando o SPICE são dados nas seções finais de capítulos selecionados. Uma seção separada com problemas para resolver por computador se segue ao conjunto de problemas no final destes capítulos. Desta forma, o material sobre computadores pode ser facilmente omitido, se assim desejado.

Além das mudanças no texto, preparamos também vários itens auxiliares novos, para apoiar o texto. Estes complementos são\*:

\*Atenção: Este material didático de apoio está disponível apenas para a edição norte-americana do livro.

*Manual de soluções* — Contém soluções completas para os problemas do fim dos capítulos.

*Conjunto de problemas para o estudante, com soluções* — Esse manual contém aproximadamente 500 problemas adicionais, com suas soluções, que não estão incluídos no texto. O estudante pode adquirir esse manual para ganhar uma prática adicional na resolução de problemas.

*Transparências importantes* — Um conjunto de aproximadamente 200 pontos selecionados do texto, que foram preparados como gabaritos para uso do instrutor como transparências na sala de aula.

Você pode obter um conjunto de amostra destes itens, contatando a Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, E.U.A.

Finalmente, para tornar o assunto circuitos elétricos mais real e agradável ao estudante, mantivemos a característica de iniciar cada capítulo com uma foto e uma pequena biografia de famosos pioneiros no ramo da eletricidade, engenheiros ou inventores notáveis, cujo trabalho se constituiu em importante contribuição para a teoria dos circuitos.

Para as ilustrações de abertura dos capítulos, somos agradecidos à PRINT COLLECTION da THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY e às Fundações ASTOR, LENOX e TILDEN pelas ilustrações dos Capítulos 1, 5, 6, 7 e 18; à Biblioteca do Congresso, pelas dos Capítulos, 2, 3, 8, 9 e 17; ao Smithsonian Institution, pelas dos Capítulos 4, 12, 13 e 14; e ao maravilhoso livro *Dictionary of American Portraits* (Dover Publications, Inc., 1967, editado por Haywood and Blanche Cirker), pelas dos Capítulos 15 e 16. As fotos dos Capítulos 10 e 11 são cortesia da General Electric Company, a quem reconhecidamente agradecemos.

Existem muitas pessoas que nos deram assistência e conselhos de inestimável valor, com relação a esse livro. Estamos em débito com nosso colegas e nossos alunos, pela forma que o livro tomou, e aos professores M.E. Van Valkenburg, A.P. Sage, S.R. Laxpati e S.K. Mitra, que revisaram o manuscrito da primeira edição e fizeram muitos comentários e sugestões úteis.

David E. Johnson  
John L. Hilburn  
Johnny R. Johnson

**FUNDAMENTOS  
DE ANÁLISE  
DE CIRCUITOS  
ELÉTRICOS**



**TABELA DE PROPRIEDADES SELECIONADAS DAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE**

---

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s + a}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$\text{sen } kt$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$
$\text{cos } kt$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(s + a)^2}$
$e^{-at} \text{sen } kt$	$\frac{k}{(s + a)^2 + k^2}$
$e^{-at} \text{cos } kt$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + k^2}$
$t^n; n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}; n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{1}{(s + a)^n}$
$2 K e^{-\alpha t} \text{cos}(\beta t + \arg K)$	$\frac{K}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K^*}{s + \alpha + j\beta}$
$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt}); a \neq b$	$\frac{1}{(s + a)(s + b)}$
$\text{sen}(kt + \theta)$	$\frac{s \text{sen } \theta + k \text{cos } \theta}{s^2 + k^2}$
$\text{cos}(kt + \theta)$	$\frac{s \text{cos } \theta - k \text{sen } \theta}{s^2 + k^2}$

**TABELA DE PARES SELECIONADOS DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE**

---

$f(t)$	$F(s)$
$cf(t)$	$cF(s)$
$f_1(t) + f_2(t)$	$F_1(s) + F_2(s)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau$
$e^{-at}f(t)$	$F(s + a)$
$f(t - \tau)u(t - \tau)$	$e^{-s\tau}F(s)$
$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$	$F(s)G(s)$
$f(ct), c > 0$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
$t^n f(t), n = 0, 1, 2, \dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s) ds$
$f(t) = f(t + T)$	$\frac{\int_0^T f(t)e^{-st} dt}{1 - e^{-sT}}$



## FÓRMULAS COM INTEGRAIS ÚTEIS

---

$$\int \text{sen}^2 t \, dt = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \text{sen}2t + C$$

$$\int \text{cos}^2 t \, dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \text{sen}2t + C$$

$$\int \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{t}{a} + C$$

$$\int t e^{at} \, dt = (t - 1) e^t + C$$

$$\int e^{at} \text{sen} bt \, dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} (a \text{sen} bt - b \text{cos} bt) + C$$

$$\int e^{at} \text{cos} bt \, dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} (a \text{cos} bt + b \text{sen} bt) + C$$

$$\int t \text{sen} bt \, dt = \frac{1}{b^2} \text{sen} bt - \frac{t}{b} \text{cos} bt + C$$

$$\int t \text{cos} bt \, dt = \frac{1}{b^2} \text{cos} bt + \frac{t}{b} \text{sen} bt + C$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \text{sen}(\omega t + \alpha) \, dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \text{cos}(\omega t + \alpha) \, dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \text{sen}(n\omega t + \alpha) \, dt = 0; \text{ inteiro}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \text{cos}(n\omega t + \alpha) \, dt = 0; n \text{ inteiro}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \text{sen}(m\omega t + \alpha) \text{cos}(n\omega t + \alpha) \, dt = 0; m, n \text{ inteiros}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \text{sen}^2(\omega t + \alpha) \, dt = \pi/\omega$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \text{cos}^2(\omega t + \alpha) \, dt = \pi/\omega$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \text{cos}(m\omega t + \alpha) \text{cos}(n\omega t + \beta) \, dt = 0, m \neq n; m, n \text{ inteiros} \\ = \pi \text{cos}(\alpha - \beta)/\omega, m = n$$



Alessandro Volta  
1745-1827

1

## Introdução

---

*Esta circulação interminável de fluido elétrico pode parecer um contra-senso, mas no entanto ela é verdadeira e real, e você pode senti-la com suas mãos.*

*Alessandro Volta*

---

A teoria do circuito elétrico teve seu início real em 20 de março de 1800, quando o físico italiano Alessandro Volta anunciou sua invenção da bateria elétrica. Esse magnífico dispositivo possibilitou a Volta produzir *corrente elétrica*, um fluxo contínuo e permanente de eletricidade, em oposição à *eletricidade estática* produzida pelas máquinas elétricas até então existentes, tais como o jarro de Leyden e o próprio "*electrophorus*" de Volta.

Volta nasceu na cidade italiana de Como, então parte do Império Austríaco, e aos 18 anos já estava realizando experimentos elétricos e se correspondendo com os maiores investigadores europeus no ramo da eletricidade. Em 1782 ele se tornou professor de física na Universidade de Pádua, onde se envolveu em uma controvérsia com outro bem conhecido pioneiro da eletricidade, Luigi Galvani, professor de anatomia em Bolonha. Os experimentos de Galvani com sapos levaram-no a acreditar que a corrente elétrica fosse *eletricidade animal*, gerada pelo próprio organismo. Volta, por outro lado, sustentava que a corrente elétrica era *eletricidade metálica*, cuja fonte eram os metais diferentes atados às pernas dos sapos. Ambos estavam certos. Existe uma eletricidade animal, e Galvani se tornou famoso como fundador da fisiologia neural. A grande invenção de Volta, contudo, revolucionou o uso da eletricidade e deu ao mundo uma de suas maiores conquistas, a corrente elétrica. Volta foi honrosamente agraciado durante sua vida. Napoleão nomeou-o senador e mais tarde conde do Império Francês. Depois da queda de Napoleão, os austríacos permitiram que Volta retornasse à Itália como um cidadão de prestígio. Foi homenageado 54 anos após sua morte, quando a unidade de força eletromotriz foi oficialmente denominada *volt*. ■

A análise de circuitos elétricos é a primeira disciplina em quase todos os currículos de engenharia elétrica. Praticamente todos os ramos de engenharia elétrica, tais como eletrônica, sistemas de potência, sistemas de comunicação, máquinas elétricas e teoria de controle, são baseados na teoria de circuitos. Somente um tópico em engenharia elétrica, a teoria de campos eletromagnéticos, é mais básico que os circuitos; entretanto, vários problemas desta área são resolvidos por meio de circuitos elétricos equivalentes. Não seria exagero afirmar que o curso de teoria básica de circuitos elétricos, primeiro contato do estudante com a engenharia elétrica, é a disciplina mais importante de seu currículo.

Para iniciarmos nosso estudo de circuitos elétricos, necessitamos saber o que é um circuito elétrico, o que queremos dizer com sua análise, que quantidades são associadas a ele, em que unidades essas grandezas são medidas, e as definições e convenções básicas que são usadas na teoria de circuitos. Estes tópicos serão abordados neste capítulo.

## 1.1

### Definições e Unidades

Um *circuito* elétrico, ou *rede* elétrica, é uma coleção de elementos elétricos interconectados de maneira específica. Mais tarde definiremos o elemento elétrico de maneira formal, mas no momento nos contentaremos em representar um elemento genérico de *dois terminais* (bipolo), como mostrado na Fig. 1.1. Os terminais *a* e *b* estão acessíveis para sua conexão a outros elementos. Exemplos com os quais todos estamos familiarizados e que apresentaremos de modo formal nas seções posteriores são resistores, indutores, capacitores, geradores etc.

Elementos de circuitos mais complexos podem ter mais de dois terminais. Transistores e amplificadores operacionais são exemplos comuns. Elementos simples também podem ser combinados por interconexão de seus terminais de modo a formar um conjunto com qualquer número de terminais de acesso. Posteriormente, abordaremos alguns elementos multiterminais, porém nossa maior preocupação será com os bipolos.

Um exemplo de circuito elétrico com seis elementos é mostrado na Fig. 1.2. Alguns autores distinguem *circuito de rede*, exigindo que o circuito tenha no mínimo um percurso fechado, como o percurso *abca*. Usaremos os termos indistintamente, mas deve-se notar que sem ao menos um percurso fechado um circuito é de pouco ou nenhum interesse prático.

Para sermos mais específicos na definição de um elemento de circuito, precisaremos considerar certas quantidades associadas a ele, como *tensão* e *corrente*. Estas grandezas, e outras, quando aparecem, precisam ser cuidadosamente definidas. Isto só pode ser conseguido se tivermos um sistema padrão de unidades tal que, quando uma grandeza é descrita por sua medida, todos concordaremos no significado da medida. Felizmente, existe hoje em dia um sistema normalizado de unidades, empregado por todas as sociedades de profissionais de engenharia e pelos autores dos mais modernos textos da área. Este sistema, que empregaremos em todo o livro, é o *Sistema Internacional de Unidades* (abreviado SI), adotado em 1960 pela Conferência Geral de Pesos e Medidas.

Existem seis unidades básicas no SI, e todas as outras unidades são derivadas destas. Quatro dessas unidades básicas — metro, quilograma, segundo e coulomb — são importantes para a teoria de circuitos,

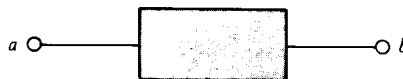


FIGURA 1.1 Bipolo genérico

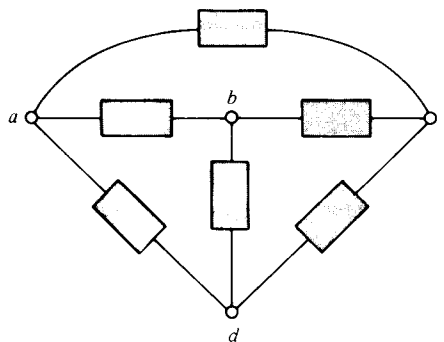


FIGURA 1.2 Circuito elétrico

e as abordaremos com algum detalhe. As duas unidades básicas restantes são o grau Kelvin e a candela, importantes para as áreas como física dos dispositivos eletrônicos e engenharia de iluminação.

As unidades no SI são definidas de forma precisa, em termos de quantidades permanentes e reproduzíveis. Entretanto, as definições são altamente esotéricas e, em alguns casos, compreensíveis somente para cientistas atômicos.<sup>1</sup> Portanto, vamos nos contentar com a citação das unidades básicas e suas relações com o conhecido Sistema Britânico de Unidades, que inclui polegadas, pés, libras etc..

A unidade básica de comprimento no SI é o *metro*, abreviado m, que é relacionado ao sistema britânico pela relação 1 polegada = 0,0254 m. A unidade básica de massa é o *quilograma* (kg) e a unidade básica de tempo é o *segundo* (s). Em termos de unidades britânicas, 1 libra-massa é exatamente 0,45359237 kg, e o segundo é o mesmo em ambos os sistemas.

A quarta unidade do SI é o *coulomb* (C), que é a unidade básica usada para medir cargas elétricas. Preferimos adiar a definição desta variável até a próxima seção, quando trataremos de carga e corrente. O nome *coulomb* homenageia o cientista francês, inventor e engenheiro militar Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), um dos pioneiros dos campos da fricção, eletricidade e magnetismo.

Podemos notar neste ponto que todas as unidades SI que receberam nomes de pessoas famosas têm sua abreviatura em letra maiúscula, aliás, abreviações em minúsculas são frequentemente usadas. É importante mencionar que poderíamos ter escolhido outras unidades e não as selecionadas, para definir as unidades básicas. Por exemplo, em lugar de coulomb poderíamos empregar o *ampère* (A), unidade de corrente elétrica a ser considerada mais tarde. Neste caso, o coulomb poderia ser obtido como uma unidade derivada.

Além do ampère, outras três unidades derivadas são úteis na teoria de circuitos. Elas são as unidades usadas para medir força, trabalho ou energia e potência. A unidade fundamental de força, trabalho ou energia e potência. A unidade fundamental de força é o *newton* (N), que é a força requerida para acelerar uma massa de 1 kg a 1 metro por segundo ~~por segundo~~ (1 m/s<sup>2</sup>). Então 1 N = 1 kg·m/s<sup>2</sup>. O nome newton é em homenagem ao grande cientista inglês Sir Isaac Newton (1642-1727). Os trabalhos de Newton são muito numerosos para serem listados em um mero capítulo.

A unidade fundamental de trabalho ou energia é o *joule* (J), nome que homenageia o físico inglês James P. Joule (1818-1889), que contribuiu na descoberta da lei da conservação de energia e ajudou a estabelecer a idéia de que o calor é uma forma de energia. Um joule é o trabalho realizado por uma força de 1 N aplicada pela distância de 1 m. Assim, 1 J = 1 N·m.

A última unidade derivada que iremos abordar é o *watt*, que é a unidade fundamental de potência, a velocidade na qual um trabalho é realizado ou a energia é dissipada. O watt é definido como 1 J/s e seu nome é em homenagem a James Watt (1736-1819), o engenheiro escocês que projetou a primeira máquina a vapor.

Antes de encerrarmos este tópico sobre unidades, chamamos a atenção para a grande vantagem que o SI tem sobre o sistema britânico: é que ele incorpora o sistema decimal para relacionar unidades

TABELA 1.1 Prefixos no SI

Múltiplo	Prefixo	Símbolo
10 <sup>9</sup>	Giga	G
10 <sup>6</sup>	Mega	M
10 <sup>3</sup>	Quilo	k
10 <sup>-3</sup>	Mili	m
10 <sup>-6</sup>	Micro	μ
10 <sup>-9</sup>	Nano	n
10 <sup>-12</sup>	Pico	p

<sup>1</sup> As definições completas das unidades básicas podem ser encontradas em diversas fontes, como, por exemplo, "IEEE Recommended Practice for Units in Published Scientific Technical Work", de C. H. Page et al. (*IEEE Spectrum*, vol. 3, n.º 3, pp. 169-173, março de 1966.)

grandes e pequenas à unidade básica. As várias potências de 10 são designadas por prefixos-padrão, alguns dos quais são dados, seguidos de sua abreviatura, na Tabela 1.1.

Como um exemplo, em época não remota, o segundo era considerado um tempo muito pequeno e frações como 0,1 ou 0,01 de segundo eram inimaginavelmente pequenas. Nos dias atuais, em algumas aplicações como computadores digitais, o segundo é uma unidade impraticavelmente grande. Como consequência, tempos como de 1 nanossegundo (1 ns ou  $10^{-9}$  s) são de uso comum. Outro exemplo comum é 1 grama (g) =  $10^{-3}$  kg.

### EXEMPLO 1.1

Na Olimpíada de 1972, uma das sete medalhas de ouro de Mark Spitz foi por nadar 100 m em 51,22 s. Converta sua velocidade média para milhas por hora. Iniciamos por notar que

$$\begin{aligned} 1 \text{ m} &= \frac{1}{0,0254} \text{ pol} \\ &= \left( \frac{1}{0,0254} \text{ pol} \right) \left( \frac{1 \text{ pé}}{12 \text{ pol}} \right) \left( \frac{1 \text{ mi}}{5280 \text{ pé}} \right) \end{aligned}$$

ou

$$1 \text{ m} = 0,00062137 \text{ milha}$$

Portanto, a velocidade média é

$$\begin{aligned} \frac{100 \text{ m}}{51,22 \text{ s}} &= \left( \frac{100 \text{ m}}{51,22 \text{ s}} \right) \left( 0,00062137 \frac{\text{mi}}{\text{m}} \right) \left( 3600 \frac{\text{s}}{\text{h}} \right) \\ &= 4,37 \text{ mph} \end{aligned}$$

Note-se que há o cancelamento de unidades a cada passo, o que pode ser usado para indicar que fatores são necessários no processo de conversão.

## EXERCÍCIOS

- 1.1.1 Calcule o número de nanossegundos em (a) 0,4 s, (b) 20 ms, e (c) 15  $\mu$ s. 5  $\mu$ s.  
*Resposta:* (a)  $4 \times 10^8$ ; (b)  $2 \times 10^7$ ; (c) 15.000
- 1.1.2 Calcule (a) o número de segundos em 22  $\mu$ s, (b) o número de quilômetros em 1 milha, e (c) o trabalho realizado por uma força constante de 200  $\mu$ N aplicada sobre uma massa de 10 g por distância de 50 m.  
*Resposta:* (a)  $2,2 \times 10^{-5}$ ; (b) 1,609; (c) 10 mJ
- 1.1.3 Sebastian Coe quebrou três recordes mundiais de corrida em 1979 correndo os 800 metros em 1 minuto e 42,4 segundos, a milha em 3 minutos e 49,0 segundos, e os 1500 metros em 3 minutos e 32,1 segundos. Calcule a velocidade média em milhas por hora em cada modalidade.  
*Resposta:* 17,5; 15,7; 15,8
- 1.1.4 Robert Hayes estabeleceu um recorde mundial em 1963 correndo 100 jardas em 9,1 segundos. Na Olimpíada de 1988, Ben Jonhson correu os 100 metros em 9,79 segundos. Ele foi desclassificado e Carl Lewis declarado vencedor com um tempo de 9,92 segundos, um recorde americano. Calcule a velocidade média em milhas por hora destes três corredores.  
*Resposta:* Hayes, 22,48; Johnson, 22,85; Lewis, 22,55.

## 1.2

### Carga e Corrente

Estamos familiarizados com a força de atração gravitacional entre corpos, que é responsável por nos mantermos na terra e é a razão pela qual uma maçã, ao se desprender de uma árvore, cai ao chão, em vez de subir voando para o céu. Existem corpos, contudo, que se atraem mutuamente por forças muito fora da proporção de suas massas. Tais forças podem repelir, assim como atrair, e, visivelmente, são forças gravitacionais.

Explicamos essas forças afirmando que elas são de natureza elétrica e aparecem pela presença de *cargas elétricas*. A existência de ambas as forças, atração e repulsão, é justificada por dois tipos de cargas, positivas e negativas; cargas diferentes se atraem e iguais se repelem.

Sabemos, de acordo com a teoria moderna, que a matéria é feita de átomos, que são compostos de partículas fundamentais. As mais importantes dessas partículas são os prótons (carga positiva) e os neutrons (neutrons sem presença de carga), localizados no núcleo do átomo, e os elétrons (cargas negativas), que descrevem uma órbita sobre o núcleo. Normalmente, o átomo é eletricamente neutro, as cargas negativas dos elétrons contrabalançam as cargas positivas dos prótons. Partículas podem tornar-se positivamente carregadas se perderem elétrons para outras partículas, e se tornarão negativas se ganharem elétrons de outras partículas.

Por exemplo, podemos produzir cargas em um balão esfregando-o contra nosso cabelo. O balão será então atraído para uma parede ou para o teto, que estão descarregado. Em relação à carga negativa do balão, a parede ou o teto, neutros, estão carregados opostamente.

Agora, definiremos o *coulomb* (C), apresentado na seção anterior, dizendo que a carga de um elétron é uma carga negativa de  $1,6021 \times 10^{-19}$  coulomb. Em outras palavras, um coulomb é a carga de  $6,24 \times 10^{18}$  elétrons. Estes são, sem dúvida, números inimagináveis, mas seu tamanho habilita-nos a usar números mais usuais, tais como 2 C, na teoria de circuitos que se segue.

O símbolo de carga que iremos adotar será  $Q$  ou  $q$ , a letra maiúscula será empregada para denotar cargas constantes, tais como  $Q = 4C$ , e a letra minúscula, para denotar cargas variáveis no tempo. Neste último caso, enfatizaremos a variância no tempo escrevendo  $q(t)$ . Esta nomenclatura envolvendo letras maiúsculas e minúsculas será estendida a todas as outras grandezas elétricas.

A proposição básica de um circuito elétrico é a de mover ou transferir cargas através de um percurso especificado. Este movimento de carga constitui uma *corrente elétrica*, denotada pelas letras  $i$  ou  $I$ , originárias da palavra francesa “*intensité*”. Formalmente, a corrente é a taxa de variação no tempo da carga, dada por

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1.1)$$

A unidade básica de corrente é o *ampère* (A), denominada em homenagem a André Marie Ampère (1775-1836), o matemático e físico francês que formulou leis de eletromagnetismo na década de 1820. Um ampère é igual a 1 coulomb por segundo.

Na teoria de circuitos, a corrente é geralmente imaginada como o movimento de cargas positivas. Esta convenção foi estabelecida por Benjamin Franklin (1706-1790), o qual imaginou que a corrente elétrica trafegava do positivo para o negativo. Sabemos nos dias de hoje que a corrente em um condutor metálico é o movimento de elétrons que se desprendem das órbitas dos átomos do metal. Desta forma, devemos distinguir a corrente *convencional* (o movimento de cargas positivas), que é usada na teoria de redes elétricas, e a corrente *eletrônica*. A menos que especificado de outro modo, o nosso conceito de corrente será o da corrente convencional.

Como exemplo, suponha que a corrente no fio da Fig. 1.3(a) é  $I = 3$  A. Isto é, 3 C/s passam em algum ponto especificado do fio. Isto é simbolizado por uma seta com a indicação 3 A e cujo sentido mostra que o movimento é da esquerda para a direita. Esta situação é equivalente à mostrada na Fig. 1.3(b), que indica  $-3$  C/s ou  $-3$  A, no sentido da direita para a esquerda.



FIGURA 1.3 Duas representações da mesma corrente

A Figura 1.4 representa um elemento genérico de circuito, com uma corrente  $i$  percorrendo-o do terminal esquerdo para o direito. A carga total introduzida no elemento entre os instantes de tempo  $t_0$  e  $t$  é encontrada pela integração de (1.1). O resultado é

$$q_T = q(t) - q(t_0) = \int_{t_0}^t i dt \quad (1.2)$$

Devemos observar neste ponto que consideramos os elementos de rede como sendo *eletricamente neutros*. Isto é, nenhuma carga positiva ou negativa pode ser acumulada no elemento. A carga positiva entrando deve corresponder a uma carga positiva do mesmo valor saindo (ou, de modo equivalente, a uma carga negativa entrando). Então, a corrente entrando no terminal esquerdo da Figura 1.4 deve sair pelo terminal direito.

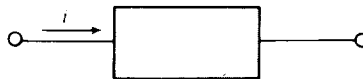


FIGURA 1.4 Corrente fluindo em um elemento genérico

## EXEMPLO 1.2

Como um exemplo, suponha que a corrente que entra em um terminal de um elemento é  $i = 4t$  A. A carga total que entra pelo terminal no intervalo compreendido entre  $t = 0$  e  $t = 3$  é dada por

$$q = \int_0^3 4t \, dt = 18 \text{ C}$$

Existem vários tipos de corrente no uso comum, algumas das quais são mostradas na Figura 1.5. Uma corrente constante, como a mostrada na Figura 1.5(a), será denominada *corrente contínua* ou *cc*. Uma *corrente alternada*, ou *ca*, é uma corrente senoidal como a da Figura 1.5(b). As Figuras 1.5(c) e (d) ilustram, respectivamente uma *corrente exponencial* e uma *dente de serra*.

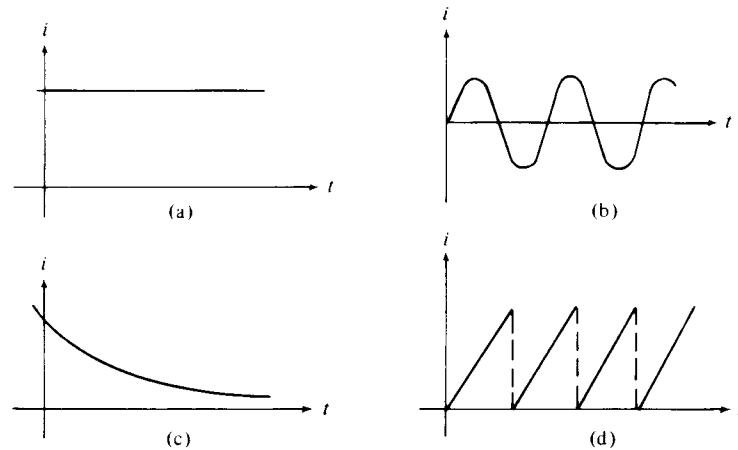


FIGURA 1.5 (a) cc; (b) ca; (c) corrente exponencial; (d) corrente dente de serra

Existem muitos usos comerciais para a cc, como no “flash” de máquinas fotográficas e fontes de alimentação para circuitos eletrônicos, e, é claro, o uso de ca em residências é comum em todo o mundo. Correntes exponenciais aparecem freqüentemente (queiramos ou não), quando uma chave atua para fechar um circuito energizado. Ondas dente de serra são empregadas em equipamentos, como osciloscópios, usados para mostrar características elétricas na tela.

## EXERCÍCIOS

- 1.2.1 Quantos elétrons são representados por uma carga de 0,32042 pC?

Resposta: 2 milhões

- 1.2.2 A carga total que entra por um terminal de um elemento é dada por

$$q = 4t^3 - 5t \text{ mC}$$

Calcule o valor da corrente  $i$  entre  $t = 0$  e  $t = 2$  s.

Resposta:  $-5,43$  mA

- 1.2.3 A corrente que entra por um terminal é dada por

$$i = 1 + \pi \sin 2\pi t \text{ A}$$

Calcule a carga total que entrou pelo terminal entre  $t = 0$  e  $t = 1,5$  s.

Resposta: 2,5 C.

## 1.3

### Tensão, Energia e Potência

Cargas em um condutor, exemplificadas por elétrons livres, podem mover-se aleatoriamente. Entretanto, se queremos um movimento orientado, como no caso da corrente elétrica, devemos aplicar uma *força*

*eletromotriz* (FEM). Portanto, um trabalho é realizado sobre as cargas. Definiremos a tensão “sobre” um elemento como o trabalho realizado para mover uma unidade de carga (+ 1 C) através do elemento, de um terminal ao outro. A unidade de tensão, ou *diferença de potencial*, como é algumas vezes chamada, é o *volt* (V), em honra ao físico italiano Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta (1745-1827), que inventou a bateria voltaica.

Visto que a tensão é o número de joules de trabalho desenvolvido sobre 1 coulomb, podemos dizer que 1 V é 1 J/C. Então, o volt é uma unidade derivada no SI, expresso em termos de outras unidades.

Representaremos uma tensão por  $v$  ou  $V$  e usaremos a convenção de polaridade (+, -) mostrada na Figura 1.6. Ou seja, o terminal  $A$  é  $v$  volts positivos em relação ao terminal  $B$ . Em termos de diferença de potencial, o terminal  $A$  está num *potencial*  $v$  volts acima do terminal  $B$ . Em termos de trabalho, é claro que, para mover uma unidade de carga de  $B$  para  $A$ , são necessários  $v$  joules de trabalho.

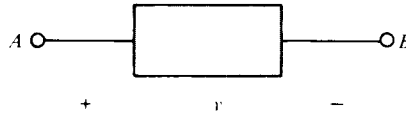


FIGURA 1.6 Convenção de polaridade da tensão

Alguns autores preferem descrever a tensão sobre um elemento em termos de *queda* e *elevação* de tensão. Com referência à Figura 1.6, uma queda de tensão de  $v$  volts ocorre no movimento de  $A$  para  $B$ . Em contraste, uma elevação de  $v$  volts ocorre no movimento de  $B$  para  $A$ .

Como exemplos, nas Figuras 1.7(a) e (b) temos duas representações da mesma tensão. Em (a), o terminal  $A$  é +5 V sobre o terminal  $B$  e em (b) o terminal  $B$  é -5 V acima do terminal  $A$  (ou +5 V abaixo de  $A$ ).

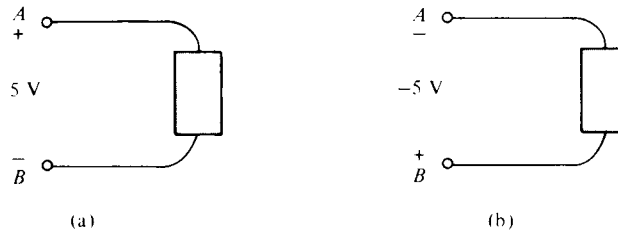


FIGURA 1.7 Duas representações equivalentes de tensão

Também podemos empregar a notação de subíndice duplo  $v$  para designar o potencial do ponto  $a$  com relação ao ponto  $b$ . Neste caso, temos geralmente  $v_{ab} = -v_{ba}$ . Assim, na Figura 1.7(a),  $v_{AB} = 5$  V e  $v_{BA} = -5$  V.

Na transferência de cargas através de um elemento, um trabalho é desenvolvido, como já foi dito. Ou, em outras palavras, energia é fornecida. Para sabermos se a energia é fornecida ao elemento ou por ele ao restante do circuito, devemos saber não somente a polaridade da tensão sobre o elemento, mas também o sentido da corrente ao atravessar o mesmo. Se uma corrente positiva entra no terminal positivo, então uma força externa deve estar excitando a corrente, logo fornecendo ou *entregando* energia ao elemento. Neste caso, o elemento está *absorvendo* energia. Se, por outro lado, uma corrente positiva sai pelo terminal positivo (entra pelo negativo), então o elemento está entregando energia ao circuito externo.

Por exemplo, na Figura 1.8(a), o elemento está absorvendo energia. Uma corrente positiva entra no terminal positivo. Este também é o caso na Figura 1.8(b). Nas Figuras 1.8(c) e (d), a corrente positiva entra pelo terminal negativo e então o elemento está entregando energia, em ambos os casos.

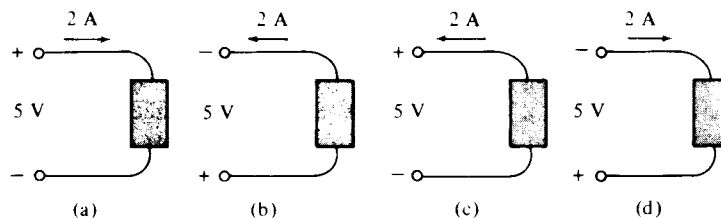


FIGURA 1.8 Várias relações tensão-corrente



Agora consideraremos a *velocidade* pela qual a energia está sendo entregue para ou por um elemento do circuito. Se a tensão através do elemento é  $v$  e uma pequena carga  $\Delta q$  se move através do elemento do terminal positivo para o negativo, então a energia absorvida pelo elemento,  $\Delta w$ , é dada por

$$\Delta w = v \Delta q$$

Se o tempo envolvido é  $\Delta t$ , então a velocidade com que o trabalho é executado, ou a energia  $w$  é dissipada, é dada por

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

ou

$$\frac{dw}{dt} = v \frac{dq}{dt} = vi \quad (1.3)$$

Visto que, por definição, a velocidade com que uma energia é dissipada é a potência, denotada por  $p$ , temos

$$p = \frac{dw}{dt} = vi \quad (1.4)$$

Podemos observar que (1.4) é dimensionalmente correta, pois as unidades de  $vi$  são (J/C)(C/s) ou J/s, que é watt (W), definida anteriormente.

As quantidades  $v$  e  $i$  são geralmente funções do tempo, neste caso escreveremos  $v(t)$  e  $i(t)$ . Portanto,  $p$  dada por (1.4) é uma grandeza variável no tempo. Algumas vezes é chamada de potência *instantânea* porque seu valor é referido ao instante de tempo no qual  $v$  e  $i$  são medidos.

Resumindo, o elemento típico mostrado na Figura 1.9 está absorvendo energia, dada por  $p = vi$ . Se a polaridade de  $v$  ou a de  $i$  (mas não de ambas) é invertida, então o elemento estará entregando potência,  $p = vi$ , para o circuito externo. Naturalmente, dizer que um elemento entrega uma potência negativa, digamos  $-10$  W, é o mesmo que dizer que ele absorve uma potência positiva, neste caso,  $+10$  W.

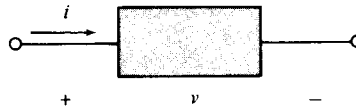


FIGURA 1.9 Elemento típico com tensão e corrente

### EXEMPLO 1.3

Como exemplos, nas Figuras 1.8(a) e (b), o elemento está absorvendo uma potência  $p = (5)(2) = 10$  W. [Na Figura 1.8(b), 2 A saem pelo terminal negativo, e logo 2 A entram pelo positivo]. Nas Figuras 1.8(c) e (d) são fornecidos 10 W para um circuito externo, pois 2 A saem pelo terminal positivo ou, equivalentemente,  $-2$  A entram pelo terminal positivo.

Antes de encerrar nossa discussão sobre potência e energia vamos resolver (1.4) para a energia  $W$  fornecida a um elemento entre os instantes  $t_0$  e  $t$ . Após a integração de ambos os lados da equação, entre  $t_0$  e  $t$  temos:

$$w(t) - w(t_0) = \int_{t_0}^t vi \, dt \quad (1.5)$$

### EXEMPLO 1.4

Por exemplo, se na Figura 1.9  $i = 2t$  A e  $v = 6$  V, a energia fornecida ao elemento entre  $t = 0$  e  $t = 2$  s é dada por

$$w(2) - w(0) = \int_0^2 (6)(2t) \, dt = 24 \text{ J}$$

Visto que o membro esquerdo de (1.5) representa a energia fornecida ao elemento entre  $t_0$  e  $t$ , podemos interpretar  $w(t)$  como a energia fornecida ao elemento entre o início do tempo e  $t$ , e  $w(t_0)$  como a energia entre o início do tempo e  $t_0$ . No início do tempo, que consideramos  $t = -\infty$ , a energia fornecida ao elemento era zero; isto é,

$$w(-\infty) = 0$$

Se  $t_0 = -\infty$ , em (1.5), então teremos a energia fornecida ao elemento do início até  $t$  sendo dada por

$$w(t) = \int_{-\infty}^t vi \, dt \quad (1.6)$$

Isto é consistente com (1.5), pois

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{-\infty}^t vi \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{t_0} vi \, dt + \int_{t_0}^t vi \, dt \end{aligned}$$

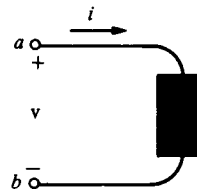
De (1.6) pode ser escrito

$$w(t) = w(t_0) + \int_{t_0}^t vi \, dt$$

que é (1.5).

## EXERCÍCIOS

- 1.3.1** Calcule  $v$  se  $i = 6 \text{ mA}$  e o elemento está (a) absorvendo uma potência de  $p = 18 \text{ mW}$  e (b) fornecendo para um circuito externo uma potência  $p = 12 \text{ mW}$ .  
*Resposta:* (a)  $3 \text{ V}$ ; (b)  $-2 \text{ V}$



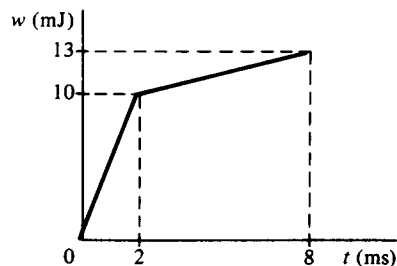
**EXERCÍCIO 1.3.1**

- 1.3.2** Se  $i = 3 \text{ A}$  e  $v = 6 \text{ V}$  no Ex. 1.3.1 calcule (a) a potência absorvida pelo elemento e (b) a energia entregue ao elemento entre 2 e 4 s.  
*Resposta:* (a)  $18 \text{ W}$ ; (b)  $36 \text{ J}$
- 1.3.3** Um elemento de dois terminais absorve uma energia  $w$  como mostrado. Se a corrente que entra pelo terminal positivo é

$$i = 100 \cos 1000\pi t \text{ mA}$$

Calcule a tensão sobre o elemento em  $t = 1 \text{ ms}$  e em  $t = 4 \text{ ms}$

*Resposta:*  $-50, 5 \text{ V}$



**EXERCÍCIO 1.3.3**

## Elementos Ativos e Passivos

Podemos classificar os elementos dos circuitos em duas categorias gerais, elementos *passivos* e elementos *ativos*, considerando se a energia é fornecida para ou por eles.

Um elemento de circuito é dito passivo se a energia total entregue a ele pelo resto do circuito é sempre positiva. Isto é, referindo a (1.6) para todo  $t$  temos

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt = \int_{-\infty}^t vi dt \geq 0 \quad (1.7)$$

As polaridades de  $v$  e  $i$  são como mostradas na Figura 1.9. Como veremos posteriormente, exemplos de elementos passivos são resistores, capacitores e indutores.

Um elemento ativo é aquele que não é passivo, naturalmente. Quer dizer, (1.7) não se mantém por todo o tempo. Exemplos de elementos ativos são geradores, baterias e circuitos eletrônicos que requerem uma fonte de alimentação.

Não é o momento de iniciarmos uma discussão formal sobre os vários elementos passivos. Isto será feito nos capítulos subseqüentes. Nesta seção apresentaremos uma breve discussão sobre dois importantes elementos ativos, a fonte ideal ou independente de tensão e a fonte ideal ou independente de corrente.

Uma *fonte independente de tensão* é um elemento de dois terminais, como uma bateria ou um gerador, que mantém uma dada tensão entre seus terminais. A tensão é completamente independente da corrente fornecida. O símbolo para uma fonte de tensão que tem  $v$  volts entre seus terminais é mostrado na Figura 1.10. A polaridade é como mostrada, indicando que o terminal  $a$  está  $v$  volts acima do terminal  $b$ . Desta forma, se  $v > 0$ , então o terminal  $a$  está num potencial maior que o terminal  $b$ . A situação é oposta, é claro, se  $v < 0$ .

Na Figura 1.10 a tensão  $v$  pode ser variável com o tempo ou de valor constante; neste caso, será indicada como  $V$ . Outro símbolo que normalmente é empregado para representar uma fonte de tensão constante, como uma bateria com  $V$  volts entre seus terminais, é mostrado na Figura 1.11. No caso de fontes de tensão constante, podemos empregar tanto a Figura 1.10 quanto a Figura 1.11.

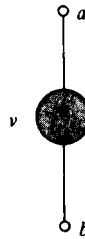


FIGURA 1.10 Fonte de tensão independente

Devemos observar que as indicações de polaridade na Figura 1.11 são redundantes, visto que a polaridade poderia ser definida pela posição dos traços curtos e longos. Poderemos emitir as indicações de polaridade na maioria dos casos no futuro. Entretanto, ao se analisar um circuito, por vezes é conveniente usar as indicações de polaridade.

Uma fonte de *corrente independente* é um elemento de dois terminais através do qual flui uma corrente de valor especificado. O valor da corrente é independente da tensão sobre o elemento. O símbolo para uma fonte de corrente independente é mostrado na Figura 1.12, onde  $i$  é a corrente especificada. O sentido da corrente é indicado pela seta.

Fontes independentes são usualmente empregadas para fornecer potência ao circuito externo e não para absorvê-la. Desta forma, se  $v$  é a tensão entre os terminais da fonte, e se sua corrente  $i$  está saindo do terminal positivo, então a fonte estará fornecendo uma potência, dada por  $p = vi$ , para o circuito externo. De outra forma, estará absorvendo energia. Por exemplo, na Figura 1.13(a), a bateria está fornecendo 24 W para o circuito externo. Na Figura 1.13(b), a bateria está absorvendo 24 W, como seria no caso de estar sendo carregada.



FIGURA 1.11 Fonte de tensão constante



FIGURA 1.12 Fonte independente de corrente

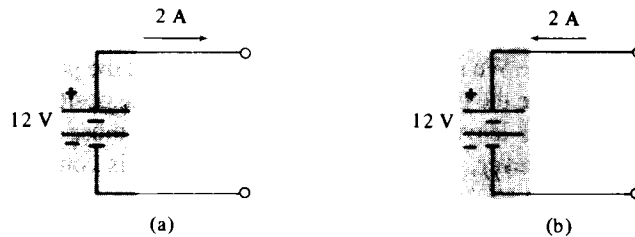


FIGURA 1.13 (a) Fonte fornecendo, (b) fonte absorvendo potência

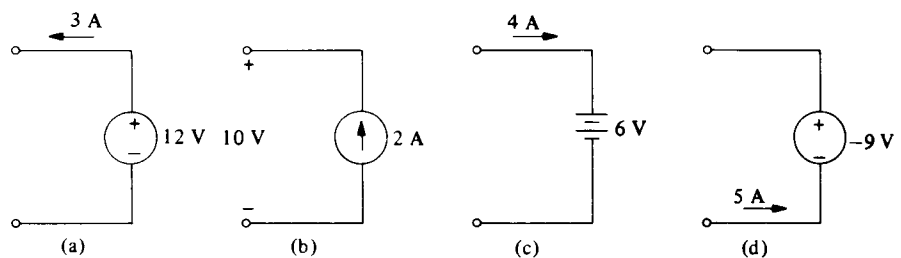
As fontes que apresentamos aqui, bem como os elementos de circuitos a serem considerados posteriormente, são *elementos ideais*, isto é, são modelos matemáticos que se aproximam de elementos físicos reais apenas sob certas condições. Por exemplo, uma bateria ideal de automóvel fornece uma tensão constante e igual a 12 V, independentemente do circuito externo ao qual esteja conectada. Uma vez que o valor da corrente é completamente arbitrário, poderia, teoricamente, entregar uma potência infinita. Isto, é claro, não é possível em um dispositivo real. Uma bateria automotiva real de 12 V só fornece tensão constante se a corrente fornecida for pequena. Quando a corrente excede poucas centenas de ampères, a tensão cai para valores bem inferiores a 12 V.

Abordaremos as fontes práticas em capítulos posteriores e veremos sob que condições podem aproximar-se de uma fonte ideal. Mais tarde também consideraremos as fontes controladas ou *dependentes*, nas quais uma tensão (ou corrente) é controlada por outra tensão ou corrente de outra parte do circuito.

## EXERCÍCIOS

1.4.1 Calcule as potências a serem fornecidas pelas fontes mostradas.

Resposta: (a) 36; (b) 20; (c) -24; (d) -45 W



EXERCÍCIO 1.4.1

1.4.2 A tensão nos terminais de uma fonte de tensão é  $v = 6 \sin 2t$  V. Se a carga que deixa o terminal positivo é  $q = -2 \cos 2t$  mC, calcule a potência fornecida pela fonte a qualquer tempo e a energia fornecida pela fonte entre 0 e  $t$  segundos.

Resposta:  $24 \sin^2 2t$  mW,  $12t - 3 \sin 4t$  mJ

## Análise de Circuitos

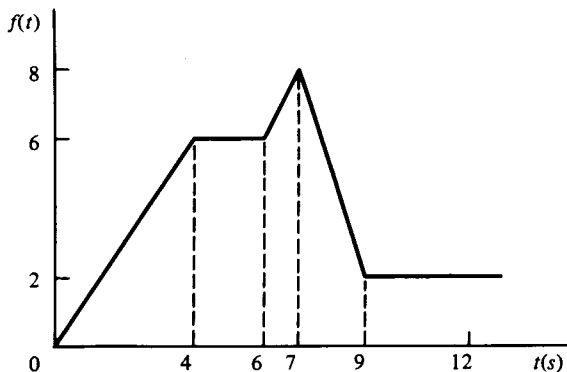
Vamos agora examinar o termo *análise de circuitos*, que é empregado no título do livro, e ver o que ele significa. Geralmente, se um circuito elétrico está submetido a uma *entrada* ou *excitação* na forma de, digamos, uma tensão ou uma corrente proveniente de uma fonte independente, então produzirá uma saída ou resposta. A saída ou resposta pode também ser uma tensão ou corrente associada a algum elemento do circuito. Pode haver, é claro, mais de uma entrada ou saída.

Existem dois ramos principais da teoria de circuitos, e eles são derivados das três palavras chaves que se seguem: entrada, saída e circuito. O primeiro é a *análise de circuitos*, onde, dado o circuito e sua entrada, nosso interesse será encontrar a saída. O outro ramo é a síntese de circuitos, onde, dadas a entrada e a saída, nosso interesse será encontrar o próprio circuito.

A síntese de redes é geralmente bem mais complexa que a análise e provavelmente o estudante só se deparará com esta num curso avançado. A análise de circuitos será abordada neste livro. Estaremos interessados somente em encontrar uma ou mais saídas, como a tensão ou a corrente existentes em algum ponto do circuito, ou na determinação da energia ou da potência fornecida a um ou outro elemento. Ou, ainda, podemos desejar realizar uma análise completa, encontrando todos os valores de tensões ou de correntes desconhecidas em um circuito. De qualquer forma, nos capítulos seguintes desenvolveremos métodos sistemáticos de análise que podem ser aplicados genericamente a um circuito do tipo do que estamos considerando. Os métodos não serão somente sistemáticos e gerais, mas também serão simples e de aplicação direta.

## PROBLEMAS

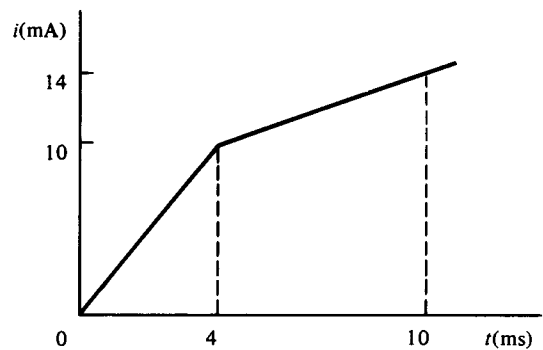
- 1.1 Em 1960 Don Styrone estabeleceu um recorde mundial correndo 220 jardas em 21,9 segundos, e na Olimpíada de 1988, Florence Griffith Joyner estabeleceu um recorde mundial feminino correndo 200 metros em 21,34 segundos. Compare suas velocidades médias em milhas por hora.
- 1.2 Roger Bannister, em 1954, quebrou pela primeira vez a barreira de 4 minutos correndo uma milha em 3 minutos e 59,4 segundos. Tatyana Kazankina estabeleceu um recorde mundial feminino correndo, em 1980, 1500 metros em 3 minutos e 52,47 segundos. Mary Decker Slaney, em 1985, correu uma milha em 4 minutos e 16,71 segundos. Compare suas velocidades médias em milhas por hora.
- 1.3 Se a função  $f(t)$  é a carga em coulombs que entra pelo terminal positivo de um elemento no tempo  $t$  (segundos), calcule (a) a carga total que entrou no intervalo compreendido entre 4 e 9 s, (b) a carga que entrou em 8 s, e (c) a corrente em 1,5 e 8 s.



PROBLEMA 1.3

- 1.4 Se  $f(t)$  no Prob. 1.3 é a corrente em ampères que entra em um elemento e  $t$  é dado em segundos, calcule a carga que entrou no elemento no intervalo entre 4 e 9 s, e a corrente nos instantes 6,5 e 8 s.
- 1.5 No Prob. 1.3, se a tensão sobre o elemento é 6 V, calcule a potência entregue ao elemento em  $t = 1, 5, 8$  e 10 s.
- 1.6 Se a tensão sobre um elemento é 8 V e a corrente  $i$  que entra no elemento pelo terminal positivo é a mostrada, calcule a potência

entregue ao elemento em  $t = 7$  ms, a carga e a energia totais entregues ao elemento entre 0 e 10 ms.



PROBLEMA 1.6

- 1.7 Se a função representada no gráfico do Prob. 1.6 é a carga em mC que entra pelo terminal positivo de um elemento *versus* o tempo em ms, e a tensão é de 6V, calcule (a) a potência entregue ao elemento em 2, 5 e 8 ms e (b) a energia total entregue ao elemento entre 0 e 10 ms.
- 1.8 Se a função representada no gráfico do Prob. 1.6 é uma tensão  $v$  (volts) sobre o elemento *versus* o tempo (ms) e a corrente que está entrando pelo terminal positivo é 2 mA, calcule a potência entregue ao elemento em 1 ms e em 4 ms.
- 1.9 Se a função representada no gráfico do Prob. 1.6 é uma tensão  $v$  (volts) sobre o elemento *versus* o tempo (ms) e a corrente que está entrando pelo terminal positivo é

$$i = 10^{-6} \frac{dv}{dt}$$

( $i$  em ampères,  $v$  em volts,  $t$  em segundos), calcule a potência entregue em 1 ms e em 7 ms.

- 1.10 Calcule a potência entregue a um elemento em  $t = 2$  ms se a carga que entra pelo terminal positivo é

$$q = 12 \cos 125 \pi t \text{ mC}$$

e a tensão é

$$v = 4 \text{ sen } 125 \pi t \text{ V.}$$

- 1.11 Calcule a energia entregue ao elemento do Prob. 1.10 entre 0 e 8 ms.
- 1.12 A potência entregue a um elemento é  $p = 24e^{-8t}$  mW e a carga que entra pelo terminal positivo é  $q = 2 - 2e^{-4t}$  mC. Calcule (a) a tensão sobre o elemento e (b) a energia entregue ao elemento entre 0 e 0,25 s.
- 1.13 A potência entregue a um elemento é  $p = 12 \text{ sen } 4t$  W e a tensão  $v = 4 \text{ sen } 2t$  V. Calcule a corrente que entra pelo terminal positivo e a carga entregue ao elemento entre 0 e  $\pi/4$  s.
- 1.14 A potência entregue a um elemento é  $p = 16e^{-10t}$  W, a corrente  $i$  (em ampères) é positiva e a tensão é  $v = 4i$ . Calcule a tensão e a carga total entregue ao elemento para  $t > 0$ .
- 1.15 A corrente que entra pelo terminal positivo de um elemento é  $i = -4e^{-2t}$  A. Calcule a potência entregue ao elemento em função do tempo e a energia entregue ao elemento para  $t > 0$ , se a tensão é (a)  $v = 2i$ , (b)  $v = 4 \, di/dt$ , e (c)  $v = 2 \int_0^t i \, dt + 4$  (a tensão é em volts se a corrente for em ampères).
- 1.16 Se a corrente que entra no terminal positivo de um elemento é

$$i = 4 \text{ sen } 2t \text{ A, } t > 0 \\ = 0, t < 0$$

Calcule a potência entregue ao elemento para um  $t > 0$  e a carga entregue ao elemento entre 0 e  $\pi/4$  s, se (a)  $v = 2i$ , (b)  $v = 2 \, di/dt$  e (c)  $v = 2 \int_0^t i \, dt - 4$  ( $v$  é dado em volts se  $i$  for em ampères)

- 1.17 Se a corrente que entra pelo terminal positivo de um elemento é  $i = -4e^{-2t}$  A e a tensão é  $v = 8i$  V, calcule a energia entregue ao elemento entre 0 e 1 s.
- 1.18 Se a tensão sobre um elemento é  $v = 6e^{-3t}$  V e a corrente é  $i = 2dv/dt$  A, calcule a potência entregue no tempo  $t$  e a carga entregue entre 0 e 4 s.
- 1.19 Se uma corrente  $i = 0,4$  A está entrando pelo terminal positivo de uma bateria cuja tensão é  $v = 12$  V, então a bateria está em processo de carga (está absorvendo ao invés de fornecer potência). Calcule (a) a energia fornecida à bateria e (b) a carga total entregue à bateria em 2 h (horas). Note a consistência das unidades 1 V = 1 J/C.
- 1.20 Calcule a corrente necessária para que, no Prob. 1.19, a mesma energia entregue no item (b) ocorra num intervalo de 30 min.
- 1.21 Suponha que a tensão no Prob. 1.19 varie linearmente de 6 a 18 V enquanto o tempo  $t$  varia de 0 a 10 min. Se  $i = 2$  A durante esse tempo, calcule (a) a energia total fornecida e (b) a carga total entregue à bateria.

## 1.22 Uma corrente alternada

$$i = I \text{ sen } kt \text{ A, } t > 0 \\ = 0, t < 0$$

é fornecida a um elemento cuja tensão é  $v = ai$ ,  $a > 0$ .

- (a) Calcule a energia entregue ao elemento entre 0 e  $T$  segundos.  
(b) Calcule o valor da corrente contínua  $i = b > 0$ , que entrega a mesma energia que a corrente alternada de (a) em  $T = \pi/k$  segundos.

- 1.23 Se a corrente que entra pelo terminal positivo de um elemento é

$$i = a \text{ sen } kt \text{ A, } t > 0 \\ = 0, t < 0$$

e a tensão é

$$v = b \int_{-\infty}^t i \, dt \text{ V}$$

onde  $a, b, k > 0$ , mostre que a energia entregue ao elemento entre  $-\infty$  e  $t > 0$  é

$$w = \frac{ba^2}{2k^2} (\cos kt - 1)^2 \text{ J}$$

e, portanto  $w \geq 0$ .

- 1.24 Considere que a corrente que entra pelo terminal positivo de um elemento seja

$$i = 2 \text{ sen } 6t \text{ A, } t > 0 \\ = 0, t < 0$$

(a) Se a tensão é  $v = 4 \, di/dt$  V mostre que a energia entregue ao elemento é não-negativa para todo tempo.

(b) Repita o item (a) para  $v = 3 \int_0^t i \, dt$  V.

- 1.25 Repita o Prob. 1.24 (a) para

$$i = 2(e^{-2t} - 1) \text{ A, } t > 0 \\ = 0, t < 0$$

- 1.26 No Prob. 1.24 (a), calcule a carga total entregue ao elemento em  $t = \pi/12$  s e a potência absorvida pelo elemento em  $t = \pi/24$  s.



André Marie Ampère  
1775-1836

---

Chamarei a primeira de "tensão elétrica" (voltagem) e a segunda de "corrente elétrica".

*André Marie Ampère*

---

## Circuitos Resistivos

A empolgante declaração do físico dinamarquês Hans Christian Oersted de que a corrente elétrica produz um efeito magnético foi apresentada à Academia Francesa de Ciências em 11 de setembro de 1820. Um membro da Academia, o professor de matemática francês André Marie Ampère, ficou profundamente impressionado e repetiu o experimento de Oersted, em uma semana, fornecendo uma explicação matemática para ele e, além disto, descobrindo que correntes elétricas em fios paralelos exercem força magnética mútua.

Ampère nasceu em Lyon, na França, e leu em criança todos os grandes trabalhos da biblioteca de seu pai. Aos 12 anos começou a freqüentar a biblioteca de Lyon e, devido ao fato de a maioria dos grandes livros de matemática ser escrita em latim, tornou-se perito nesta língua em poucas semanas. Apesar de duas fatídicas tragédias pessoais — aos 18 anos presenciou a execução de seu pai, na guilhotina, pelos revolucionários franceses e, mais tarde, sua jovem e amada esposa morreu subitamente, após 4 anos de casamento —, Ampère foi um brilhante e produtivo cientista. Formulou muitas leis da eletricidade e do magnetismo e foi o pai da eletrodinâmica. A unidade de corrente elétrica, o *ampère*, foi escolhida em sua homenagem, em 1881. ■

O elemento de circuito mais simples e mais usado é o resistor. Todo condutor elétrico exibe propriedades que são características de um resistor. Quando a corrente flui em um condutor, elétrons que constituem a corrente colidem com o conjunto de átomos no condutor. Isto, é claro, na média, impede ou *resiste* ao movimento dos elétrons. Quanto maior o número de colisões, maior a *resistência* do condutor. Consideraremos um *resistor* como sendo qualquer dispositivo que exibe somente uma resistência. Entre os materiais normalmente empregados na fabricação de resistores incluem-se as ligas metálicas e compostos carbônicos.

Neste capítulo, primeiro introduziremos a relação nos terminais de um resistor, baseado na lei de Ohm. Duas leis necessárias para sistematizar soluções das redes, conhecidas como leis de Kirchhoff, serão, então, estudadas. Com estas leis, iniciaremos nosso estudo de análise de circuitos encontrando soluções para redes resistivas em “laço único” e com um só par de nós, que tenham fontes independentes como entrada. Terminaremos o capítulo com o estudo de instrumentos de medida simples, seguido de uma discussão sobre resistores práticos.

## 2.1

### Lei de Ohm

A Georg Simon Ohm (1787-1854), um físico alemão, é creditada a formulação da relação tensão-corrente para o resistor, baseada em experimentos desenvolvidos em 1826. Em 1827 ele publicou seus resultados em um artigo intitulado “A Corrente Galvânica, Tratada Matematicamente”. Como resultado de seu trabalho, a unidade de resistência é chamada *ohm*. O irônico, entretanto, é que Henry Cavendish (1731-1810), um químico britânico, havia feito as mesmas descobertas 46 anos antes. Se ele não tivesse deixado de publicar suas descobertas, a unidade de resistência poderia ser conhecida hoje como “caven”.

A lei de Ohm estabelece que a tensão sobre um resistor é diretamente proporcional à corrente que o atravessa. A constante de proporcionalidade é o valor da resistência do resistor, em ohms. O símbolo que representa um resistor em um circuito é mostrado na Fig. 2.1.

Para a tensão e a corrente indicadas, a lei de Ohm é

$$v = Ri \quad (2.1)$$

onde  $R \geq 0$  é a resistência em ohms.

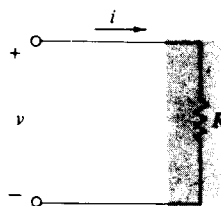


FIGURA 2.1 Símbolo para um resistor em um circuito



O símbolo usado para representar o ohm é a letra grega maiúscula *omega* ( $\Omega$ ). Deste modo, de (2.1) temos  $R = v/i$ , então

$$1 \Omega = 1 \text{ V/A}$$

Em algumas aplicações, como em circuitos eletrônicos, o ohm é uma unidade inconvenientemente pequena, e unidades como *quilo-ohms* ou simplesmente *quilohms* ( $\text{k}\Omega$ ) e *mega-ohms* ou simplesmente *megaohms* ( $\text{M}\Omega$ ) são comuns.

### EXEMPLO 2.1

Como exemplo, se  $R = 3 \Omega$  e  $v = 6 \text{ V}$  na Fig. 2.1, a corrente é

$$i = \frac{v}{R} = \frac{6 \text{ V}}{3 \Omega} = 2 \text{ A}$$

Se o valor de  $R$  é mudado para  $1 \text{ k}\Omega$ , a corrente é

$$i = \frac{6 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega} = \frac{6 \text{ V}}{10^3 \Omega} = 6 \times 10^{-3} \text{ A} = 6 \text{ mA}$$

O cálculo é simplificado, observando-se que  $1 \text{ V/k}\Omega = 1 \text{ mA}$ ,  $1 \text{ V/M}\Omega = 1 \mu\text{A}$  etc.

Como  $R$  é constante, (2.1) é a equação de uma linha reta. Por causa disto o *resistor* é dito *linear*. Um gráfico de  $v$  versus  $i$  é mostrado na Fig. 2.2, que é uma reta passando pela origem com uma inclinação de valor  $R$ . Obviamente, uma linha reta é a única solução possível para que a relação entre  $v$  e  $i$  seja constante, para todos os valores de  $i$ .

Resistores cuja resistência não se mantém constante para diferentes valores de corrente são chamados *resistores não-lineares*. Para tal resistor, a resistência é função da corrente que percorre o componente. Um exemplo simples de resistor não-linear é uma lâmpada incandescente. Uma curva característica tensão-corrente para um elemento deste tipo é mostrada na Fig. 2.3, onde vemos que o gráfico não é mais parecido com uma reta. Visto que  $R$  não é constante, a análise de circuitos que contém resistores não-lineares é bem mais difícil.

Na realidade, todos os resistores práticos são não-lineares, porque as características elétricas de todos os condutores são afetadas por fatores ambientais, tais como a temperatura. Muitos materiais, entretanto, em determinadas regiões de operação, se aproximam de um resistor linear ideal. Vamos nos concentrar nos elementos deste tipo e nos referiremos a eles simplesmente como resistores.

Um exame de (2.1) em conjunto com a Fig. 2.1 mostra que se  $i > 0$  (corrente entrando pelo terminal

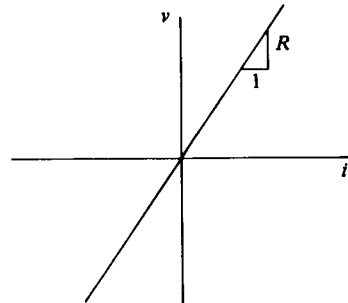


FIGURA 2.2 Característica tensão-corrente para um resistor linear

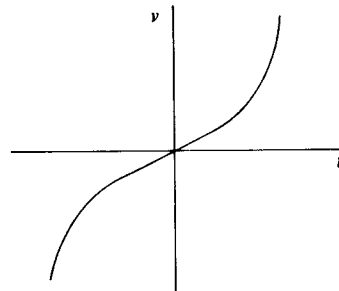


FIGURA 2.3 Característica tensão-corrente típica para um resistor não-linear

superior), então  $v > 0$ . Desta forma, a corrente entra pelo terminal de potencial mais elevado e sai pelo de potencial mais baixo. Agora, suponha que  $i < 0$  (a corrente entrando pelo terminal inferior.) Então  $v < 0$  e o terminal inferior está com um potencial mais elevado que o terminal superior. Repetindo, a corrente entra pelo terminal de potencial mais elevado. Desde que cargas são transportadas do potencial mais alto para o mais baixo, passando através do resistor, a perda de energia por uma carga  $q$  (energia =  $qv$ ) é absorvida pelo resistor na forma de calor. A velocidade pela qual a energia é dissipada é, por definição, a potência instantânea

$$p(t) = v(t)i(t) = Ri^2(t) = \frac{v^2(t)}{R} \quad (2.2)$$

Um gráfico de (2.2) é mostrado na Fig. 2.4 e revela que  $p(t)$  é uma função parabólica (e então não-linear) de  $i(t)$  ou  $v(t)$ , a qual é sempre não-negativa. (As escalas horizontais são, é claro, diferentes nos dois casos.) Desta forma, para um resistor linear, a potência instantânea é não-linear, ainda que a relação tensão-corrente seja linear.

A condição de passividade, dada em (1.7), é

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt \geq 0$$

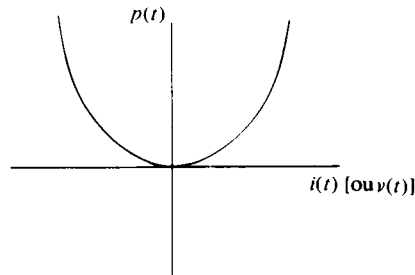


FIGURA 2.4 Gráfico de potência instantânea para um resistor

Portanto, como  $p(t)$  é sempre não-negativo, vem que a integral é não-negativa, e que o resistor é, de fato, um elemento passivo.

O estudante iniciante muitas vezes encontrará dificuldades em determinar o sinal algébrico adequado na aplicação da lei de Ohm, quando as indicações dos sinais de tensão diferirem dos da Fig. 2.1. De (2.1) a tensão é  $R$  vezes a corrente que entra pelo terminal positivo. Então, se a corrente  $i$  entra pelo terminal negativo como na Fig. 2.5, a corrente que entra pelo terminal positivo é  $-i$  e, portanto, a lei de Ohm é  $v = R(-i)$  ou

$$v = -Ri$$

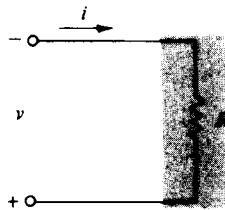


FIGURA 2.5 Resistor com uma indicação de tensão reversa

Além da sua resistência, um resistor é também caracterizado pela *potência nominal* ou *wattagem nominal*, que é a máxima potência que um resistor pode dissipar sem que se danifique por excesso de calor. Desta forma, se um resistor é para dissipar uma potência  $p$ , sua potência nominal deve ser de no mínimo  $p$ , de preferência maior. (A potência empregada na potência nominal é a *potência média*, que será discutida no Cap. 12, mas, para corrente contínua, as potências média e instantânea são as mesmas.)

Outra grandeza importante muito usada na análise de circuitos é conhecida como *condutância*, definida por

$$G = \frac{1}{R} \quad (2.3)$$

A unidade no SI para a condutância é o *siemens*, simbolizada por *S*, em homenagem aos irmãos Werner e William Siemens, dois notáveis engenheiros germânicos do final do século XIX. Então,  $1 \text{ S} = 1 \text{ A/V}$ . (Outra unidade de condutância largamente usada nos Estados Unidos é o *mho*, que é ohm escrito ao contrário. O símbolo para mho é o ômega invertido ( $\Uparrow$ ).) Combinando (2.1) – (2.3), vemos que expressões alternativas para a lei de Ohm e para a potência instantânea são

$$i = Gv \quad (2.4)$$

e

$$p(t) = \frac{i^2(t)}{G} = Gv^2(t) \quad (2.5)$$

Concluindo, o conceito de resistência pode ser usado para definir dois termos muito comuns na teoria de circuitos, *curto circuito* e *circuito aberto*. Um curto circuito é um condutor ideal entre dois pontos, e pode ser visto como uma resistência de zero ohm. Ele pode transportar qualquer quantidade de corrente, dependendo somente do restante do circuito, mas a tensão sobre ele é zero. Analogamente, um circuito aberto é uma interrupção do circuito pela qual nenhuma corrente pode circular. Portanto, ele pode ser considerado como uma resistência de valor infinito e pode ter uma tensão qualquer, dependendo novamente do restante do circuito.

## EXEMPLO 2.2

Como um exemplo, vamos calcular a corrente  $i$  e a potência absorvida pelo resistor de  $1 \text{ k}\Omega$  da Fig. 2.6. De (2.3) e (2.4),  $G = \frac{1}{1000} = 10^{-3} \text{ S}$  e  $i = 10^{-3} \times 12 \text{ A} = 12 \text{ mA}$ . De (2.5) vem que  $p(t) = 10^{-3} \times 12^2 \text{ W} = 144 \text{ mW}$ , que é a potência nominal mínima para o resistor.

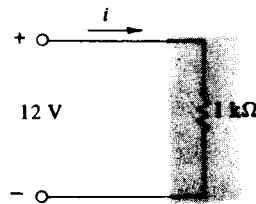


FIGURA 2.6 Exemplo de tensão-corrente

A corrente neste exemplo é uma corrente contínua, visto que seu valor não se altera no tempo. Suponhamos, agora, que substituímos a fonte de  $12 \text{ V}$  por uma tensão variável no tempo  $v = 10 \cos t \text{ V}$  e repetamos o procedimento acima. A corrente é

$$i = \frac{10 \cos t \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega} = 10 \cos t \text{ mA}$$

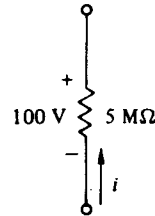
e a potência instantânea é

$$p = 0,1 \cos^2 t \text{ W}$$

que é sempre não-negativa. A corrente, neste caso, é uma corrente alternada.

## EXERCÍCIOS

- 2.1.1 A tensão sobre um resistor de  $10\text{ k}\Omega$  é  $50\text{ V}$ . Calcule (a) a condutância, (b) a corrente e (c) a potência mínima do resistor.  
*Resposta:* (a)  $0,1\text{ mS}$ ; (b)  $5\text{ mA}$ ; (c)  $0,25\text{ W}$
- 2.1.2 A potência instantânea absorvida por um resistor é  $4\text{ sen}^2 377t\text{ W}$ . Se a corrente é  $40\text{ sen } 377t\text{ mA}$ , calcule  $v$  e  $R$ .  
*Resposta:*  $100\text{ sen } 377t\text{ V}$ ,  $2,5\text{ k}\Omega$
- 2.1.3 Calcule  $i$  e a potência entregue ao resistor.  
*Resposta:*  $-20\text{ }\mu\text{A}$ ,  $2\text{ mW}$



EXERCÍCIO 2.1.3

## 2.2

### Leis de Kirchhoff

Até aqui consideramos a lei de Ohm e como ela pode ser empregada para encontrar a corrente, a tensão e a potência associadas com um resistor. Entretanto, a lei do Ohm não pode ser empregada sozinha para analisar mesmo um circuito simples. Além dessa lei, temos duas leis estabelecidas primeiramente pelo físico germânico Gustav Kirchhoff (1824-1887), em 1847. As duas leis são formalmente conhecidas como lei de Kirchhoff das correntes (LKC) e lei de Kirchhoff das tensões (LKT). Estas leis, em conjunto com as características dos vários elementos dos circuitos, permitem sistematizar métodos de solução para qualquer rede elétrica. Não tentaremos provar as leis de Kirchhoff, pois os conceitos necessários para prová-las são desenvolvidos na teoria de campos eletromagnéticos.

Um circuito consiste em dois ou mais elementos de circuitos conectados através de condutores ideais. Condutores ideais são fios de resistência nula, nos quais a corrente pode fluir livremente sem acumular cargas ou energia. Neste caso, a energia pode ser considerada inerente ou estar concentrada, inteiramente dentro de cada elemento do circuito, e então, a rede é chamada um *circuito de parâmetros concentrados*.

Um ponto de conexão de dois ou mais elementos de circuitos é denominado *nó*. Um exemplo de circuito contendo três nós é o mostrado na Fig. 2.7 (a). O nó 1 consiste na conexão completa da parte superior do circuito. O iniciante pode facilmente confundir os pontos  $a$  e  $b$  como nós. Deve-se notar, entretanto, que  $a$  e  $b$  estão conectados por um condutor perfeito e podem ser eletricamente considerados como o mesmo ponto. Isto é imediatamente demonstrado pelo redesenho do circuito na forma da Fig. 2.7 (b), onde no nó 1 todas as conexões são mostradas como um único ponto. Comentários similares são aplicáveis ao nó 2. O nó 3 é necessário para a interconexão de uma fonte independente de tensão e um resistor. Com estes conceitos, estamos agora prontos para apresentar as fundamentais leis de Kirchhoff.

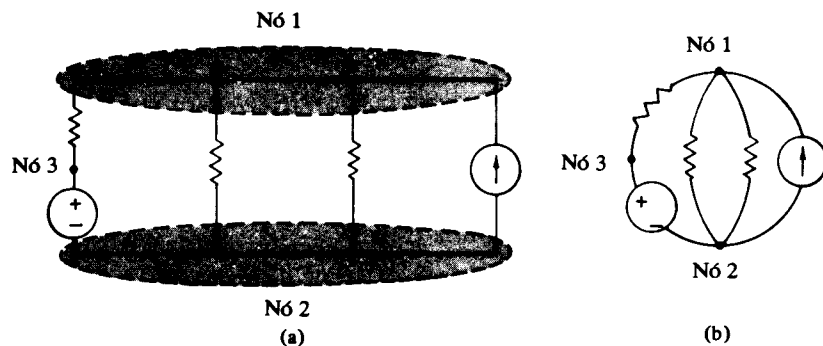


FIGURA 2.7 (a) Circuito com três nós; (b) circuito com três nós redesenhados

A lei de Kirchoff das correntes (LKC) estabelece que:

**A soma algébrica das correntes que entram em um nó é igual a zero.**

Por exemplo, as correntes que entram no nó da Fig. 2.8 são  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_4$  (visto que  $i_3$  saindo é  $-i_3$  entrando). Portanto, a LKC para este caso é

$$i_1 + i_2 + (-i_3) + i_4 = 0$$

Apenas como argumentação, suponhamos que a soma não seja zero. Neste caso, teríamos

$$i_1 + i_2 - i_3 + i_4 = \Psi \neq 0$$

onde  $\Psi$  tem a unidade de C/s e então será a velocidade pela qual as cargas são acumuladas no nó. Entretanto, um nó é constituído de condutores perfeitos, logo não pode acumular cargas. Além disso, um princípio básico da física estabelece que cargas não podem ser criadas nem destruídas (princípio da conservação da energia). Portanto, nossa consideração não é válida, e  $\Psi$  é igual a zero, demonstrando a coerência da LKC.

Suponha que em nosso exemplo tenhamos multiplicado ambos os lados por  $-1$ , obtendo

$$(-i_1) + (-i_2) + (i_3) + (-i_4) = 0$$

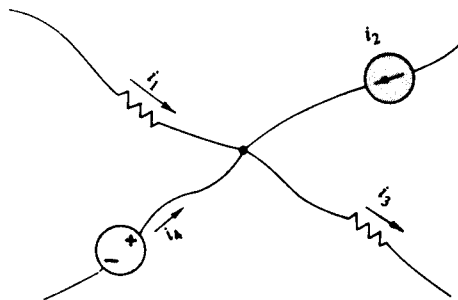


FIGURA 2.8 Fluxo de correntes em um nó

Da Fig. 2.8 vemos que o lado esquerdo da equação é simplesmente a soma das correntes que saem do nó. Isto demonstra um enunciado equivalente para a LKC:

**A soma algébrica das correntes que saem de um nó é zero.**

Podemos agora reescrever a equação acima na forma

$$i_1 + i_2 + i_4 = i_3$$

onde  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_4$  estão entrando no nó e  $i_3$  está saindo. Essa forma da equação ilustra outro enunciado para a LKC, como

**A soma das correntes que entram em um nó qualquer é igual à soma das correntes que saem deste nó.**

Em geral, a expressão matemática para LKC é

$$\sum_{n=1}^N i_n = 0 \quad (2.6)$$

onde  $i_n$  é a  $n$ ésima corrente que entra (ou sai) do nó e  $N$  é o número de correntes no nó.

### EXEMPLO 2.3

Como um exemplo da LKC vamos calcular a corrente  $i$  na Fig. 2.9. Somando as correntes que entram no nó, temos

$$5 + i - (-3) - 2 = 0$$

ou

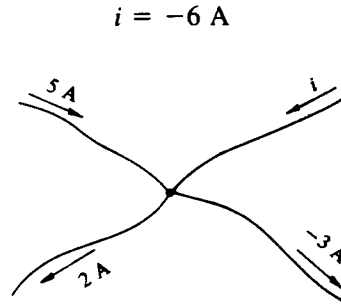


FIGURA 2.9 Exemplo da LKC

Podemos notar que  $-6 \text{ A}$  entrando no nó é equivalente a  $6 \text{ A}$  saindo do nó. Portanto, não é necessário adivinhar o sentido da corrente antes de resolver o problema. Ainda assim, chegaremos ao resultado correto.

Podemos encontrar a corrente  $i$  mais diretamente, considerando-a entrando no nó, e então equacionando-a com as outras três correntes saindo do nó. O resultado é

$$i = -3 + 2 + (-5) = -6 \text{ A}$$

que está de acordo com a resposta anterior.

Agora, abordaremos a lei de Kirchhoff das tensões (LKT), a qual estabelece que

**A soma algébrica das tensões ao longo de qualquer percurso fechado é zero.**

Como ilustração, a aplicação deste enunciado no percurso fechado  $abcd$  da Fig. 2.10 dá

$$-v_1 + v_2 - v_3 = 0 \quad (2.7)$$

onde o sinal algébrico de cada tensão foi tomado como positivo quando vai de  $+$  para  $-$  (do potencial mais elevado para o mais baixo) e negativo de  $-$  para  $+$  (do potencial mais baixo para o potencial mais elevado) ao cruzar o componente. Usando esta convenção, estamos igualando as somas das quedas de tensão ao longo do percurso fechado a zero. Podemos também usar a convenção oposta, neste caso, a soma das elevações de tensão será zero.

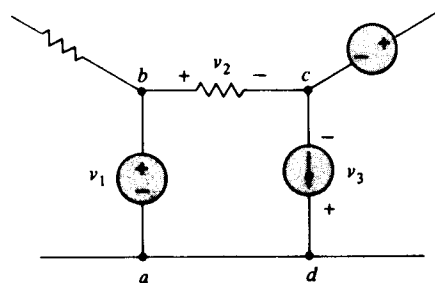


FIGURA 2.10 Tensões em um percurso fechado

Como no caso da LKC, também não iremos nos deter em demonstrar a LKT. Entretanto, para ilustrar a coerência de 2.7, vamos considerar que a soma dos termos da direita não é zero. Ou seja,

$$-v_1 + v_2 - v_3 = \Phi \neq 0$$

O termo da esquerda desta equação é, por definição, o trabalho necessário para mover uma unidade de carga através do percurso  $adcba$ . Um circuito de parâmetros concentrados é um sistema *conservativo*, o que significa que o trabalho necessário para mover uma carga através de qualquer percurso fechado é zero (isto é provado pela teoria eletromagnética). Então, nossa suposição não é correta e  $\Phi$  é de fato igual a zero.

Devemos assinalar, entretanto, que todos os sistemas elétricos são não-conservativos. De fato, a geração de potência elétrica, as ondas de rádio e a luz do sol, para citar apenas uns poucos exemplos, são conseqüências de sistemas não-conservativos.

A aplicação da LKT é independente do sentido no qual se faz o percurso. Considere, por exemplo, o percurso *adcba* na Fig. 2.10. Somando as tensões, encontramos

$$v_3 - v_2 + v_1 = 0$$

que é equivalente a (2.7).

Em geral, a representação matemática para a LKT é

$$\sum_{n=1}^N v_n = 0 \quad (2.8)$$

onde  $v_n$  é a  $n$ ésima tensão no laço de  $N$  tensões. O sinal de cada tensão é escolhido como descrito anteriormente para (2.7).

## EXEMPLO 2.4

Como um exemplo do uso da LKT, vamos calcular  $v$  na Fig. 2.11. Percorrendo o circuito no sentido horário, temos

$$-15 + v + 10 + 2 = 0$$

ou  $v = 3$  V. Suponha, agora, que percorramos o circuito em sentido contrário. Neste caso,

$$15 - 2 - 10 - v = 0$$

ou  $v = 3$  V, ou seja, o mesmo resultado encontrado ao percorrer o circuito no sentido horário.

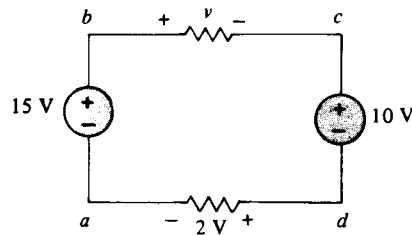


FIGURA 2.11 Circuito para ilustrar a LKT

Ainda para a Fig. 2.11, outra versão da LKT é

$$v + 10 + 2 = 15$$

onde a soma das tensões com uma polaridade é igual à soma das tensões com polaridade oposta. De outra forma, as elevações de tensão são iguais às quedas de tensão, um outro enunciado da LKT.

Finalmente, podemos resolver para  $v$  diretamente, já que ela é  $v_{bc}$  e, logo, é igual à soma das tensões de  $b$  e  $c$ , através dos outros três elementos. Ou seja, a tensão entre dois terminais é a mesma, independentemente do percurso entre eles. Então, na Fig. 2.11 temos

$$v = 15 - 2 - 10 = 3 \text{ V}$$

Em cada um dos exemplos anteriores, a LKT foi aplicada através de percursos condutores, tais como *abcda*. A lei, entretanto, é válida para *qualquer* percurso fechado. Considere, por exemplo, o percurso *abda* da Fig. 2.11. Podemos notar que o movimento direto de  $a$  a  $c$  não é ao longo de um percurso condutor. A aplicação da LKT a este percurso fechado resulta em  $v_{ac} + 10 + 2 = 0$ , onde  $v_{ac}$  é o potencial do ponto  $a$  em relação ao ponto  $c$ . Então,  $v_{ac} = -12$  V. Podemos também escolher o percurso *abca* para o qual

$$-15 + v - v_{ac} = -15 + 3 - v_{ac} = 0$$

Portanto,  $v_{ac} = -12$  V, que demonstra o uso de percursos fechados diferentes na obtenção dos mesmos resultados.

## EXEMPLO 2.5

Como outro exemplo de aplicação da LKC e da LKT, calcule  $i_x$  e  $v_x$  na rede da Fig. 2.12. A soma das correntes que entram pelo nó  $a$  é  $-4 + 1 + i_1 = 0$ , ou  $i_1 = 3$  A. No nó  $b$ ,  $-i_1 + 2 - i_2 = 0$ , ou  $i_2 = -1$  A. No nó  $c$ ,  $i_2 + i_3 - 3 = 0$ , ou  $i_3 = 4$  A. Portanto, no nó  $d$ ,  $-i_x - 1 - i_3 = 0$ , ou  $i_x = -5$  A. A seguir, o uso da LKT sobre o percurso  $abcda$  dá  $-10 + v_2 - v_x = 0$ . Pela lei de Ohm,  $v_2 = 5i_2 = -5$  V. Portanto,  $v_x = -15$  V.

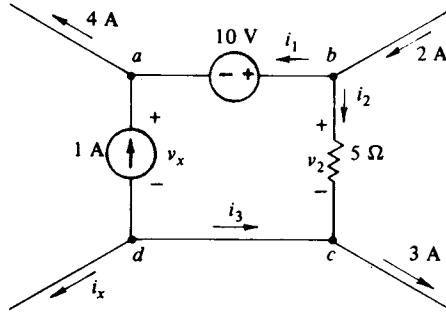


FIGURA 2.12 Rede para o exemplo de aplicação da LKT e da LKC

Antes de encerrarmos nossa discussão das leis de Kirchhoff, consideremos a rede da Fig. 2.13, na qual são mostrados vários elementos contidos em uma superfície fechada  $S$ . Lembramos que a corrente que entra em cada elemento é igual à que o deixa, logo, nenhum elemento armazena energia. Portanto, a carga total armazenada dentro da superfície é zero, sendo necessário que

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

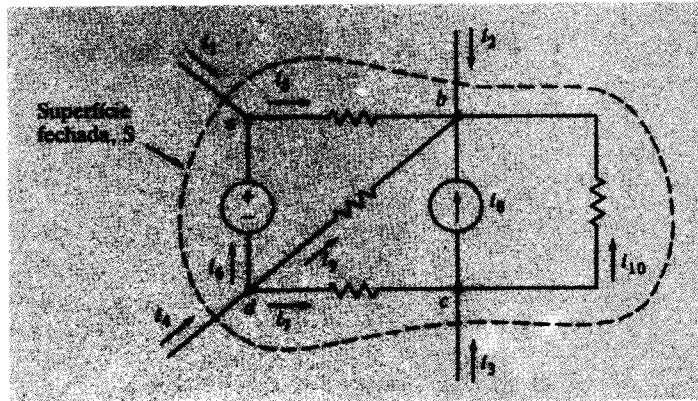


FIGURA 2.13 Rede para a LKC generalizada

Este resultado ilustra uma generalização da LKC, que estabelece

**A soma algébrica das correntes que entram em uma superfície fechada é zero.<sup>1</sup>**

Para ilustrar a coerência da LKC generalizada, vamos escrever as equações da LKC para os nós,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , e  $d$  na Fig. 2.13. Os resultados são

$$\begin{aligned} i_1 &= i_5 - i_6 \\ i_2 &= -i_5 - i_8 - i_9 - i_{10} \\ i_3 &= -i_7 + i_8 + i_{10} \\ i_4 &= i_6 + i_7 + i_9 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>A superfície não pode passar através de um elemento, que é considerado como concentrado num ponto, em circuitos de parâmetros concentrados.



Somando estas equações, fica

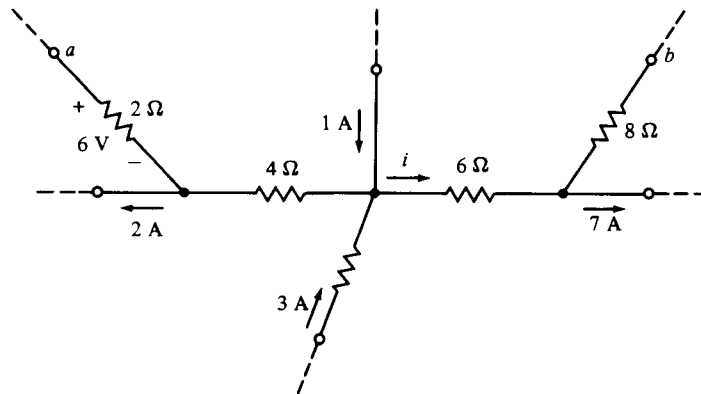
$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

como havíamos previsto.

Da LKT generalizada, vemos imediatamente na Fig. 2.12, para uma superfície envolvendo os pontos  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , e  $d$ , que  $-i_x - 4 + 2 - 3 = 0$ , ou  $i_x = -5$  A.

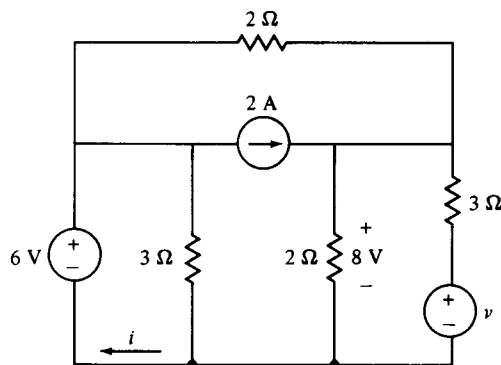
## EXERCÍCIOS

- 2.2.1** Calcule  $i$  e  $v_{ab}$ .  
Resposta: 5 A, 24 V



EXERCÍCIO 2.2.1

- 2.2.2** Calcule  $v$  e  $i$ .  
Resposta: 17 V, 3 A



EXERCÍCIO 2.2.2

## 2.3

### Resistência em Série e Divisão de Tensão

Agora que as leis de Ohm e Kirchhoff foram apresentadas, estamos preparados para analisar circuitos resistivos. Começaremos com um *circuito simples*, o qual definiremos como aquele que pode ser completamente descrito por uma única equação. Um tipo, que iremos considerar nesta seção, é um circuito constituído de um só percurso fechado, ou laço, de elementos. Pela LKC, cada elemento tem uma única corrente, digamos  $i$ . Então, a aplicação da lei de Ohm e da LKT neste laço dá uma única equação em  $i$  que descreverá completamente o circuito.

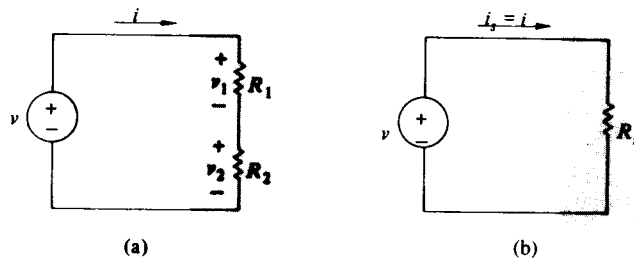


FIGURA 2.14 (a) Circuito de laço único, (b) circuito equivalente

Elementos são ditos ligados em *série*, quando todos são percorridos pela mesma corrente. As redes desta seção são constituídas somente de elementos conectados em série. Um circuito importante deste tipo, consistindo em dois resistores e uma fonte independente de tensão, possibilita um excelente ponto de partida. Inicialmente vamos analisar este caso especial e então desenvolveremos casos mais genéricos.

Um circuito de laço único, composto de dois resistores e uma fonte independente de tensão, é mostrado na Fig. 2.14(a). O primeiro passo no procedimento de análise será o de atribuir correntes e tensões em todos os elementos da rede. Neste circuito, é óbvio, pela LKC, que todos os elementos são percorridos pela mesma corrente. Podemos escolher *arbitrariamente* a direção mostrada (sentido horário) para a corrente, denominada  $i$ . (O iniciante geralmente tenta adivinhar o sentido real da corrente ao fazer suas escolhas. A indicação correta não é necessária, como veremos, e normalmente não é possível, mesmo para os mais experientes.) O próximo passo é atribuir tensões para  $R_1$  e  $R_2$ , como  $v_1$  e  $v_2$ , respectivamente. Estas atribuições são também arbitrárias, mas nesta figura foram escolhidas de modo a satisfazer a lei de Ohm para sinais algébricos positivos.

O segundo passo nesta análise é a aplicação da LKT, que fornece

$$v = v_1 + v_2$$

onde, pela lei de Ohm

$$v_1 = R_1 i$$

$$v_2 = R_2 i \quad (2.9)$$

Combinando estas equações, encontramos

$$v = R_1 i + R_2 i$$

Resolvendo para  $i$  fica

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2} \quad (2.10)$$

Agora, vamos considerar um circuito simples, que consiste (2.10) de uma fonte de tensão  $v$  conectado a uma resistência  $R_s$ , como mostrado na Fig. 2.14(b). Se  $R_s$  for selecionado de modo tal que

$$i_s = \frac{v}{R_s} = i \quad (2.11)$$

então a rede é chamada de um *circuito equivalente* da Fig. 2.14(a) porque uma corrente idêntica (resposta) é produzida para uma tensão  $v$  (excitação). Em geral, dois circuitos são ditos equivalentes quando exibem idênticas relações tensão-corrente em seus terminais. Em outras palavras, a fonte nos terminais enxerga a mesma resistência em cada circuito.

Comparando (2.10) e (2.11), vemos que

$$R_s = R_1 + R_2 \quad (2.12)$$

Interpretando (2.12) vemos que a combinação série de  $R_1$  e  $R_2$  é substituída pelo resistor  $R_s$ , a mesma corrente circulará da fonte  $v$ . Portanto  $R_s$  é a *resistência equivalente* da conexão em série.

Combinando (2.9) e (2.10), vemos que

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v \quad v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v \quad (2.13)$$

O potencial  $v$  da fonte divide-se entre as resistências  $R_1$  e  $R_2$  em proporção direta ao valor de suas resistências, demonstrando o *princípio da divisão de tensão* para dois resistores em série. Por esta razão, o circuito da Fig. 2.14(a) é dito um *divisor de tensão*. Vemos em (2.13) que a maior tensão aparece sobre o maior resistor.

### EXEMPLO 2.6

Como um exemplo, se na Fig. 2.14(a),  $R_1 = 8 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$  e  $v = 12 \text{ V}$ , então, por divisão de tensão

$$v_1 = \frac{8}{8 + 4} (12) = 8 \text{ V}$$

e, portanto  $v_2 = v - v_1 = 4 \text{ V}$ . Alternativamente, por divisão de tensão,

$$v_2 = \frac{4}{8 + 4} (12) = 4 \text{ V}$$

As potências instantâneas absorvidas por  $R_1$  e  $R_2$  na Fig. 2.14(a) são

$$p_1 = \frac{v_1^2}{R_1} = \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2} v^2$$

e

$$p_2 = \frac{v_2^2}{R_2} = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} v^2$$

respectivamente. A potência total absorvida é

$$p_1 + p_2 = \frac{v^2}{R_1 + R_2} = v \left( \frac{v}{R_1 + R_2} \right) = vi$$

A potência entregue pela fonte também é igual a  $vi$ , indicando que a potência entregue pela fonte é igual à absorvida por  $R_1$  e  $R_2$ . Este resultado é conhecido como princípio de *conservação da potência* (algumas vezes também chamado de teorema de Tellegen), uma propriedade que é freqüentemente útil na análise de circuitos.

### EXEMPLO 2.7

Como outro exemplo, suponha que  $v = 120 \text{ sen } t \text{ V}$  e  $v_1 = 48 \text{ sen } t \text{ V}$  na Fig. 2.15. Vamos então determinar  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $i$ , e a potência instantânea associada a cada elemento. Pela LKT,  $v_2 = v - v_1 = 72 \text{ sen } t \text{ V}$ , e de (2.13),

$$72 \text{ sen } t = \frac{90}{90 + R_1} 120 \text{ sen } t$$

donde  $R_1 = 60 \Omega$ . Logo,  $R_2 = R_1 + R_2 = 150 \Omega$  e, de (2.10),  $i = (120 \text{ sen } t)/150 = 0,8 \text{ sen } t \text{ A}$ . A potência instantânea entregue a  $R_1$  e  $R_2$  é  $p_1 = R_1 i^2 = 38,4 \text{ sen}^2 t \text{ W}$  e  $p_2 = R_2 i^2 = 57,6 \text{ sen}^2 t \text{ W}$ . Logo, a potência entregue pela fonte é  $96 \text{ sen}^2 t \text{ W}$ . A potência absorvida por  $R_2$  é  $R_2 i^2 = 96 \text{ sen}^2 t \text{ W}$ , que é, naturalmente, a mesma potência entregue pela fonte.

Vamos, agora, estender nossa análise para incluir a conexão em série de  $N$  resistores e uma fonte

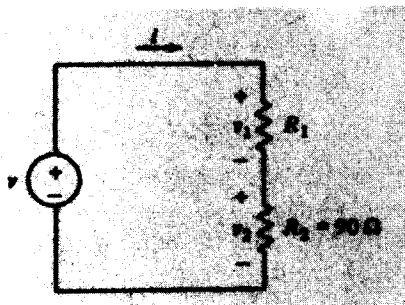


FIGURA 2.15 Circuito de laço único

independente de tensão, como mostrado na Fig. 2.16. Isto é um divisor de tensão com  $N$  tensões. Pela LKT, teremos

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_N$$

na qual

$$v_1 = R_1 i$$

$$v_2 = R_2 i$$

.

.

.

$$v_N = R_N i$$

(2.14)

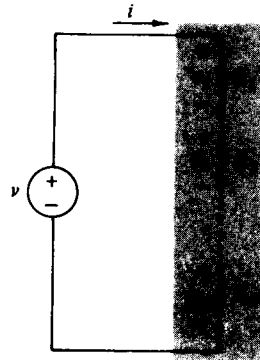


FIGURA 2.16 Laço único com  $N$  resistores em série

Portanto,

$$v = R_1 i + R_2 i + \dots + R_N i$$

Resolvendo esta equação para  $i$ ,

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} \quad (2.15)$$

Vamos, agora, selecionar  $R_s$  no circuito da Fig. 2.14(b), tal que (2.11) seja satisfeita. A equivalência entre (2.11) e (2.15) requer que

$$R_s = R_1 + R_2 + \dots + R_N = \sum_{n=1}^N R_n \quad (2.16)$$

Portanto, a resistência equivalente de  $N$  resistores associados em série é simplesmente a soma dos valores individuais de cada resistor.

Substituindo (2.15) e (2.16) em (2.14), encontramos

$$v_1 = \frac{R_1}{R_s} v$$

$$v_2 = \frac{R_2}{R_s} v$$

.

.

.

$$v_N = \frac{R_N}{R_s} v$$

(2.17)

que são as equações que descrevem a propriedade de divisão de tensão para  $N$  resistores em série. Vemos, novamente, que a divisão de tensão ocorre na proporção direta dos valores dos resistores.

A potência instantânea entregue em uma associação série, de (2.2) e (2.17) é

$$\begin{aligned} p &= \frac{v_1^2}{R_1} + \frac{v_2^2}{R_2} + \dots + \frac{v_N^2}{R_N} \\ &= \frac{R_1}{R_s^2} v^2 + \frac{R_2}{R_s^2} v^2 + \dots + \frac{R_N}{R_s^2} v^2 \\ &= \frac{v^2}{R_s} = vi \end{aligned}$$

Esta potência é igual à entregue pela fonte, verificando a conservação de potência para uma conexão de  $N$  resistores em série.

### EXEMPLO 2.8

Na Fig. 2.16, calculemos  $v_1$  e  $i$ , se  $N = 10$ ,  $R_1 = 60 \Omega$ , os outros nove resistores são de  $10 \Omega$  cada um e  $v = 75 \text{ V}$ . A resistência equivalente é  $R_s = 60 + 9(10) = 150 \Omega$  e, por divisão de tensão

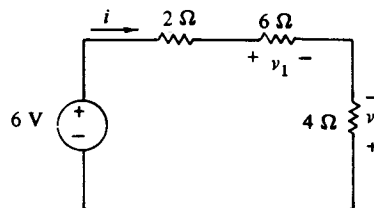
$$v_1 = \frac{60}{150} (75) = 30 \text{ V}$$

Aplicando a lei de Ohm, temos

$$i = \frac{v}{R_s} = \frac{75}{150} = 0,5 \text{ A}$$

## EXERCÍCIOS

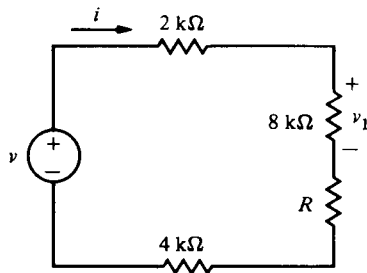
- 2.3.1.** Calcule (a) a resistência equivalente vista pela fonte, (b) a corrente  $i$ , (c) a potência entregue pela fonte, (d)  $v_1$ , (e)  $v_2$  e (f) o valor nominal mínimo (*wattagem*) necessário para o resistor de  $4 \Omega$ .  
Resposta: (a)  $12 \Omega$ ; (b)  $0,5 \text{ A}$ ; (c)  $3 \text{ W}$ ; (d)  $3 \text{ V}$ , (e)  $-2 \text{ V}$ ; (f)  $1 \text{ W}$ .



EXERCÍCIO 2.3.1

- 2.3.2** Na Fig. 2.14(a),  $v = 16e^{-t} \text{ V}$ ,  $v_2 = 4e^{-t} \text{ V}$  e  $R_1 = 24 \Omega$ . Calcule (a)  $R_2$ , (b) a potência instantânea entregue a  $R_2$  e (c) a corrente  $i$ .  
Resposta: (a)  $8 \Omega$ , (b)  $2e^{-t} \text{ W}$ ; (c)  $0,5e^{-t} \text{ A}$ .
- 2.3.3** Uma carga resistiva<sup>2</sup> requer  $4 \text{ V}$  e dissipa  $2 \text{ W}$ . Uma tensão de  $12 \text{ V}$  está disponível, através de uma bateria, para alimentar a carga. Em relação à Fig. 2.14(a), se  $R_2$  representa a carga e  $v$  a bateria de  $12 \text{ V}$  calcule (a) a corrente  $i$ , (b) o valor necessário da resistência  $R_1$  e (c) a mínima *wattagem* de  $R_1$ .  
Resposta: (a)  $0,5 \text{ A}$ ; (b)  $16 \Omega$ ; (c)  $4 \text{ W}$ .
- 2.3.4** No divisor da tensão mostrado, a potência entregue pela fonte é de  $8 \text{ mW}$  e  $v_1 = v/4$ . Encontre  $R$ ,  $v$ ,  $v_1$  e  $i$ .  
Resposta:  $18 \text{ k}\Omega$ ,  $16 \text{ V}$ ,  $4 \text{ V}$ ,  $0,5 \text{ mA}$

<sup>2</sup>Uma carga é elemento ou um conjunto de elementos conectados entre os terminais de saída. Neste caso, a carga é um resistor.



EXERCÍCIO 2.3.4

## 2.4

### Resistências em Paralelo e Divisão de Corrente

Outro importante circuito simples é o circuito com um só par de nós. Na análise destas redes, primeiro examinaremos um caso especial e então desenvolveremos o caso mais genérico, como fizemos para o caso de um laço único.

Elementos serão conectados em *paralelo* quando a mesma tensão é comum a todos eles. O circuito com um só par de nós mostrado na Fig. 2.17(a) é a conexão em paralelo de dois resistores e uma fonte independente de corrente, pois pela LKT vemos que todos os três resistores têm a mesma tensão  $v$ .

Aplicando a LKC no nó superior, temos

$$i = i_1 + i_2$$

onde, pela lei de Ohm,

$$i_1 = G_1 v$$

$$i_2 = G_2 v$$

(2.18)

Combinando estas equações, temos

$$i = G_1 v + G_2 v$$

e resolvendo para  $v$ , encontramos

$$v = \frac{i}{G_1 + G_2} \quad (2.19)$$

No circuito da Fig. 2.17(b), se  $G_p$  é encolhida de modo que

$$v_p = \frac{i}{G_p} = v \quad (2.20)$$

então a rede é um circuito equivalente ao da Fig. 2.17(a). Comparando (2.19) e (2.20) vemos que

$$G_p = G_1 + G_2 \quad (2.21)$$



FIGURA 2.17 (a) Circuito com um só par de nós; (b) circuito equivalente

É claro que  $G_p$  é a condutância equivalente das duas condutâncias em paralelo. Em termos de resistências, (2.21) torna-se

$$G_p = \frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

ou

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.22)$$

Portanto, a resistência equivalente de dois resistores conectados em paralelo é igual ao produto de suas resistências dividido pela sua soma. É interessante notar que  $G_p$  é maior que  $G_1$  ou  $G_2$ ; portanto  $R_p$  é menor que  $R_1$  ou  $R_2$ . Deste resultado, vemos que a conexão de resistores em paralelo reduz a resistência total. No caso particular em que  $R_2 = R_1$ , vemos em (2.22) que  $R_p = R_1/2$ .

Substituindo (2.19) em (2.18), obtemos

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{G_1}{G_1 + G_2} i \\ i_2 &= \frac{G_2}{G_1 + G_2} i \end{aligned} \quad (2.23)$$

A corrente  $i$  da fonte divide-se entre as condutâncias  $G_1$  e  $G_2$  na proporção direta das suas condutâncias, demonstrando o *princípio da divisão de correntes*. O circuito, sem dúvida, é um *divisor de corrente*. É prática corrente expressar os valores dos resistores em um diagrama em ohms (resistência) e não em siemens (condutância). Em termos dos valores dos resistores (2.23) fica

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \\ i_2 &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} i \end{aligned} \quad (2.24)$$

Portanto, a corrente divide-se em uma proporção inversa ao valor dos resistores. Vemos que a maior corrente flui através do resistor de menor valor. A potência absorvida na associação em paralelo é

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 \\ &= \frac{R_2^2 i^2}{(R_1 + R_2)^2} R_1 + \frac{R_1^2 i^2}{(R_1 + R_2)^2} R_2 \\ &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i^2 = vi \end{aligned}$$

que é igual à fornecida à rede pela fonte de corrente.

### EXEMPLO 2.9

Suponha na Fig. 2.17(a) que  $R_1 = 3 \Omega$ ,  $R_2 = 6 \Omega$  e  $i = 3 \text{ A}$ . Então, de (2.22),  $R_p = (3)(6)/(3 + 6) = 2 \Omega$ . De (2.24),  $i_1 = \frac{6}{9}(3) = 2 \text{ A}$ , e  $i_2 = \frac{3}{9}(3) = 1 \text{ A}$ . A tensão  $v = R_1 i_1 = R_2 i_2 = (3)(2) = 6 \text{ V}$ . A corrente da fonte flui através de uma resistência equivalente de valor  $R_p$ . Logo, a tensão é também dada por  $v = R_p i = (2)(3) = 6 \text{ V}$ .

Vamos agora considerar o caso genérico de um divisor de corrente constituído de  $N$  condutâncias em paralelo e uma fonte independente de corrente, como mostrado na Fig. 2.18. A LKC dá

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_N$$

donde

$$\begin{aligned} i_1 &= G_1 v \\ i_2 &= G_2 v \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ i_N &= G_N v \end{aligned} \quad (2.25)$$

Portanto, teremos

$$i = G_1 v + G_2 v + \dots + G_N v$$

da qual

$$v = \frac{i}{G_1 + G_2 + \dots + G_N} \quad (2.26)$$

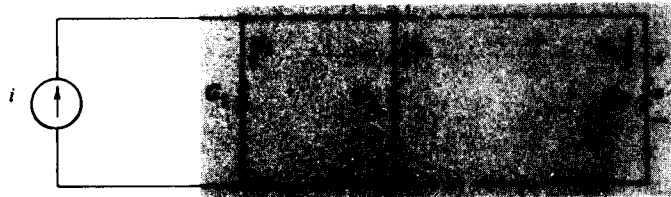


FIGURA 2.18 Circuito de um só par de nós, com  $N$  condutâncias em paralelo

Se agora seleccionarmos  $G_p$  na Fig. 2.17(b) de forma que (2.20) seja satisfeita, então (2.26) requer que

$$G_p = G_1 + G_2 + \dots + G_N = \sum_{i=1}^N G_i \quad (2.27)$$

Em termos de resistência, esta equação torna-se

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \quad (2.28)$$

Portanto, o inverso da resistência equivalente é simplesmente a soma do inverso de cada resistência. Combinando (2.25)-(2.28), encontramos

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{G_1}{G_p} i = \frac{R_p}{R_1} i \\ i_2 &= \frac{G_2}{G_p} i = \frac{R_p}{R_2} i \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ i_N &= \frac{G_N}{G_p} i = \frac{R_p}{R_N} i \end{aligned} \quad (2.29)$$

Novamente a corrente se divide na proporção inversa das resistências.



### EXEMPLO 2.10

Vimos em (2.28) que, para  $N > 2$ , uma expressão para  $R_p$  é muito mais complicada que em (2.22). Fórmulas podem ser obtidas, é claro, para  $N = 3, 4$  etc., mas é simples usar (2.28). Como um exemplo, suponha para  $N = 3$  que  $R_1 = 4 \Omega$ ,  $R_2 = 12 \Omega$  e  $R_3 = 6 \Omega$ . Então,

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \text{ S}$$

e  $R_p = 2 \Omega$ .

### EXEMPLO 2.11

Agora, vamos encontrar a resistência equivalente  $R_{eq}$  da rede da Fig. 2.19(a), visto dos terminais  $x$ - $y$ . Tais reduções são muito úteis na análise de vários tipos de circuito, como veremos na próxima seção. O processo é por meio de associações sucessivas de resistores conectados em série ou paralelo. Na Fig. 2.19(a) o estudante às vezes comete erros ao considerar que uma associação como a dos resistores de  $7 \Omega$  e  $12 \Omega$  seja feita em série. Entretanto, vemos que no nó  $a$  que a corrente no resistor de  $7 \Omega$  deve se dividir entre os resistores de  $1 \Omega$  e  $12 \Omega$ ; logo, eles não podem estar conectados em série. Os resistores de  $1 \Omega$  e de  $5 \Omega$ , entretanto, são percorridos pela mesma corrente. Portanto, eles estão em série, tendo uma resistência equivalente de  $6 \Omega$  como mostrada na Fig. 2.19(b). Agora, observamos que a mesma tensão aparece sobre os resistores de  $6 \Omega$  e de  $12 \Omega$ , indicando uma conexão paralela, tendo uma resistência equivalente de  $(6)(12)/(6 + 12) = 4 \Omega$ , como mostrado na Fig. 2.19(c). Vê-se que os resistores de  $7 \Omega$  e de  $4 \Omega$  desta rede estão em série, donde a resistência equivalente de toda a rede é de  $11 \Omega$  [Fig. 2.19(d)]. Portanto, dos terminais  $x$ - $y$ , esta rede pode ser substituída por um resistor de  $11 \Omega$ . Isto é útil na determinação, por exemplo, da potência entregue por uma fonte que esteja conectada aos terminais  $x$ - $y$ . Suponha que seja aplicada uma fonte de  $22 \text{ V}$ . Então, a corrente que irá fluir da fonte é  $i = \frac{22}{11} = 2 \text{ A}$ , que dá uma potência instantânea  $p(t) = (22)(2) = 44 \text{ W}$  entregue à rede resistiva.

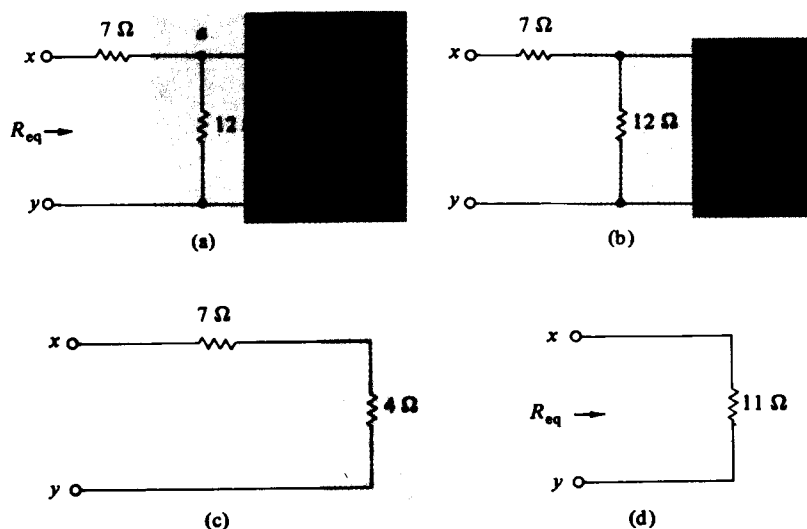
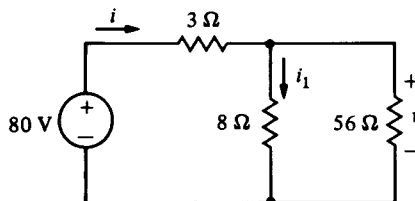


FIGURA 2.19 Passos para a determinação da resistência equivalente de uma rede

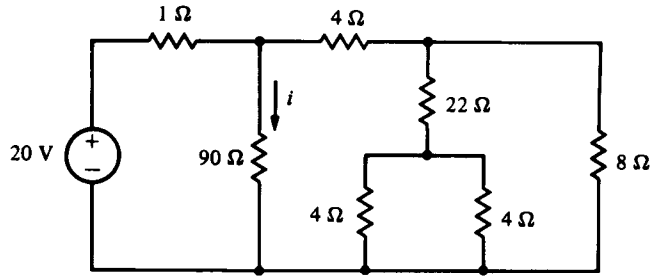
## EXERCÍCIOS

- 2.4.1 Calcule a resistência equivalente, vista pela fonte, e use este resultado para encontrar  $i$ ,  $i_1$  e  $v$ .  
Resposta:  $10 \Omega$ ,  $8 \text{ A}$ ,  $7 \text{ A}$ ,  $56 \text{ V}$



EXERCÍCIO 2.4.1

- 2.4.2** Se  $i_1 = 9$  A e  $i_2 = 6$  A na Fig. 2.17 (a) calcule a relação  $R_2/R_1$ .  
*Resposta:* 1/2
- 2.4.3** Uma carga requer 3 A e absorve 48 W. Se está disponível apenas uma fonte de 4-A, calcule o valor da resistência a ser colocada em paralelo com a carga.  
*Resposta:* 16  $\Omega$
- 2.4.4** Na Fig. 2.18, se  $N = 3$ ,  $R_1 = 9$   $\Omega$ ,  $R_2 = 72$   $\Omega$ , e  $v = 12$  sen  $t$  V e o valor da potência instantânea entregue pela fonte de corrente é  $24$  sen<sup>2</sup>  $t$  W, calcule (a)  $R_3$ , (b)  $i$  e (c)  $i_3$ .  
*Resposta:* (a) 24  $\Omega$ ; (b) 2 sen  $t$  A; (c) 0,5 sen  $t$  A
- 2.4.5** Calcule a resistência equivalente vista pela fonte e a corrente  $i$ .  
*Resposta:* 10  $\Omega$ , 0,2 A



EXERCÍCIO 2.4.5

## 2.5

### Exemplos de Análise

Nesta seção analisaremos vários circuitos para ilustrar as técnicas de análise apresentadas até aqui.

#### EXEMPLO 2.12

Como nosso primeiro exemplo, vamos encontrar os valores de  $i$ ,  $v_1$  e  $v_{ab}$  no circuito da Fig. 2.20(a). Aplicando a LKT e a lei de Ohm, obtemos

$$-30 + 30i + 20i + 20 + 50i = 0$$

que pode ser simplificada até a equação reduzida

$$-10 + 100i = 0$$

Portanto, temos  $i = 0,1$  A e  $v_1 = 30i = 3$  V. O circuito da Fig. 2.20(b) é equivalente ao da Fig. 2.20(a) sob o ponto de vista da corrente  $i$ , pois os dois circuitos são descritos pela equação reduzida. De fato, a Fig. 2.20(b) pode ser obtida diretamente da Fig. 2.20(a), visto que por todos os elementos deste último circuito passa a mesma corrente, logo estão em série. A soma do valor dos três resistores resulta na resistência equivalente de 100  $\Omega$ , e a soma algébrica das fontes de tensão dá a fonte equivalente de 10 V. Isto pode ser facilmente observado na Fig. 2.20(c), onde a fonte de 20 V foi colocada próxima da de 30 V.

Para achar  $v_{ab}$ , aplicamos a LKT na Fig. 2.20(a) para o laço com o percurso no sentido  $ba$ , o resistor de 20  $\Omega$  e a fonte de 30 V. Daí obtemos

$$-v_{ab} - 20i + 30 = 0$$

da qual  $v_{ab} = 28$  V.

#### EXEMPLO 2.13

Como segundo exemplo, vamos mostrar que o princípio da conservação de potência se verifica no circuito da Fig. 2.20(a). Visto que do exemplo 2.12 temos  $i = 0,1$  A, as potências absorvidas pelos resistores são

$$p_{20\Omega} = 20(0,1)^2 = 0,2 \text{ W}$$

$$p_{30\Omega} = 30(0,1)^2 = 0,3 \text{ W}$$

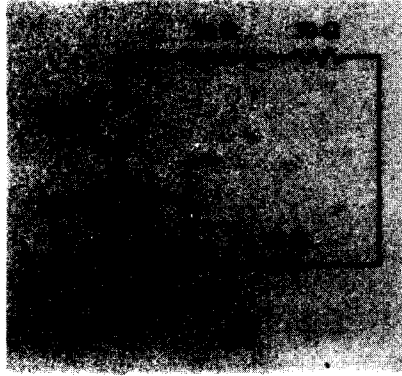
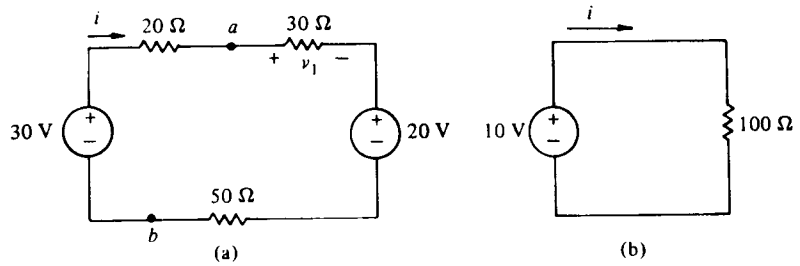


FIGURA 2.20 (a) Circuito de laço único; (b) circuito equivalente; (c) outro circuito equivalente

e

$$p_{50\Omega} = 50(0,1)^2 = 0,5 \text{ W}$$

A fonte de 20 V também está absorvendo potência, já que a corrente entra pelo seu terminal positivo. Esta potência é dada por

$$p_{20\text{V}} = 20i = 2 \text{ W}$$

A potência entregue pela fonte de 30 V é dada por

$$p_{30\text{V}} = 30i = 3 \text{ W}$$

Desde que  $3 = 2 + 0,2 + 0,3 + 0,5$ , a potência entregue é igual à absorvida e então confirma-se a conservação de potência.

### EXEMPLO 2.14

Como terceiro exemplo, vamos calcular o valor de  $i$  e  $v$  e verificar a conservação de potência para o circuito da Fig. 2.21, no qual três condutâncias e duas fontes independentes de corrente estão conectadas em paralelo. A aplicação da LKC no nó superior resulta em

$$10 \text{ sen } \pi t - 0,01v - 0,02v - 5 - 0,07v = 0$$

ou

$$(10 \text{ sen } \pi t - 5) - 0,1v = 0$$

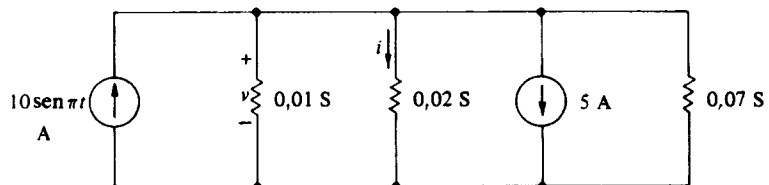


FIGURA 2.21 Circuito com um só par de nós

É evidente deste resultado que uma fonte de corrente de  $(10 \text{ sen } \pi t - 5) \text{ A}$ , conectada à condutância de  $0,1 \text{ S}$  (um resistor de  $10 \Omega$ ), seria um circuito equivalente sob o ponto de vista de  $v$  [Ver Fig. 2.17(b)].

Resolvendo para  $v$  e para  $i$ , temos

$$v = 100 \text{ sen } \pi t - 50 \text{ V}$$

$$i = 0,02v = 0,02(100 \text{ sen } \pi t - 50) = 2 \text{ sen } \pi t - 1 \text{ A}$$

Agora, vamos considerar a conservação de potência para o circuito da Fig. 2.21. A potência total absorvida pelas condutâncias é

$$\begin{aligned} p_{abs} &= G_p v^2 = 0,1(100 \text{ sen } \pi t - 50)^2 \\ &= 1000 \text{ sen}^2 \pi t - 1000 \text{ sen } \pi t + 250 \text{ W} \end{aligned}$$

A potência entregue pela fonte mais à esquerda é

$$p_1 = 10 \text{ sen } \pi t (100 \text{ sen } \pi t - 50) \text{ W}$$

Similarmente, a fonte de 5-A entrega

$$p_2 = -5(100 \text{ sen } \pi t - 50) \text{ W}$$

Então, a potência total entregue por estas fontes é

$$p_{del} = p_1 + p_2 = 1000 \text{ sen}^2 \pi t - 1000 \text{ sen } \pi t + 250 \text{ W}$$

que é igual à absorvida pelas condutâncias.

## EXEMPLO 2.15

Como quarto exemplo, calculemos  $i$ ,  $v$  e a potência entregue pela fonte no circuito da Fig. 2.22(a). Iniciamos calculando os valores equivalentes das associações em série e em paralelo dos resistores. As resistências de  $4 \Omega$  e  $8 \Omega$  (em série) se somam, resultando em  $12 \Omega$ . Este resistor equivalente de  $12 \Omega$  está em paralelo com o resistor de  $6 \Omega$ , dando um valor equivalente igual a  $(12)(6)/(12 + 6) = 4 \Omega$  [Fig. 2.22(b)]. Agora, somamos os resistores de  $12 \Omega$  e  $4 \Omega$ , que estão em paralelo com o de  $16 \Omega$ , obtendo  $(16)(16)/(16 + 16) = 8 \Omega$ , como mostrado na Fig. 2.22(c). Esta é a resistência equivalente vista quando olhamos o circuito pelos terminais  $a$ - $b$ . A resistência equivalente vista pela fonte, da Fig. 2.22(c), é  $R_{eq} = 2 + 8 = 10 \Omega$ , então, a corrente  $i_1$  é

$$i_1 = \frac{30}{10} = 3 \text{ A}$$

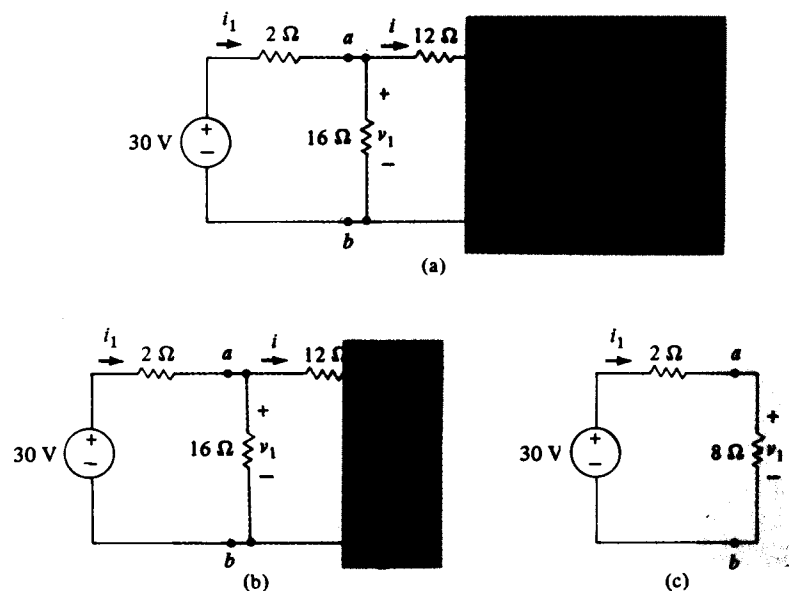


FIGURA 2.22 Circuito para exemplo de análise usando divisão de tensão

Portanto, a potência entregue pela fonte é

$$p_s = (30)(3) = 90 \text{ W}$$

Por divisão de tensão, vemos, na Fig. 2.22(c), que

$$v_1 = \left( \frac{8}{2 + 8} \right) 30 = 24 \text{ V}$$

que é a tensão nos pontos *a-b* no circuito. Analisando a Fig. 2.22(b), vemos que  $v_1$  é a tensão sobre a combinação em série dos resistores de 4 Ω e 12 Ω; por isso, empregando novamente divisões de tensão, encontramos

$$v_2 = \left( \frac{4}{12 + 4} \right) v_1 = 6 \text{ V}$$

que é a tensão nos pontos *c-d* do circuito. Na Fig. 2.22(a),  $v_2$  é a tensão sobre a conexão série dos resistores de 4 Ω e 8 Ω. Portanto, a divisão de tensão dá

$$v = \left( \frac{8}{8 + 4} \right) v_2 = 4 \text{ V}$$

Finalmente, por divisão de corrente na Fig. 2.22(b) temos

$$i = \frac{1}{2} i_1 = 1,5 \text{ A}$$

### EXEMPLO 2.16

Como último exemplo, vamos calcular a corrente  $i$  na Fig. 2.23(a). Note-se que os dois resistores de 6 Ω à direita da Fig. 2.23(a) são equivalentes a 12 Ω, que está em paralelo com o resistor de 4 Ω. Esta combinação paralela é equivalente a  $(4)(12)/(4 + 12) = 3$ , como mostrado na Fig. 2.23(b). Se agora substituirmos os dois resistores em série à direita dos pontos *x-y* e os resistores em paralelo de 3 Ω, e 6 Ω da esquerda de *x-y* por seus equivalentes série e paralelo respectivos, obteremos o circuito da Fig. 2.23(c). Usando divisão de corrente, encontramos

$$i_1 = \left( \frac{2}{2 + 6} \right) \times 12 = 3 \text{ A}$$

Uma segunda aplicação de divisão de corrente na Fig. 2.23(a) leva a

$$i = \left( \frac{4}{4 + 6 + 6} \right) i_1 = \left( \frac{1}{4} \right) \times 3 = \frac{3}{4} \text{ A}$$

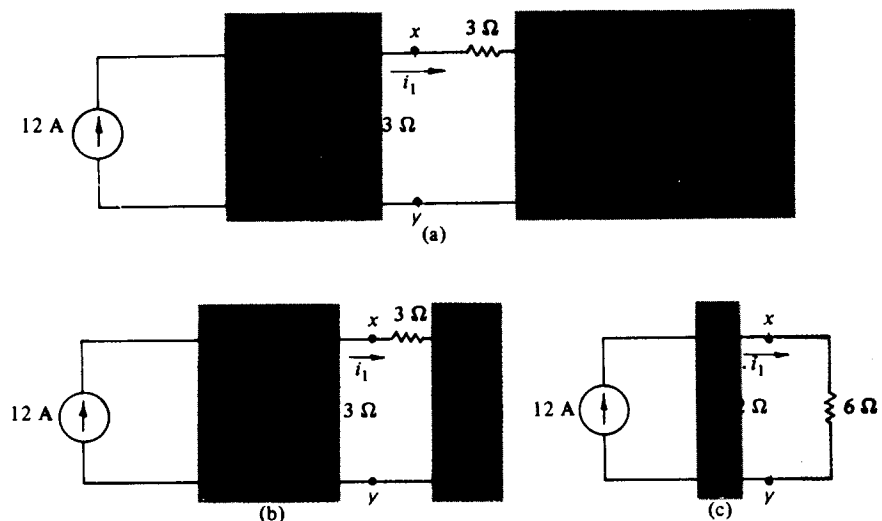
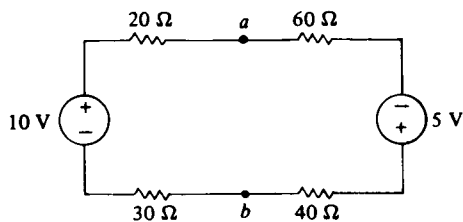


FIGURA 2.23 Circuito para exemplo de análise usando divisão de corrente

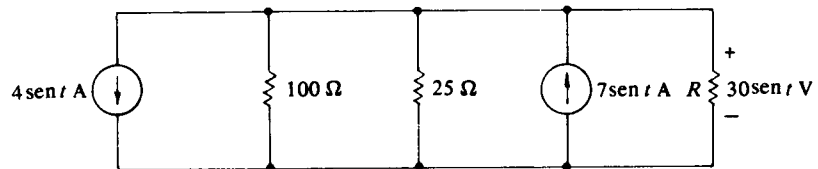
## EXERCÍCIOS

- 2.5.1 Calcule  $v_{ab}$  e a potência entregue pela fonte de 5 V.  
Resposta: 5 V, 0,5 W



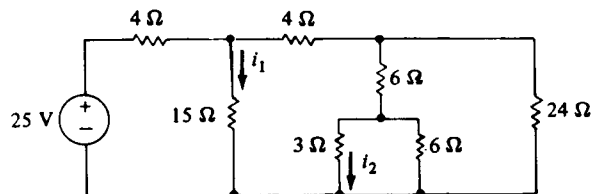
EXERCÍCIO 2.5.1

- 2.5.2 Calcule  $R$  e construa um circuito equivalente com apenas uma fonte de corrente e um único resistor.  
Resposta:  $R = 20 \Omega$ ,  $i = 3 \text{ sen } t \text{ A}$ , com sentido para cima,  $10 \Omega$



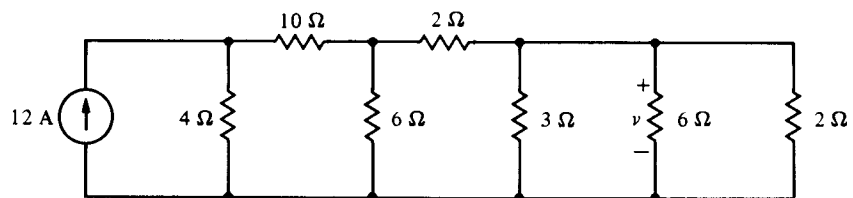
EXERCÍCIO 2.5.2

- 2.5.3 Calcule  $i_1$  e  $i_2$ .  
Resposta: 1, 0,75 A



EXERCÍCIO 2.5.3

- 2.5.4 Calcule  $v$  e a potência entregue pela fonte.  
Resposta: 2 V, 432 W



EXERCÍCIO 2.5.4

## 2.6

### Amperímetros, Voltímetros e Ohmímetros

Um bom exemplo de aplicação de divisão de corrente e de tensão aparece na concepção de instrumentos simples de medida de dois terminais, tais como amperímetros, voltímetros ou ohmímetros. Um *amperímetro*



FIGURA 2.24 Circuito equivalente para o medidor de D'Arsonval

*ideal* mede a corrente que flui através de seus terminais e apresenta uma queda de tensão nula sobre os mesmos. Em contraste, um *voltímetro ideal* mede a tensão existente entre seus terminais, mas a corrente que flui por eles é zero. Um *ohmímetro ideal* mede o valor da resistência conectada entre seus terminais e entrega uma potência nula à resistência.

Os instrumentos de medida práticos, que iremos considerar, apenas se aproximam dos dispositivos ideais. Os amperímetros, por exemplo, não apresentam entre seus terminais uma tensão nula. Do mesmo modo, os voltímetros não apresentam uma corrente nula entre seus terminais e o ohmímetro também não terá potência nula entregue pelos seus terminais.

Um tipo popular de amperímetro consiste de um dispositivo mecânico conhecido como medidor de D'Arsonval. Este dispositivo é constituído por uma bobina elétrica suspensa entre os pólos de um ímã permanente. Uma corrente contínua passando pela bobina causará uma rotação da mesma, como resultado de forças magnéticas, que é proporcional ao valor da corrente. Um ponteiro é ligado à bobina, de modo que a rotação ou deflexão de medidor possa ser visualmente observada. Medidores de D'Arsonval são caracterizados pela sua *corrente de fim de escala*, que é a corrente que irá causar no medidor o maior valor da medida. São comuns instrumentos com correntes de fim de escala de  $10 \mu\text{A}$  a  $10 \text{mA}$ .

Um circuito equivalente para um medidor de D'Arsonval consiste em um amperímetro ideal em série com uma resistência  $R_M$ , como mostrado na Fig. 2.24. Neste circuito,  $R_M$  representa a resistência elétrica da bobina. É claro que uma tensão aparece através dos terminais do amperímetro, como resultado da corrente  $i$  fluindo através de  $R_M$ . O valor de  $R_M$  é normalmente de poucos ohms, e a tensão entre estes terminais, para a corrente de fim de escala, é de 20 a 200 mV.

O medidor de D'Arsonval da Fig. 2.24 é um amperímetro adequado para medições de correntes menores que o valor da corrente de fim de escala  $I_{FS}$ . Suponhamos, entretanto, que desejamos medir uma corrente que exceda  $I_{FS}$ . É óbvio que não podemos permitir que uma corrente de valor maior que  $I_{FS}$  flua através da bobina do medidor. Um circuito para realizar isso é mostrado na Fig. 2.25 onde  $R_p$  é uma resistência em paralelo que reduz a corrente que flui pela bobina do medidor.

Por divisão da corrente, vemos que

$$I_{FS} = \frac{R_p}{R_M + R_p} i_{FS}$$

onde  $i_{FS}$  é a corrente que produz  $I_{FS}$  no medidor de D'Arsonval. (É claro que esta é a corrente máxima que o amperímetro pode medir.) Resolvendo para  $R_p$ , temos

$$R_p = \frac{R_M I_{FS}}{i_{FS} - I_{FS}} \quad (2.30)$$

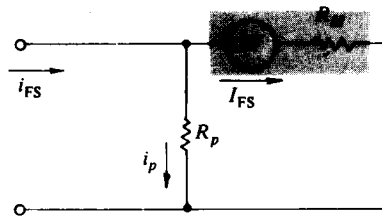


FIGURA 2.25 Circuito de um amperímetro

Um voltímetro cc pode ser construído usando-se um medidor básico de D'Arsonval, colocando-se uma resistência  $R_s$ , em série com o dispositivo, como mostrado na Fig. 2.26. É óbvio que a tensão de fim de escala  $v = v_{FS}$ , ocorre quando a corrente no medidor é  $I_{FS}$ . Portanto, da LKT,

$$-v_{FS} + R_s I_{FS} + R_M I_{FS} = 0$$

da qual

$$R_s = \frac{v_{FS}}{I_{FS}} - R_M \quad (2.31)$$

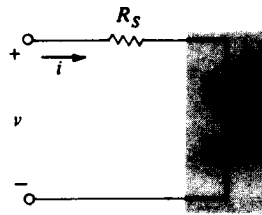


FIGURA 2.26 Circuito de um voltímetro

A *sensibilidade de corrente* de um voltímetro, expressa em ohms por volt, é o valor obtido pela divisão da resistência do voltímetro pelo valor da tensão do fim de escala. Portanto

$$\Omega/V \text{ nominal} = \frac{R_s + R_M}{v_{FS}} \approx \frac{R_s}{v_{FS}} \quad (2.32)$$

(Nota: “ $\approx$ ” significa aproximadamente igual a.)

Um circuito simples de um ohmímetro empregando um medidor de D’Arsonval para medida de um valor de resistência desconhecida  $R_x$  é mostrado na Fig. 2.27. Neste circuito, a bateria  $E$  faz com que uma corrente  $i$  circule quando  $R_x$  é conectado ao circuito. Aplicando a LKT, temos

$$-E + (R_s + R_M + R_x)i = 0$$

do qual

$$R_x = \frac{E}{i} - (R_s + R_M)$$

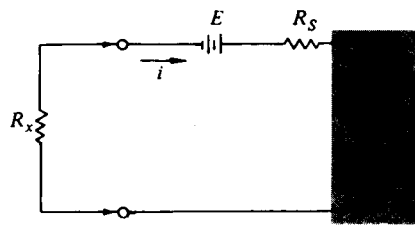


FIGURA 2.27 Circuito de um ohmímetro

Selecionamos  $E$  e  $R_s$  de forma que, para  $R_x = 0$ ,  $i = I_{FS}$ . Portanto,

$$I_{FS} = \frac{E}{R_s + R_M}$$

Combinando as duas últimas equações, encontramos

$$R_x = \left( \frac{I_{FS}}{i} - 1 \right) (R_s + R_M) \quad (2.33)$$

Um medidor de uso geral muito popular, que combina os três circuitos previamente descritos, é o *VOM* (voltímetro-ohmímetro-amperímetro). Num *VOM*, precauções são tomadas para ser possível trocar  $R_p$  e  $R_s$  de modo que o aparelho possa ser usado em uma larga faixa de operação.

## EXERCÍCIOS

- 2.6.1** Um medidor de D’Arsonval tem  $I_{FS} = 1 \text{ mA}$  e  $R_M = 50 \Omega$ . Determine  $R_p$  na Fig. 2.25, de modo que  $i_{FS}$  seja (a) 1,0 mA, (b) 10 mA, (c) 100 mA.  
*Resposta:* (a) infinito; (b) 5,556  $\Omega$ , (c) 0,505  $\Omega$
- 2.6.2** Na Fig. 2.26, determine  $R_s$  e a razão  $\Omega/V$  para um voltímetro ter um valor de fim de escala de 100

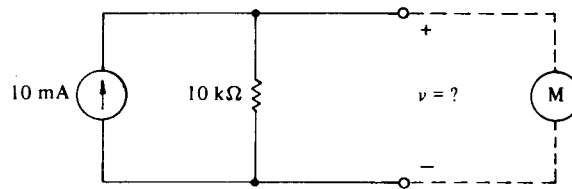


V usando um medidor de D'Arsonval com (a)  $R_M = 100 \Omega$  e  $I_{FS} = 50 \mu A$  e (b)  $R_M = 50 \Omega$  e  $I_{FS} = 1 \text{ mA}$ .

Resposta: (a)  $2 \text{ M}\Omega$ ,  $20 \text{ k}\Omega/\text{V}$ ; (b)  $100 \text{ k}\Omega$ ,  $1 \text{ k}\Omega/\text{V}$

**2.6.3** Que tensões cada medidor projetado no Exercício 2.6.2 mediria no circuito mostrado? Por que as duas medidas são diferentes?

Resposta:  $99,5 \text{ V}$ ;  $90,9 \text{ V}$



**EXERCÍCIO 2.6.3**

**2.6.4** O medidor do Exercício 2.6.1 é usado para constituir o ohmímetro da Fig. 2.27. Determine  $R_s$  e  $E$  de modo que  $i = I_{FS}/2 \text{ mA}$  quando  $R_x = 10 \text{ k}\Omega$ .

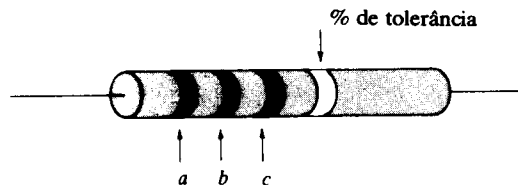
Resposta:  $9,95 \text{ k}\Omega$ ;  $10 \text{ V}$

## 2.7

### Resistores Reais

Resistores são fabricados a partir de vários materiais e estão disponíveis em diversos tamanhos e valores. Suas características incluem um valor nominal de resistência, uma precisão com que a resistência real se aproxima do valor nominal (conhecida como *tolerância*), uma dissipação de potência, e uma estabilidade em função da temperatura, umidade e outros fatores ambientais.

O tipo mais comum de resistor encontrado em circuitos elétricos é o composto de carbono ou filme de carbono. O tipo composto é feito com grãos de carbono prensados a quente. O resistor de filme de carbono é constituído de pó de carbono que é depositado sobre um substrato isolante. Um resistor típico deste tipo é mostrado na Fig. 2.28. Faixas multicoloridas, indicadas como *a*, *b*, *c* e % de tolerância, são pintadas no corpo do resistor para indicar o valor nominal de sua resistência. O código de cores para as bandas é dado na Tabela 2.1.



**FIGURA 2.28** Resistor de carbono

**TABELA 2.1** Código de cores para resistores de carbono

Faixas <i>a</i> , <i>b</i> e <i>c</i>			
Cor	Valor	Cor	Valor
Prata*	-2	Amarela	4
Ouro*	-1	Verde	5
Preta	0	Azul	6
Marrom	1	Violeta	7
Vermelha	2	Cinza	8
Laranja	3	Branca	9
Faixa de tolerância em percentual			
Ouro	$\pm 5\%$		
Prata	$\pm 10\%$		

\*Estas cores se aplicam somente na faixa *c*.

As faixas  $a$ ,  $b$ , e  $c$ , dão o valor nominal da resistência do resistor, e a faixa de tolerância dá a percentagem na qual a resistência pode desviar de seu valor nominal. Com relação à Fig. 2.28 a resistência é

$$R = (10a + b)10^c \pm \% \text{ tolerância} \quad (2.34)$$

o que significa que o percentual de tolerância do valor nominal deve ser adicionado ou subtraído, para dar a faixa em que a resistência se encontra.

### EXEMPLO 2.17

Como exemplo, suponha que temos um resistor com faixas de cores amarela, violeta, vermelha e prata. O resistor terá um valor dado por

$$\begin{aligned} R &= (4 \times 10 + 7) \times 10^2 \pm 10\% \\ &= 4700 \pm 470 \Omega \end{aligned}$$

Portanto, o valor da resistência situa-se entre 4230 e 5170  $\Omega$ .

Valores de resistores de carbono situam-se entre 2,7 e  $2,2 \times 10^7 \Omega$ , com voltagem de  $\frac{1}{8}$  a 2 W. Para resistores de valores menores que 10  $\Omega$ , vemos em (2.34) que a terceira faixa deve ser ouro ou prata. Resistores de carbono têm baixo custo mas têm a desvantagem de uma variação relativamente alta da resistência com a temperatura.

Outro tipo de resistor largamente usado em aplicações que requerem alta dissipação de potência é o resistor de fio. Este dispositivo consiste em um fio metálico, usualmente uma liga de níquel-cromo, enrolado sobre um núcleo de cerâmica. Fios de baixos coeficientes de temperatura permitem a fabricação de resistores de grande precisão e estabilidade, da ordem de  $\pm 1\%$  a  $\pm 0,001\%$ .

O resistor de filme metálico é outro tipo de resistor usual e valioso. Estes resistores são feitos por deposição a vácuo de uma fina camada metálica sobre um substrato de baixa expansão térmica. A resistência é então ajustada por gravação e impressão de um padrão através do filme. A precisão e a estabilidade destes resistores se aproximam das do tipo de fio, e valores de resistência elevados são mais facilmente obtidos.

No futuro, o leitor provavelmente encontrará resistores em *circuitos integrados*, que foram desenvolvidos no final da década de 50 e se tornaram disponíveis na década de 60. Um circuito integrado é uma simples pastilha monolítica ("chip") de *semicondutor* (material cujas propriedades de condutância situam-se entre a dos condutores e a dos isolantes), na qual elementos ativos e passivos são fabricados por processos de difusão e deposição. Circuitos integrados contendo centenas de elementos são encontrados em pastilhas com dimensões de  $\frac{1}{8}$  de polegada quadrada. Uma estrutura típica de resistor em circuito integrado é mostrada na Fig. 2.29.

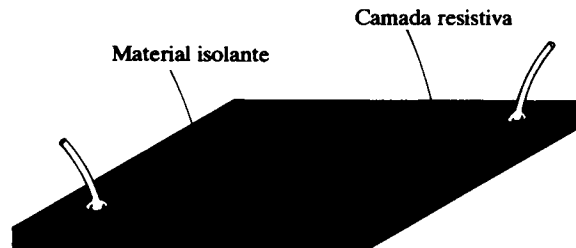


FIGURA 2.29 Resistor de circuito integrado

### EXERCÍCIOS

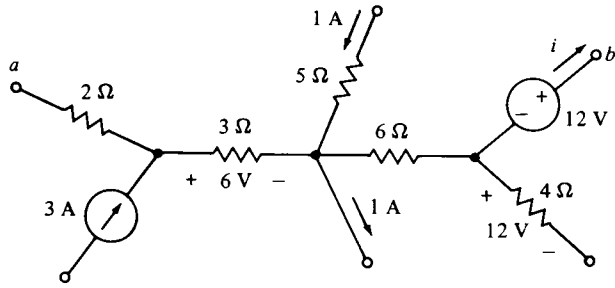
- 2.7.1 Encontre a faixa de resistências de resistores de carbono que têm faixas de cores (a) marrom, preta, vermelha, prata; (b) vermelha, violeta, amarela, prata; e (c) azul, cinza, ouro, ouro.  
Resposta: (a) 900-1100  $\Omega$ ; (b) 243-297 k $\Omega$ ; (c) 6,46-7,14  $\Omega$

### PROBLEMAS

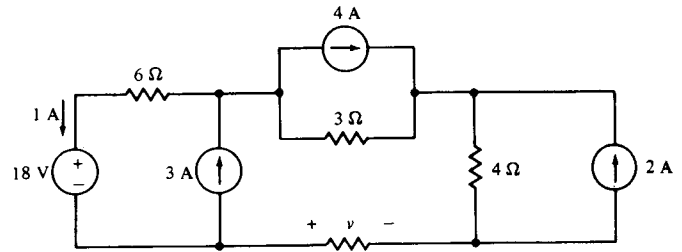
- 2.1 Um resistor de 6 k $\Omega$  é conectado a uma bateria e uma corrente de 2 mA flui no circuito. Que corrente fluirá se a bateria for conectada a um resistor de 40  $\Omega$ ? Qual a tensão nos terminais da bateria?
- 2.2 Uma bateria de 6 V é conectada às extremidades de um fio de

1000 pés de comprimento e uma corrente de 12 mA flui. Qual a resistência por pé do fio?

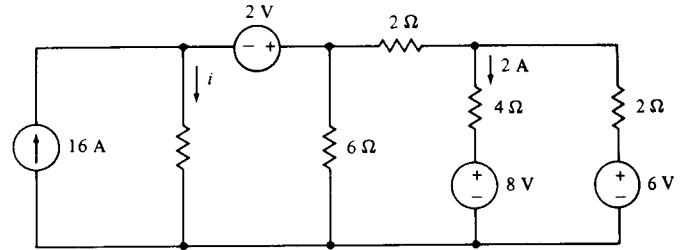
- 2.3 Uma torradeira é essencialmente um resistor que se aquece quando uma corrente o percorre. Se uma torradeira dissipa 960 W com 120 V de tensão, calcule sua corrente e sua resistência.
- 2.4 Calcule a energia consumida por uma torradeira com resistência de 12 Ω, que opera a 120 V por 10 s.
- 2.5 Calcule  $i$  e  $v_{ab}$ .



PROBLEMA 2.5

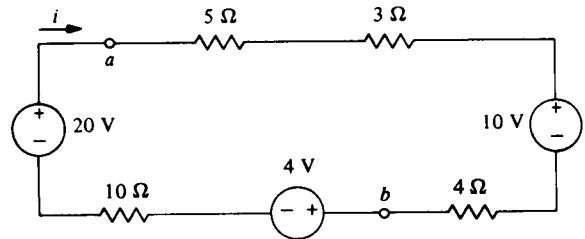


PROBLEMA 2.8



PROBLEMA 2.9

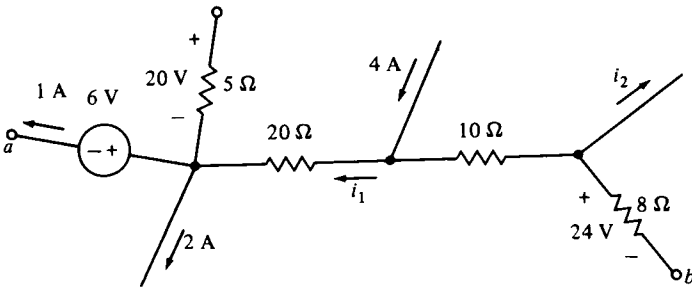
- 2.10 Calcule  $i$ ,  $v_{ab}$  e um circuito equivalente para  $i$  contendo uma única fonte e um único resistor.



PROBLEMA 2.10

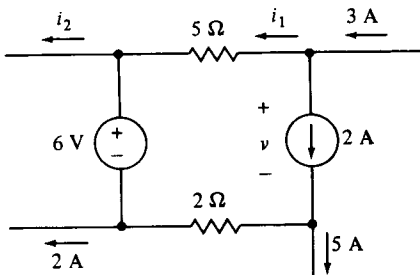
- 2.11 Uma fonte de 10 V em série com vários resistores fornece uma corrente de 50 mA. Qual resistência deve ser conectada em série com a fonte e os resistores para que a corrente seja limitada em 20 mA?
- 2.12 Uma fonte de 50 V e dois resistores,  $R_1$  e  $R_2$  são conectados em série. Se  $R_2 = 4R_1$ , calcule a tensão sobre cada resistor.
- 2.13 Uma fonte de 12 V em série com uma carga resistiva  $R$  fornece uma corrente de 60 mA. Se um resistor  $R_1$  for adicionado em série com a fonte e a carga, calcule  $R_1$  tal que a tensão sobre ele seja de 8 V.
- 2.14 Projete um divisor de tensão que forneça 4, 10 e 20 V, referente a um terminal negativo comum, a partir de uma fonte de 25 V. A fonte fornece 25 mW de potência.
- 2.15 Projete um divisor de tensão que forneça 2, 6, 10, 24 e 40 V, referente a um terminal negativo comum, a partir de uma fonte de 50 V, que fornece 100 mW de potência.

- 2.6 Calcule  $i_1$ ,  $i_2$  e  $v_{ab}$ .



PROBLEMA 2.6

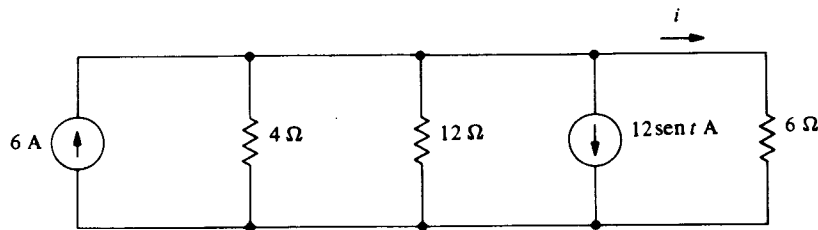
- 2.7 Calcule  $i_1$ ,  $i_2$  e  $v$ .



PROBLEMA 2.7

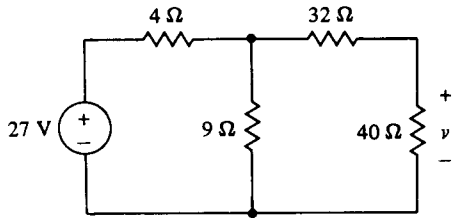
- 2.8 Calcule  $v$ .

- 2.9 Calcule  $i$ .



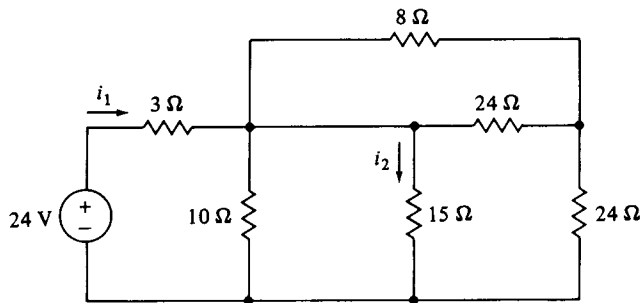
PROBLEMA 2.18

- 2.16 Construa um divisor de tensão com uma fonte de 60 V e vários resistores de 10 kΩ. Calcule o número mínimo de resistores necessários, se a tensão de saída é (a) 40 V e (b) 30 V.
- 2.17 Calcule todas as tensões de saída possíveis, inferiores a 14 V, que podem ser obtidas pela construção de divisores de tensão com uma fonte de 14 V em série com três resistores cujos valores são, respectivamente, 2, 4 e 8 Ω.
- 2.18 Calcule  $i$  e a potência entregue ao resistor de 4 Ω.
- 2.19 Calcule  $v$ .



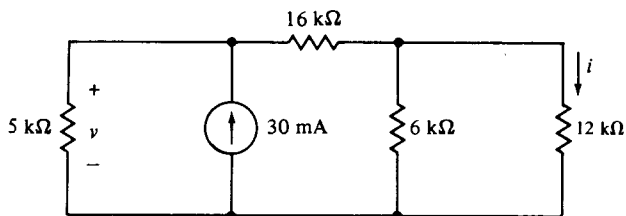
PROBLEMA 2.19

- 2.20 Um resistor de 20 Ω, um resistor de 30 Ω e um resistor  $R$  são conectados em paralelo para formar uma resistência equivalente de 4 Ω. Calcule  $R$  e a corrente que o percorre se uma fonte de corrente de 6 A é conectada a esta combinação de resistores.
- 2.21 Um divisor de corrente é constituído de uma conexão paralela de resistores de 10 kΩ, 20 kΩ, 30 kΩ e 60 kΩ. Calcule a resistência equivalente do divisor, e, sabendo que a corrente total que entra no divisor é 120 mA, calcule o valor da corrente no resistor de 60 kΩ.
- 2.22 Um divisor de corrente é constituído de 10 resistores em paralelo. Nove deles têm resistências iguais a 60 kΩ e o décimo é de 20 kΩ. Calcule o valor da resistência equivalente deste divisor e, sabendo que a corrente total que entra no divisor é de 40 mA, encontre o valor da corrente no décimo resistor.
- 2.23 Calcule  $i_1$  e  $i_2$ .



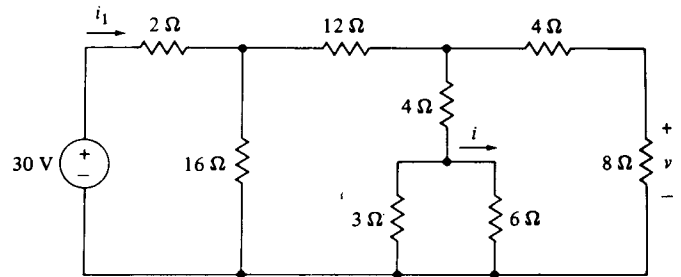
PROBLEMA 2.23

- 2.24 Calcule  $v$  e  $i$ .



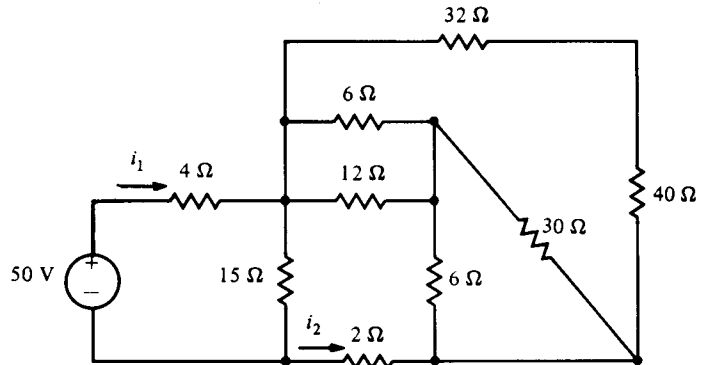
PROBLEMA 2.24

- 2.25 Calcule  $i$ ,  $i_1$  e  $v$ .
- 2.26 Calcule todos os valores possíveis de resistência equivalente que podem ser obtidos por alguém que tenha três resistores de 6 Ω.



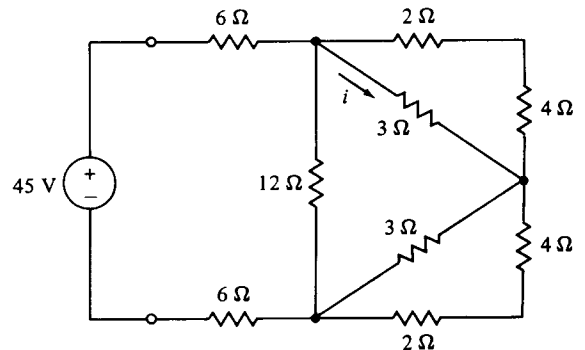
PROBLEMA 2.25

- 2.27 Dois resistores de 1 kΩ estão conectados em série. Quando um resistor  $R$  é conectado em paralelo com um deles, a resistência do conjunto torna-se 1200 Ω. Calcule o valor de  $R$  e a corrente que passa nele, se o conjunto for conectado aos terminais de uma bateria de 15 V.
- 2.28 Calcule  $i_1$  e  $i_2$ .



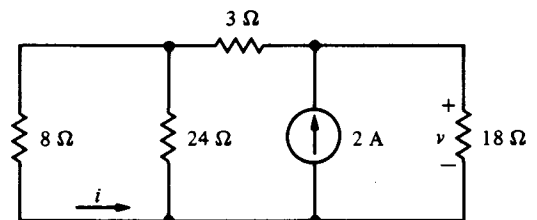
PROBLEMA 2.28

- 2.29 Calcule  $i$ .



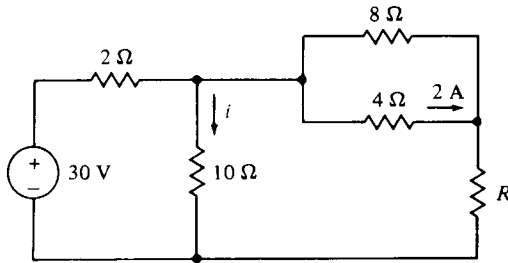
PROBLEMA 2.29

- 2.30 Calcule  $v$  e  $i$ .



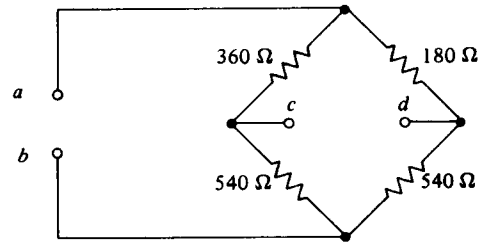
PROBLEMA 2.30

2.31 Calcule  $i$  e  $R$ .



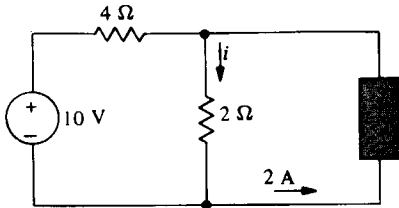
PROBLEMA 2.31

2.33 (a) Calcule a resistência equivalente vista nos terminais  $a-b$ . Se os terminais  $c-d$  estão abertos e se os terminais  $c-d$  são curto-circuitados. (b) Calcule o valor da resistência equivalente vista nos terminais  $c-d$ , se os terminais  $a-b$  estão abertos, e se estes terminais  $a-b$  estão curto-circuitados.



PROBLEMA 2.33

2.32 Calcule  $i$ .



PROBLEMA 2.32

2.34 Calcule  $i$ ,  $v_1$  e  $v_2$ .

2.35 Calcule a potência absorvida pelo resistor de 12 Ω.

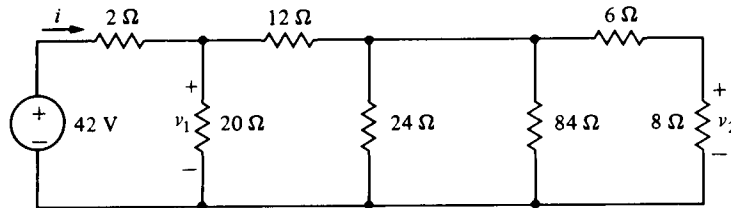
2.36 Calcule  $R$  e  $v$  empregando divisão de corrente e de tensão.

2.37 Calcule  $i$  e  $v$ .

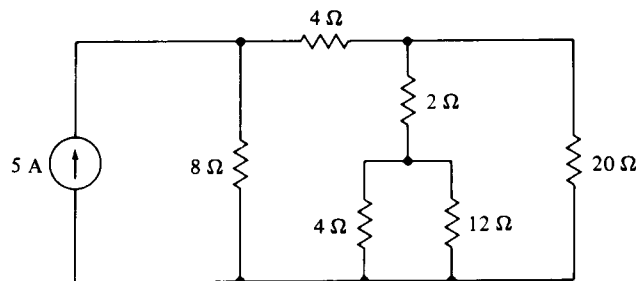
2.38 Calcule  $i_1$  e  $i_2$ .

2.39 Calcule  $i_1$ ,  $i_2$  e  $v$ .

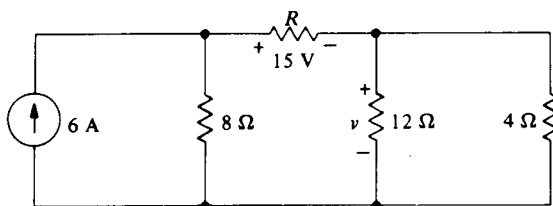
2.40 Um medidor de D'Arsonval tem um valor de fim de escala de corrente de 1 mA e uma resistência de 4,9 Ω. Se um resistor em paralelo  $R_p$  de 0,1 Ω é colocado como indicado na Fig. 2.25, qual o valor de  $i_{FS}$ ? Qual o valor da tensão no medidor?



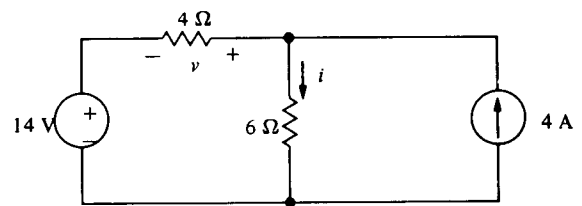
PROBLEMA 2.34



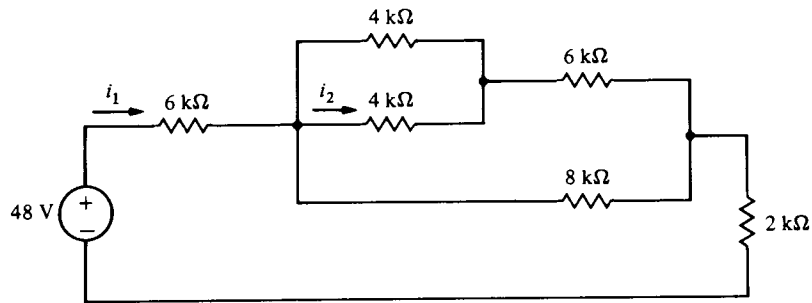
PROBLEMA 2.35



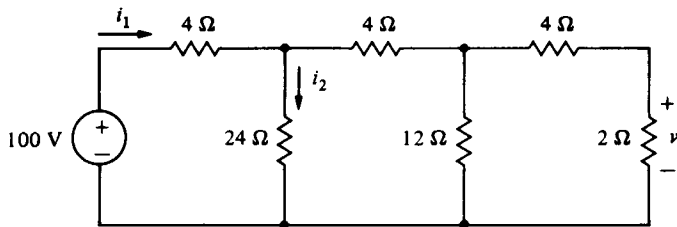
PROBLEMA 2.36



PROBLEMA 2.37



**PROBLEMA 2.38**



**PROBLEMA 2.39**

- 2.41 Um voltímetro de  $20.000 \Omega/V$  tem o valor de fim de escala de  $120 V$ . Que corrente flui pelo medidor quando este está indicando  $90 V$ ?
- 2.42 Dois resistores de  $10 k\Omega$  são conectados em série a uma fonte de  $100 V$ . Que valor de tensão irá medir o voltímetro do Prob. 2.41 sobre um dos resistores de  $10 k\Omega$ ? Repita para dois resistores de  $1 M\Omega$  ligados em série.
- 2.43 O medidor de D'Arsonval do Prob. 2.40 é usado como ohmímetro na Fig. 2.27. Qual o valor da resistência em série necessária se  $E = 1,5 V$ ? Qual o valor de um resistor provocará uma deflexão de um quarto do fim da escala?
- 2.44 Determine o código de cores que devem ter os resistores com as seguintes faixas de resistência: (a)  $4,23-5,17 \Omega$ ; (b)  $6460-7140 \Omega$ ; e (c)  $3,135-3,465 M\Omega$ .



## Fontes Dependentes ou Controladas

---

*Eu, com isto, apresento ao público a teoria da eletricidade galvânica [Lei de Ohm].*

*Georg Simon Ohm*

---

A mais básica e mais amplamente aplicada das leis da eletricidade, a Lei de Ohm, foi publicada em 1827, pelo físico alemão Georg Simon Ohm, em seu grande trabalho *A Corrente Galvânica, Tratada Matematicamente*. Sem a Lei de Ohm não poderíamos analisar a mais simples corrente galvânica (circuito elétrico). Mas, quando de sua divulgação, o trabalho de Ohm foi denunciado pelos críticos como "uma trama de grosseiras fantasias", cujo "esforço único" era "denegrir a dignidade da natureza."

Ohm nasceu em Erlangen, Bavária, sendo o mais velho de sete crianças em uma família de classe média-baixa. Abandonou cedo a Universidade de Erlangen, mas retornou em 1811 e obteve seu doutorado e o primeiro de uma série de cargos de professor de matemática, posições estas modestas e mal remuneradas. Para melhorar de posição, lançava-se em pesquisas elétricas em toda folga de seu duro trabalho de professor, e seus esforços culminaram na famosa lei. A despeito das críticas injustas a seu trabalho, Ohm ainda usufruiu da fama que lhe era devida. A Sociedade Real de Londres agraciou-o com a medalha de Copley, em 1841, e a Universidade de Munique contratou-o como professor da cadeira de Física, em 1849. Foi também homenageado após sua morte quando o *ohm* foi escolhido como a unidade de resistência elétrica. ■



As fontes de tensão e de corrente dos Caps. 1 e 2 são fontes independentes, como definido na Seção 1.4. Também podemos ter fontes *controladas* ou *dependentes*, que são muito importantes na teoria dos circuitos, particularmente em circuitos eletrônicos. Neste capítulo, definiremos fontes dependentes e consideraremos um elemento adicional de circuitos, o amplificador operacional, que pode ser usado para a obtenção de fontes dependentes.

Vamos também analisar alguns circuitos simples contendo fontes e resistores, tanto independentes como dependentes. Como veremos, a análise é análoga à desenvolvida no Cap. 2, e os resultados podem ser usados para construir circuitos importantes, como amplificadores e inversores, que serão definidos neste capítulo.

## 3.1

### Definições

Uma *fonte de tensão controlada ou dependente* é aquela cujo valor da tensão depende ou é controlada por uma tensão ou corrente existente em outra parte do circuito. Uma *fonte de tensão controlada por tensão* (FTCT) é uma fonte de tensão controlada por uma tensão e uma *fonte de tensão controlada por corrente* (FTCC) é aquela controlada por uma corrente. O símbolo de uma fonte dependente de tensão, com um valor de tensão  $v$  é indicado na Figura 3.1(a).

Uma *fonte de corrente controlada, ou dependente*, simbolizada na Figura 3.1(b), é aquela na qual o valor da corrente depende de um valor de tensão ou corrente proveniente de outra parte do circuito. Uma *fonte de corrente controlada por tensão* (FCCT) é controlada por uma tensão, e uma *fonte de corrente controlada por corrente* (FCCC) é controlada por uma corrente.

A Figura 3.2 ilustra quatro tipos de fontes controladas e mostra as tensões ou correntes das quais elas dependem. As grandezas  $\mu$  e  $\beta$  são constantes adimensionais, normalmente denominadas como *ganho* de tensão e de corrente, respectivamente. As constantes  $r$  e  $g$  têm unidades de ohms e siemens, respectivamente.

Como exemplo, no circuito da Figura 3.3 temos uma fonte independente, uma fonte dependente, e dos resistores. A fonte dependente é uma fonte de tensão controlada por uma corrente  $i_1$ . O valor de  $r$  para a fonte dependente é  $0,5 \text{ V/A}$ .

Fontes dependentes são componentes essenciais em circuitos *amplificadores* (aqueles para os quais a amplitude de saída é maior que a de entrada). Eles também servem para várias outras funções, tais

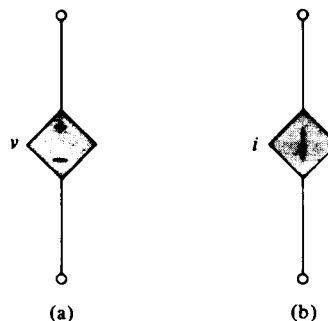


FIGURA 3.1 (a) Fonte de tensão dependente; (b) fonte de corrente dependente



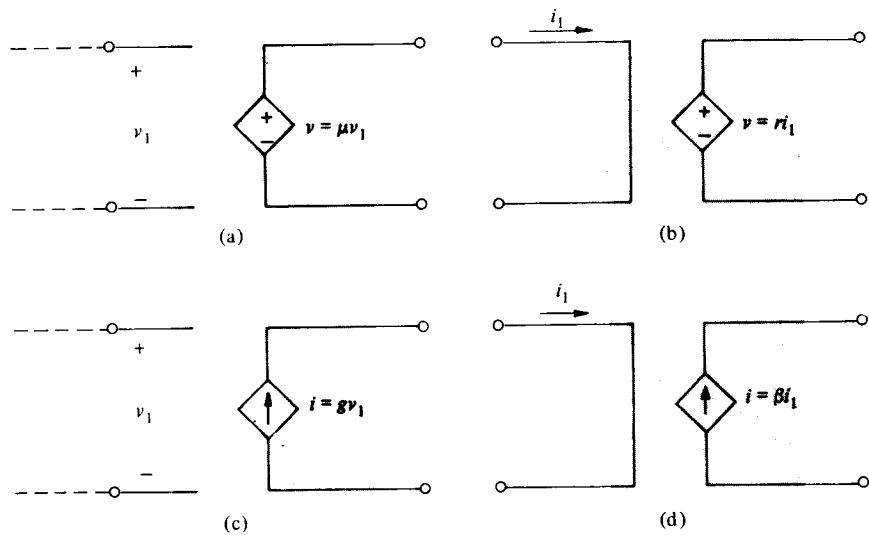


FIGURA 3.2 (a) FTCT; (b) FTCC; (c) FCCT; (d) FCCC

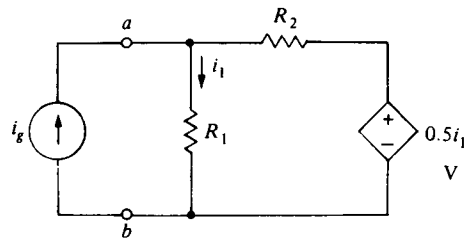


FIGURA 3.3 Circuito contendo uma fonte dependente

como a de isolar determinada parte de um circuito do restante do mesmo, ou fornecer uma resistência negativa. Como vimos no Capítulo 2, o resistor é um elemento passivo com resistência positiva. Entretanto, por meio de fontes dependentes podem ser fabricadas resistências negativas, como veremos mais tarde (por exemplo, Exs. 3.2.2 e 3.2.3).

## 3.2

### Circuitos com Fontes Dependentes

Circuitos contendo fontes dependentes são analisados da mesma forma que os que não as contêm. Isto é, a lei de Ohm para resistores e as leis de Kirchhoff de tensão e de corrente são válidas, assim como os conceitos de resistência equivalente e divisão de tensão e de corrente.

#### EXEMPLO 3.1

Como um exemplo deste procedimento, vamos calcular o valor da corrente  $i$  no circuito da Figura 3.4. A fonte dependente é uma fonte de tensão controlada por uma tensão  $v_1$ , como indicado. Aplicando-se

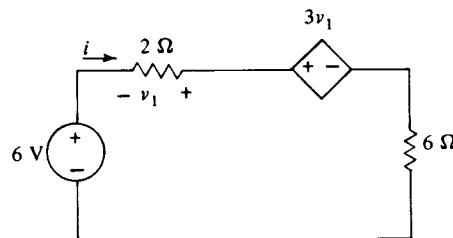


FIGURA 3.4 Exemplo de fonte dependente

a lei de Kirchhoff das tensões ao circuito, temos

$$-v_1 + 3v_1 + 6i = 6 \quad (3.1)$$

e pela lei de Ohm, temos

$$v_1 = -2i \quad (3.2)$$

Usando (3.2), podemos eliminar  $v_1$  em (3.1), o que resulta em

$$2(-2i) + 6i = 6$$

ou  $i = 3$  A. Desta forma, a fonte dependente tem de mais complicado somente a necessidade de uma equação extra (3.2).

### EXEMPLO 3.2

Como outro exemplo, vamos encontrar a tensão  $v$  na Figura 3.5. Aplicando a lei de Kirchhoff das correntes para as correntes que deixam o nó superior, temos

$$-4 + i_1 - 2i_1 + \frac{v}{2} = 0 \quad (3.3)$$

Também pela lei de Ohm temos

$$i_1 = \frac{v}{6} \quad (3.4)$$

Substituindo (3.4) em (3.3), fica

$$-4 - \frac{v}{6} + \frac{v}{2} = 0$$

ou  $v = 12$  V.

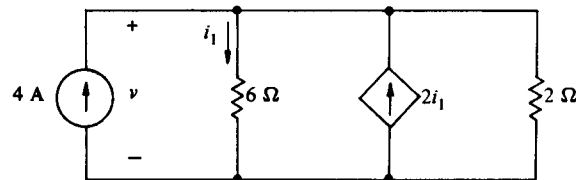
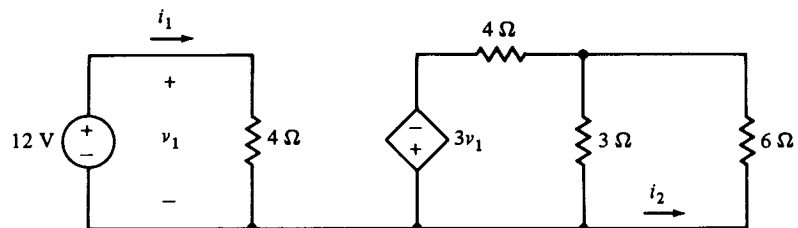


FIGURA 3.5 Outro exemplo de fonte dependente

### EXERCÍCIOS

- 3.2.1** No circuito da Figura 3.4 troque o resistor de  $2 \Omega$  por um de  $1 \Omega$ , e calcule  $i$ ,  $v_1$  e a resistência vista pela fonte (isto é,  $R = 6/i$ ).  
*Resposta:*  $1,5$  A,  $-1,5$  V,  $4 \Omega$
- 3.2.2** Repita o Ex. 3.2.1 se o resistor de  $2 \Omega$  for trocado por um resistor de  $4 \Omega$ . (Note que uma resistência negativa é possível, quando uma fonte dependente está presente.)  
*Resposta:*  $-3$  A,  $12$  V,  $-2 \Omega$
- 3.2.3** Na Figura 3.3, calcule a resistência vista pela fonte (isto é, olhando pelos terminais  $a$ - $b$ ) se (a)  $R_1 = 1,5 \Omega$  e  $R_2 = 2 \Omega$  e (b)  $R_1 = R_2 = 0,1 \Omega$ .  
*Resposta:* (a)  $1 \Omega$ ; (b)  $-\frac{1}{30} \Omega$
- 3.2.4** Calcule  $i_1$  e  $i_2$   
*Resposta:*  $3, 2$  A



EXERCÍCIO 3.2.4

## Amplificadores Operacionais

Uma questão lógica neste ponto pode ser: Como fazer para obtermos fontes dependentes? Uma resposta é que elas surgem como parte de circuitos equivalentes de dispositivos eletrônicos, operando sob determinadas condições. Outra resposta é que eles podem ser construídos deliberadamente por meio de certos dispositivos eletrônicos associados com elementos passivos.

Não pretendemos fazer aqui um estudo de dispositivos eletrônicos, visto que o leitor terá tal oportunidade num curso de eletrônica. Contudo, existe um dispositivo que é muito útil na construção de fontes dependentes e cujo modelo matemático ideal é tão simples quanto refinado. Trata-se do *amplificador operacional*, ou *amp. op.*, cujo modelo ideal será considerado nesta seção.

O símbolo que iremos empregar para um amplificador operacional é mostrado na Figura 3.6. O amp. op. é um dispositivo multiterminal, mas, por simplicidade, só mostraremos os três terminais indicados. O Terminal 1 (marcado com o sinal  $-$ ) é o *terminal inversor de entrada*, o terminal 2 (indicado com o sinal  $+$ ) é o *terminal não-inversor de entrada*, e o terminal 3 é o *terminal de saída*. Os outros terminais não mostrados incluem, em geral, os de conexão da fonte de alimentação em dc e o de compensação de frequência e os de "offset null". Não detalharemos estes outros terminais aqui, mas o estudante interessado pode encontrar a finalidade dos mesmos e como eles são usados em um manual do usuário de amp. op.

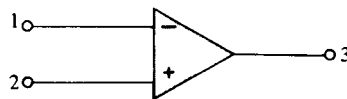


FIGURA 3.6 Símbolo de um amplificador operacional

Os amplificadores operacionais são comumente disponíveis na forma de circuitos integrados e que são normalmente fabricados sob a forma de pastilhas de 8 a 14 terminais e contendo 1 a 4 amp. op. Um circuito integrado típico "dual in line package" (DIP) — com outros terminais é mostrado na Figura 3.7.

Amplificadores operacionais têm várias características importantes para o projetista, mas o modelo *ideal* de um amp. op. tem somente duas propriedades que o analista de circuito precisa conhecer: que a corrente nos dois terminais de entrada é zero e que a diferença de potencial entre os terminais de entrada também é zero.

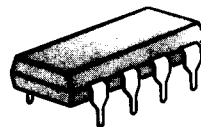


FIGURA 3.7 Amp. op. "dual in line package"

Deve ser ressaltado que a generalização da LKC não pode ser feita no amp. op. da Figura 3.6. Isto é, o fato das correntes de entrada serem zero não significa que a corrente de saída seja zero. Isto pode ser visto mais claramente na Figura 3.8, onde os terminais de alimentação são mostrados. Na verdade, a LKC não pode ser aplicada ao terminal 3 da Figura 3.6, visto que, devido aos terminais não mostrados, não podemos conhecer a corrente de saída.

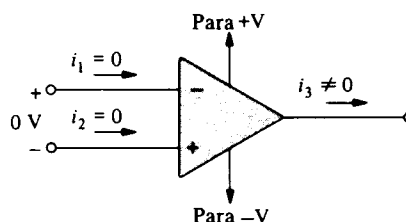


FIGURA 3.8 Amp. op. com os terminais de alimentação

### EXEMPLO 3.3

Como um exemplo de um circuito com um amplificador operacional, vamos considerar a Figura 3.9. Deseja-se calcular a corrente  $i$  e a tensão  $v_3$ , considerando que é conhecida a tensão  $v_g$  do gerador. O símbolo ligado ao nó  $c$  é o terra (a ser estudado mais detalhadamente no Capítulo 4), um ponto arbitrário ao qual os terminais de alimentação não mostrados também estão conectados. Não devemos ter a tentação de aplicar a LKC ao nó  $c$ , pois as correntes que fluem para terra devido aos terminais não mostrados não são conhecidas. Se o símbolo do terra não é mostrado, isto deverá ser entendido como o terra sendo conectado ao terminal negativo da fonte de tensão.

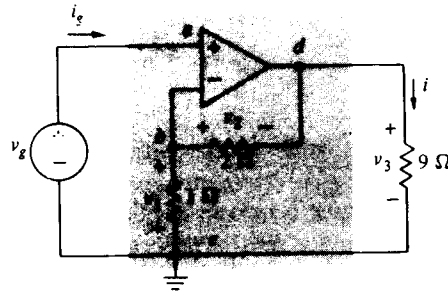


FIGURA 3.9 Circuito contendo um amp. op

Vamos escrever a LKT no laço  $abca$ , através da fonte. Uma vez que a tensão nos terminais  $a$  e  $b$  é zero, temos

$$v_1 - v_g = 0 \quad (3.5)$$

ou  $v_1 = v_g$ . Aplicando a LKC ao nó  $b$  e observando que a corrente no terminal negativo do amp. op é zero, temos

$$\frac{v_1}{1} + \frac{v_2}{2} = 0 \quad (3.6)$$

ou  $v_2 = -2v_1 = -2v_g$ . Depois, aplicando a LKT pelo laço  $cbdc$  passando pelo resistor de  $9 \Omega$  obtém-se

$$-v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

ou

$$v_3 = v_1 - v_2 = 3v_g \quad (3.7)$$

Finalmente, da lei de Ohm, vem

$$i = \frac{v_3}{9} = \frac{3v_g}{9} = \frac{v_g}{3}$$

Então, se  $v_g = 12 \cos 10t$ , por exemplo, temos  $i = 4 \cos 10t$ .

Como um subproduto deste exemplo, notamos que  $i_g = 0$  (a corrente em um terminal de entrada do amp. op) e  $v_3 = 3v_g$  de (3.7). Então, podemos desenhar um circuito equivalente em relação a  $v_g$ ,  $i_g$ ,  $v_3$  e  $i$ , como o mostrado na Figura 3.10. Pela análise do circuito equivalente tem-se exatamente os mesmos  $v_3$  e  $i$  para os mesmos  $v_g$  e  $i_g$  como no caso da Figura 3.9. Então, o amp. op. pode ser usado para se obter uma fonte controlada com um ganho de 3. (Neste caso, a fonte controlada é uma FTCT, na qual  $v_g$  controla  $v_3$ ).

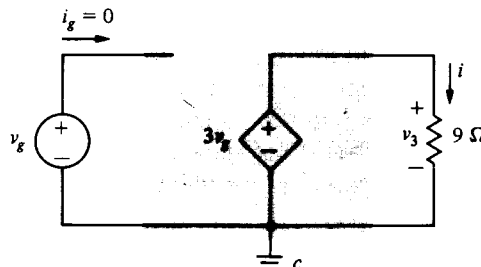


FIGURA 3.10 Circuito equivalente ao da Figura 3.9

Antes de encerrarmos esta seção, vamos observar que o amp. op. na Figura 3.9 está operando em um modo com *realimentação*. Isto é, a saída  $v_2$  no nó  $d$  é realimentada pelo terminal inversor de entrada através do resistor de  $2\Omega$ . Um amp.op. real é um dispositivo com um ganho muito elevado e que geralmente não é empregado sem realimentação. Nos casos em que a realimentação é para um terminal de entrada e não para ambos, ela é sempre feita para o terminal inversor, porque de outra forma o amp. op. não funcionará. Não há interesse aqui nas razões disto, que são consequência do projeto do amp. op. O estudante interessado, certamente, terá a oportunidade de estudar as amp. op. e sua construção num curso posterior de dispositivos eletrônicos.

## 3.4

### Circuitos Amplificadores

As Eqs. (3.6) e (3.7), que são a base para a FTCT da Figura 3.10, são independentes da corrente  $i$  no resistor de carga de  $9\Omega$  da Figura 3.9. Isso é geralmente verdadeiro para um circuito de uma FTCT deste tipo. Para ver isso, vamos examinar o circuito da Figura 3.11. A tensão  $v_2$  é a tensão de saída do amp. op. e, como veremos, é função apenas da tensão de entrada  $v_1$  e dos dois resistores.

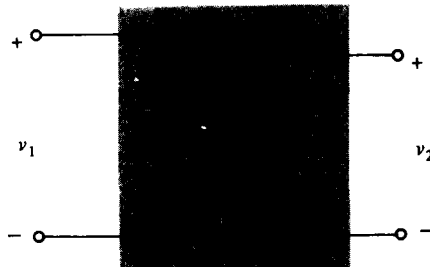


FIGURA 3.11 FTCT

Como não há tensão entre os terminais de entrada de um amp. op, temos  $v_{ba} = v_1$ . Também, aplicando a LKT sobre o percurso  $abca$  contendo  $v_2$ , obtemos

$$-v_{ba} + v_{bc} + v_2 = 0$$

ou

$$v_{bc} = v_{ba} - v_2 = v_1 - v_2$$

Portanto, da aplicação da LKC no nó  $b$  resulta

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0$$

Resolvendo para  $v_2$ , temos

$$v_2 = \mu v_1 \quad (3.8)$$

onde

$$\mu = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (3.9)$$

A Figura 3.11 é, portanto, uma FTCT com ganho  $\mu$ . Visto que ela é uma rede de três terminais (a saída e a entrada compartilham um terminal comum) e as correntes são nulas no terminal de entrada do amp. op., um circuito equivalente pode ser o desenhado na Figura 3.12. Note que, visto que tanto  $R_1$  quanto  $R_2$  são não-negativas, temos  $\mu > 1$ .

Um caso especial da Figura 3.11 é o caso em que  $R_2 = 0$  (curto-circuito) e  $R_1 = \infty$  (circuito aberto), mostrado na Figura 3.13. Este circuito tem  $\mu = 1$ , ou  $v_2 = v_1$  e é denominado de *seguidor de tensão*, isto é,  $v_2$  segue  $v_1$ . Ele também é chamado um *amplificador "buffer"*, pois pode ser usado para isolar,

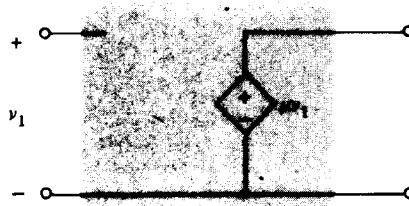


FIGURA 3.12 Circuito equivalente ao da Figura 3.11

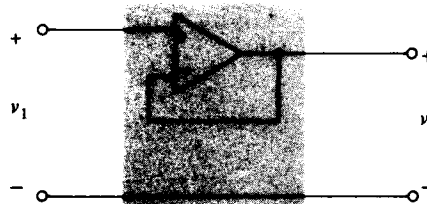


FIGURA 3.13 Seguidor de tensão

ou “buffer”, um circuito de outro. (A tensão nos dois pares de terminais é a mesma, mas não há circulação de corrente de um par para outro.) Um exemplo é dado no Exerc. 3.4.3.

Vamos agora considerar o circuito da Figura 3.14. Aplicando a LKC ao terminal inversor de entrada do amp. op., temos

$$-\frac{v_1}{R_1} - \frac{v_2}{R_2} = 0$$

ou

$$v_2 = -\frac{R_2}{R_1}v_1 \tag{3.10}$$

(Lembre-se que tanto a corrente quanto a tensão entre os terminais de entrada de um amp. op. são zero.)

Este circuito é chamado de *inversor* porque a polaridade de  $v_2$  é oposta à de  $v_1$ , como mostrado em (3.10). Ele também é uma FCCT, mas neste caso a corrente de entrada  $i_1$  não é zero, sendo dada por

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1} \tag{3.11}$$

Um circuito equivalente é mostrado na Figura 3.15.

Por (3.11)  $v_1 = R_1 i_1$ , logo podemos eliminar  $v_1$  na Figura 3.15, resultando em outro circuito equivalente, mostrado na Figura 3.16. Este circuito é evidentemente um FTCC, pois a tensão  $v_2$  é controlada pela corrente  $i_1$ .

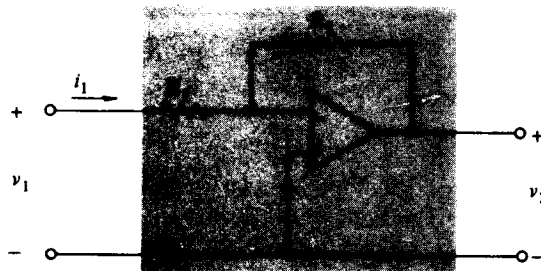


FIGURA 3.14 Inversor

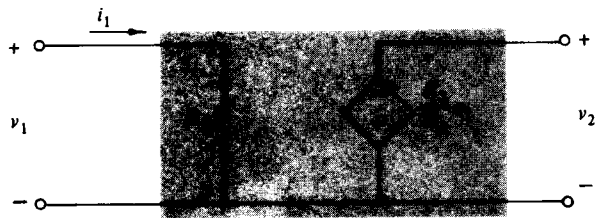


FIGURA 3.15 Circuito equivalente de um inversor

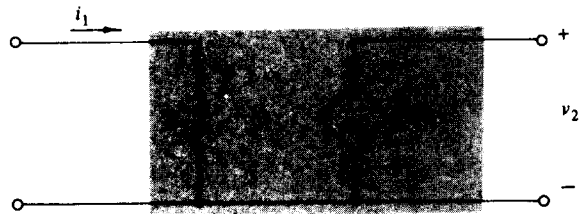


FIGURA 3.16 FTCC

Podemos obter fontes dependentes de corrente da Figura 3.14, que redesenhamos como mostrado na Figura 3.17. Visto que não há circulação de corrente nos terminais do amp. op., temos

$$i_2 = i_1 = \frac{v_1}{R_1} \quad (3.12)$$

Da forma como os terminais 1, 2, 3 e 4 são considerados, um circuito equivalente é então o da Figura 3.18, que é uma FCCC, com ganho igual a 1.

Finalmente, substituindo  $i_1$  em (3.12), podemos redesenhar a Figura 3.18 como uma FCCT, mostrado na Figura 3.19. Neste caso,  $g = 1/R_1$ .

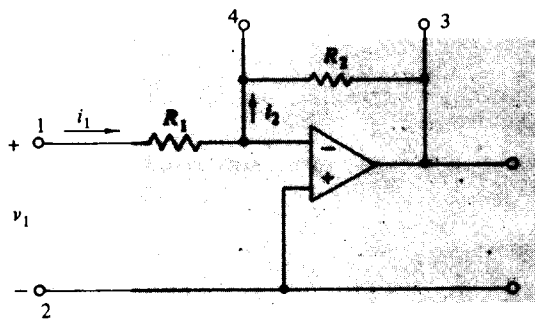


FIGURA 3.17 Circuito inversor redesenhado

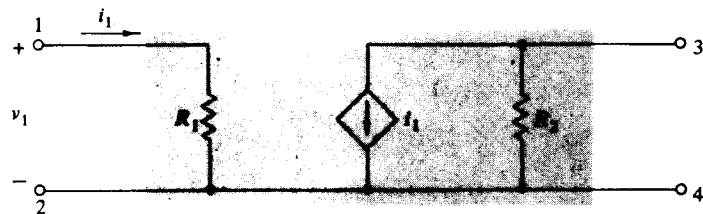


FIGURA 3.18 FCCC

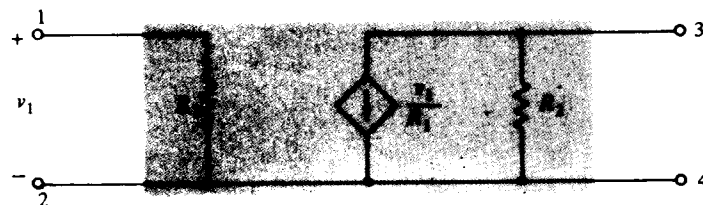
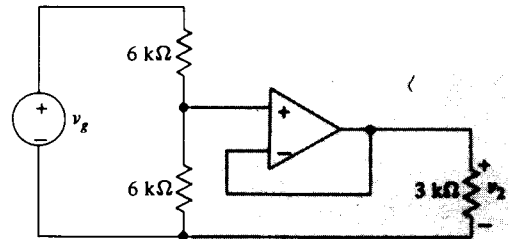
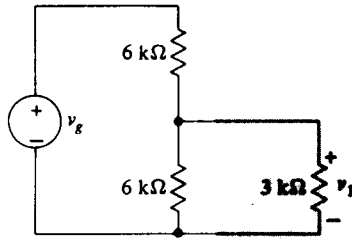


FIGURA 3.19 FCCT

## EXERCÍCIOS

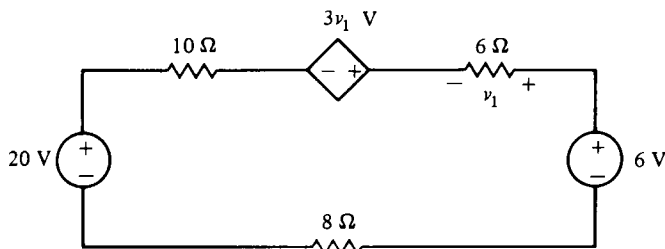
- 3.4.1 Na Figura 3.11, seja  $v_1 = 2 \text{ V}$  e  $R_2 = 18 \text{ k}\Omega$ . Se um resistor de carga  $R = 5 \text{ k}\Omega$  é conectado através dos terminais de  $v_2$ , calcule  $R_1$  tal que pelo resistor  $R$  flua uma corrente de  $4 \text{ mA}$ .  
Resposta:  $2 \text{ k}\Omega$
- 3.4.2 No inversor da Figura 3.14, seja  $v_1 = 4 \text{ V}$ . Calcule  $R_1$  e  $R_2$  tais que  $i_1 = 2 \text{ mA}$  e  $v_2 = -8 \text{ V}$ .  
Resposta:  $2 \text{ k}\Omega, 4 \text{ k}\Omega$
- 3.4.3 Calcule  $v_1$  e  $v_2$ . Note que o amplificador "buffer" mantém  $v_2$  para  $v_g/2$ , enquanto o resistor de  $3 \text{ k}\Omega$  "sobrecarrega" a tensão de saída  $v_1$ .  
Resposta:  $v_g/4, v_g/2$



EXERCÍCIO 3.4.3

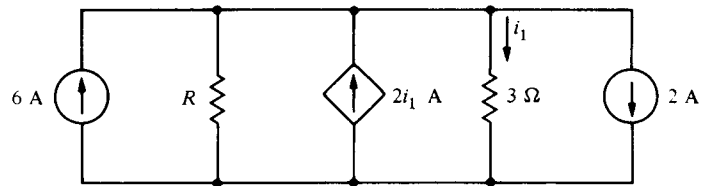
## PROBLEMAS

3.1 Encontre  $v_1$  e a potência entregue ao resistor de  $8 \Omega$ .



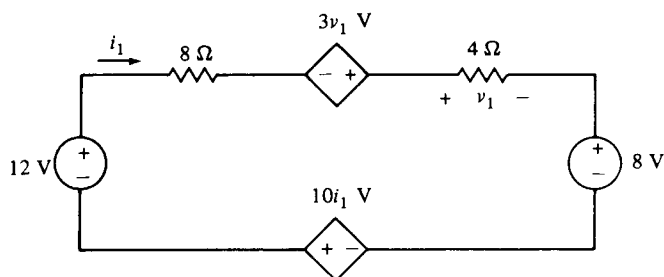
PROBLEMA 3.1

3.4 Calcule  $i_1$  se (a)  $R = 1 \Omega$  e (b)  $R = 9 \Omega$ .



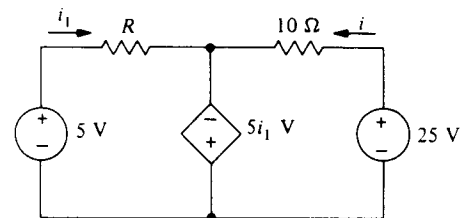
PROBLEMA 3.4

3.2 Calcule  $v_1$  e  $i_1$ .



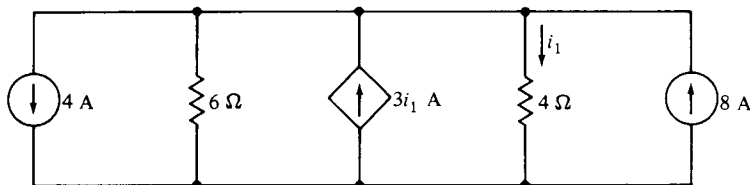
PROBLEMA 3.2

3.5 Calcule  $i$  se  $R = 6 \Omega$ .



PROBLEMA 3.5

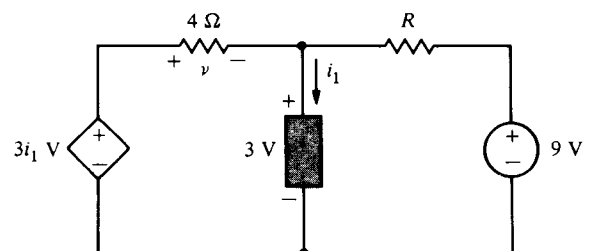
3.3 Calcule  $i_1$ .



PROBLEMA 3.3

3.6 Calcule o valor de  $R$  no Prob. 3.5, tal que  $i = 3 \text{ A}$ .

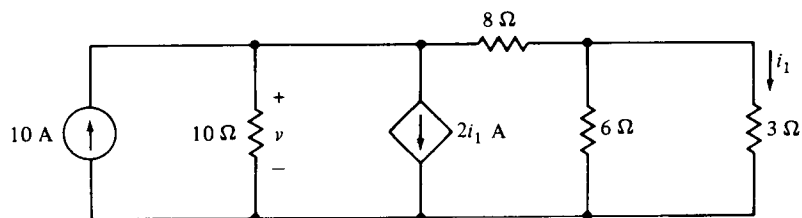
3.7 Calcule  $i_1$  e  $v$  se (a)  $R = 4 \Omega$  e (b)  $R = 12 \Omega$ .



PROBLEMA 3.7

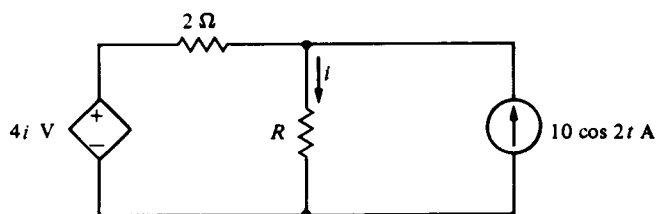


3.8 Calcule  $i_1$  e  $v$ .

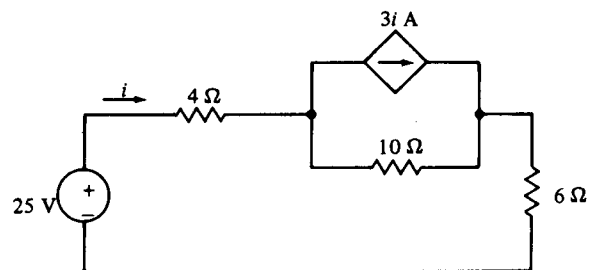


PROBLEMA 3.8

3.9 Calcule  $i$  e a resistência vista pela fonte independente de corrente se (a)  $R = 6 \Omega$  e (b)  $R = 1 \Omega$ .



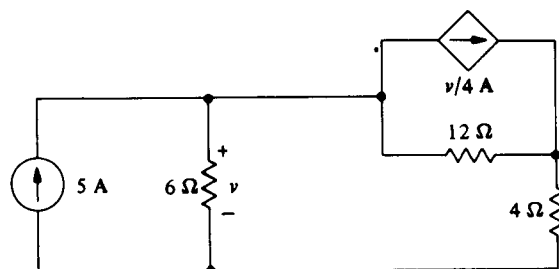
PROBLEMA 3.9



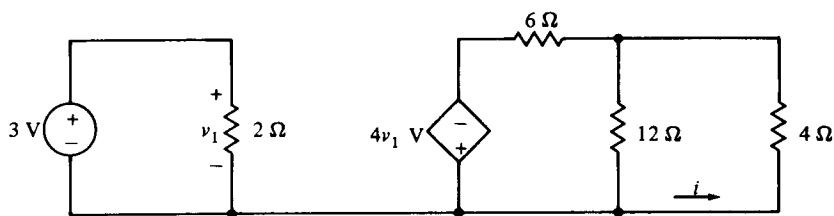
PROBLEMA 3.12

- 3.10 Calcule  $i$ .
- 3.11 Calcule  $v$ .
- 3.12 Calcule  $i$ .
- 3.13 Calcule  $v$ .
- 3.14 Mostre que

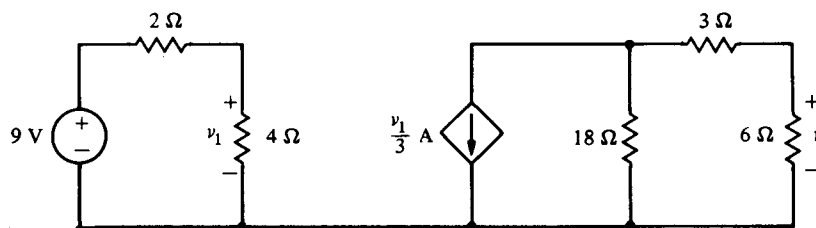
$$v_3 = -R_0 \left( \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} \right)$$



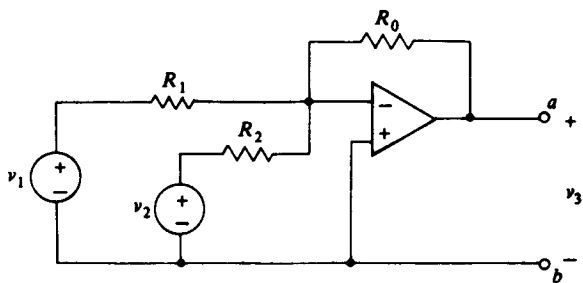
PROBLEMA 3.13



PROBLEMA 3.10



PROBLEMA 3.11



PROBLEMA 3.14

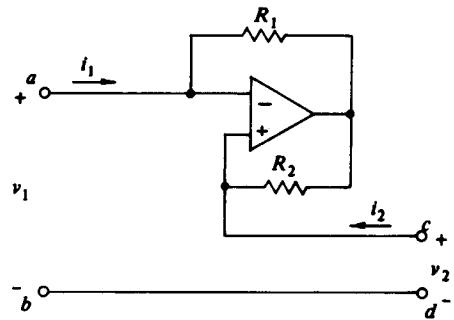
(Este circuito é chamado de *somador*, visto que a tensão de saída é o negativo da soma ponderada das tensões de entrada. Note que o resultado independe das conexões nos terminais de saída *a-b*).

- 3.15 (a) Na Figura do Prob. 3.14, considere que  $R_0 = 10 \text{ k}\Omega$  e encontre  $R_1$  e  $R_2$  tal que o módulo da tensão de saída  $v_3$  seja a média dos valores das tensões de entrada  $v_1$  e  $v_2$ .  
 (b) Calcule  $R_1$  se  $R_0 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $v_1 = 6 \text{ V}$ ,  $v_2 = 8 \text{ V}$  e a tensão de saída deve ser  $v_3 = -16 \text{ V}$ .

- 3.16 Mostre que independente do valor da carga, conectada aos terminais *c-d*, temos

$$v_1 = v_2$$

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1} i_2$$



PROBLEMA 3.16

- 3.17 Na Figura do Prob. 3.16, considere que  $R_1 = R_2$  e conecte um resistor  $R$  entre os terminais *c-d*. Mostre que a resistência vista dos terminais de entrada *a-b* é  $R_{ab} = -R$ . (A Figura do Prob. 3.16 então converte resistências positivas para resistências negativas.)

- 3.18 Empregue o método do Prob. 3.17 para construir uma resistência negativa de  $-6 \Omega$ , onde a potência dissipada em  $R_1$  é  $2 \text{ W}$  quando  $v_1 = 6 \text{ V}$ .

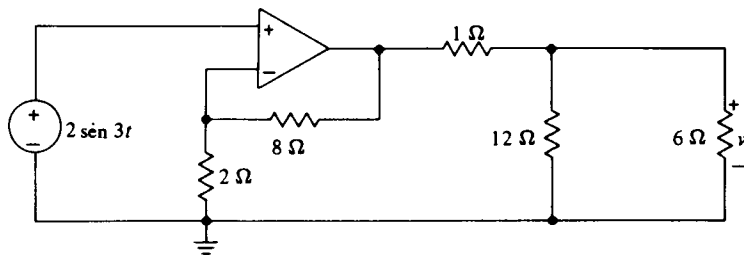
- 3.19 Calcule  $v$ .

- 3.20 Calcule  $i$ .

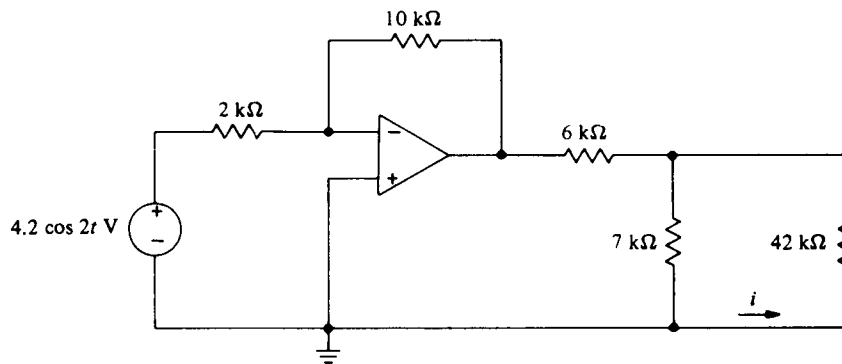
- 3.21 Calcule  $R$  tal que  $i = 0,5 \text{ A}$ .

- 3.22 Calcule  $v_0$ .

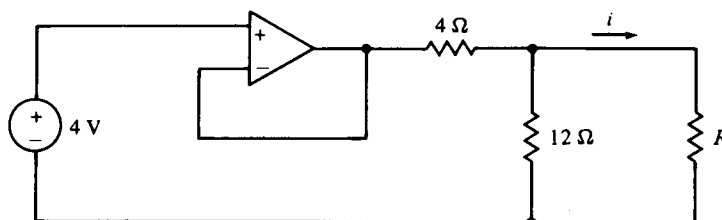
- 3.23 Calcule  $i$ .



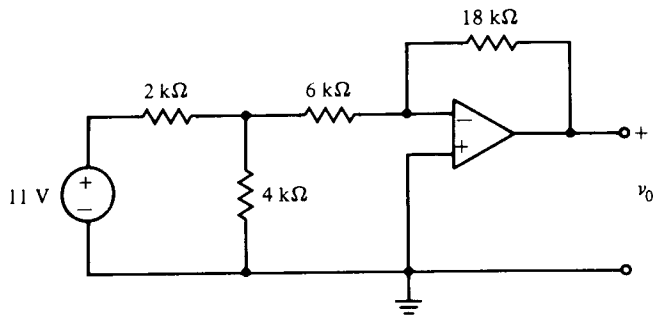
PROBLEMA 3.19



PROBLEMA 3.20

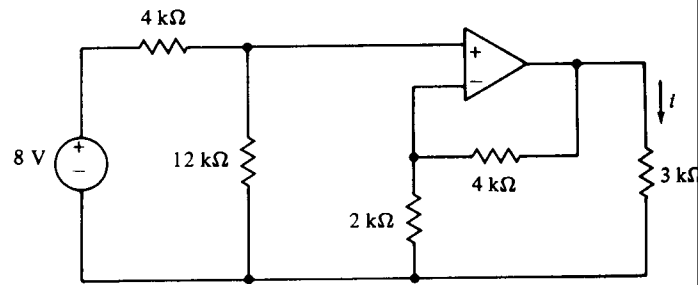


PROBLEMA 3.21

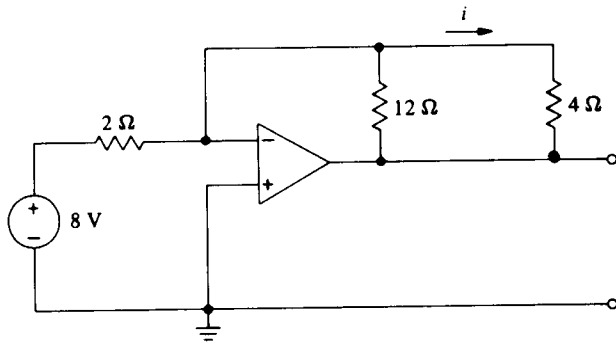


PROBLEMA 3.22

3.24 Calcule  $i$ .

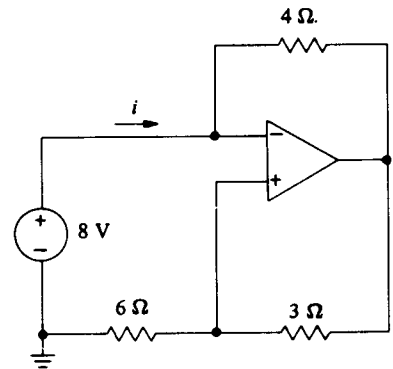


PROBLEMA 3.24



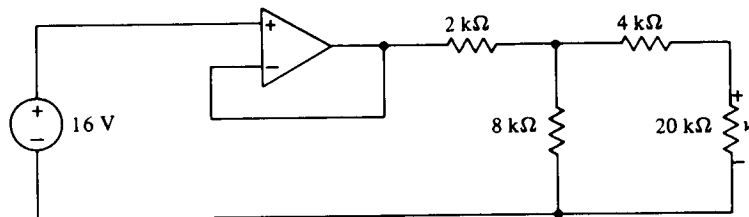
PROBLEMA 3.23

3.25 Calcule  $i$ .



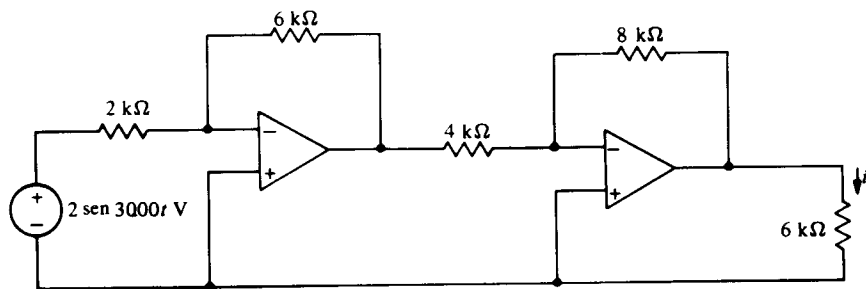
PROBLEMA 3.25

3.26 Calcule  $v$ .



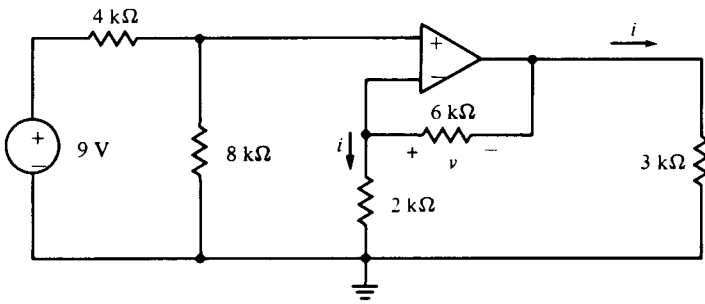
PROBLEMA 3.26

3.27 Calcule  $i$ .



PROBLEMA 3.27

3.28 Calcule  $v$  e  $i$ .



PROBLEMA 3.28

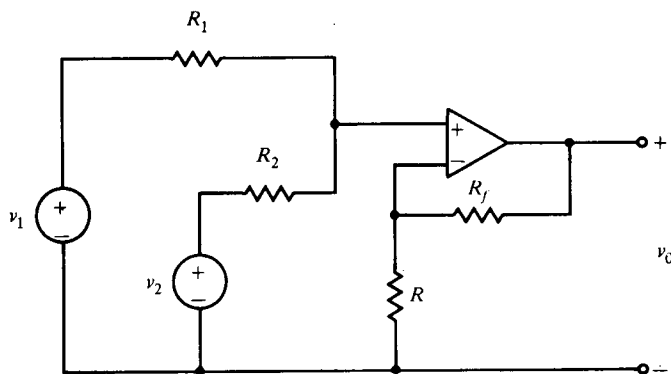
3.29 O somador do Prob. 3.14 é um somador *inversor*, visto que a tensão de saída é o negativo da soma ponderada das tensões de entrada. (a) Mostre que o circuito dado é um somador *não-inversor* (o sinal da saída não é trocado), com a tensão de saída

$$v_o = \mu \left( \frac{R_2 v_1 + R_1 v_2}{R_1 + R_2} \right)$$

onde

$$\mu = 1 + \frac{R_f}{R}$$

(b) use o resultado (a) para encontrar  $v_o$  se  $v_1 = 3$  V,  $v_2 = 2$  V,  $R_1 = 4$  kΩ,  $R_f = 6$  kΩ e  $R = 1$  kΩ.

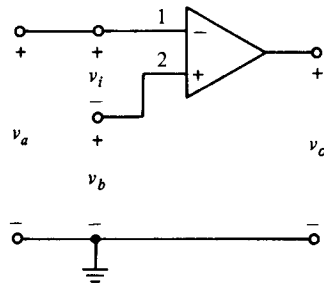


PROBLEMA 3.29

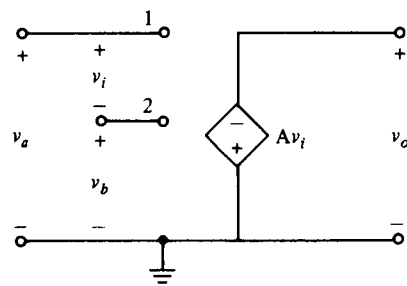
3.30 Se  $R_f = R_1 = 1$  kΩ no circuito do Prob. 3.29, calcule os valores dos demais resistores de forma que  $v_o = v_1 + v_2$ . (Note que o resultado é verdadeiro se  $R = R_f = R_1 = R_2$ .)

3.31 Um amp. op. *não-ideal* [mostrado em (a)] pode ser representado pelo modelo de (b), onde  $A$  é um ganho muito elevado, da ordem de  $10^5$ . Para amp. op de alta qualidade, o ganho deve ser muito maior, da ordem de  $10^8$  ou superior. (Um modelo mais sofisticado tem um resistor entre os terminais 1 e 2 em (b), de modo que as correntes de entrada não sejam exatamente zero. Esta resistência deve ser de valor muito elevado — ( $10^5$  a  $10^{15}$  Ω), que será representada como um circuito aberto.) Finalmente, como  $v_1 = v_o/A$  e  $A$  é extremamente elevado,  $v_1$  tende a zero. No caso ideal ( $A \rightarrow \infty$ )  $v_1 = 0$ , como bem sabemos. (a) Mostre que, para um amplificador não-ideal, o seguidor de tensão da Figura 3.13 tem a saída

$$v_2 = \frac{A v_1}{1 + A}$$



(a)



(b)

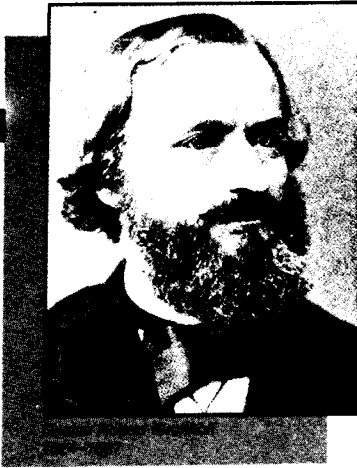
PROBLEMA 3.31

e então para o caso ideal,  $v_2 = v_1$  (b) Calcule  $v_2$  para casos em que  $A = 10^5, 100$  e  $1$ .

3.32 Se o amp. op. no inversor da Figura 3.14 é não-ideal, como no Prob. 3.31, mostre que

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{-A(R_2/R_1)}{A + 1 + (R_2/R_1)}$$

e então, no caso ideal ( $A \rightarrow \infty$ ), temos (3.10). Calcule  $v_2/v_1$  se  $R_2/R_1 = 2$  e  $A = 10^5, 100$  e  $1$ .



---

*Tem de haver uma história fundamental aqui [durante suas pesquisas com Bunsen]*

*Gustav Robert Kirchhoff*

---

## Métodos de Análise

A Lei de Ohm é fundamental para circuitos elétricos, mas mesmo para analisar o mais simples circuito, são necessárias duas leis adicionais formuladas em 1847 pelo físico alemão Gustav Robert Kirchhoff. Estas leis — lei de Kirchhoff das correntes e lei de Kirchhoff das tensões — são notáveis, considerando que o interesse principal de Kirchhoff residia em seu trabalho pioneiro em espectroscopia com o destacado químico alemão Robert Bunsen, a quem devemos o bico de Bunsen. Naquele campo, formulou outra lei: a lei da radiação de Kirchhoff.

Kirchhoff nasceu em Königsberg, leste da Prússia, filho de um advogado. Ingressou na Universidade de Königsberg aos 18 anos e graduou-se, com doutorado, 5 anos depois. Após a graduação, em 1847, desposou a filha de Friedrich Richelot, um de seus famosos professores de matemática, e ao mesmo tempo recebeu uma rara bolsa de viagem para complementar seus estudos em Paris. A agitação política que conduziu a uma onda de revoluções na Europa no ano de 1848 forçou-o a mudar seus planos e ele tornou-se um conferencista em Berlim. Dois anos mais tarde, Kirchhoff conhece Bunsen e os dois iniciam sua famosa colaboração. O grande sucesso de Kirchhoff em espectroscopia afastou a atenção de suas contribuições em outros ramos da física, mas sem suas leis elétricas não haveria a teoria de circuitos. ■

No Capítulo 2, consideramos os métodos de análise de circuitos simples, ou seja, aqueles que podem ser descritos por uma única equação. A análise de circuitos mais gerais acarreta a solução simultânea de um conjunto de equações, como veremos neste capítulo. Por exemplo, o leitor pode ter notado que o Problema 2.37 necessitou de duas equações para sua solução. Também, muitos dos circuitos do Capítulo 3 envolvem mais de uma equação, mas as equações são de um tipo de fácil solução.

Neste capítulo, consideraremos a formulação de métodos sistemáticos para equacionar e solucionar as equações que aparecem na análise de circuitos mais complicados. Consideraremos dois métodos gerais, um baseado originalmente na lei de Kirchhoff das correntes e outro na lei de Kirchhoff das tensões. Como veremos, geralmente a LKC conduz a equações cujas variáveis desconhecidas são tensões, enquanto LKT conduz a equações onde as variáveis desconhecidas são correntes.

Deve ter ficado evidente de nosso trabalho em capítulos anteriores que a análise completa de um circuito pode ser desenvolvida encontrando-se alguns poucos reatores chaves de tensão e de corrente. Por exemplo, em um circuito simples, constituído por um único laço, a variável-chave é a corrente, pois se conhecemos a corrente, podemos calcular todas as tensões do laço e, é claro, a corrente do laço é a corrente em todos os elementos.

Na Seç. 4.1 discutiremos o caso em que as grandezas desconhecidas são as tensões. Naturalmente, nossa escolha de tensões deve ser dirigida para o estabelecimento de um conjunto de equações independentes. Esta técnica será referida como análise *nodal*. Na Seç. 4.5 consideraremos a análise de *malha*, na qual as grandezas desconhecidas são as correntes.

Neste capítulo, discutiremos as técnicas para a escolha das grandezas a serem encontradas, tensão ou corrente, e a formulação das equações de circuitos. A justificativa dos métodos no caso geral será deixada para o Capítulo 6.

## 4.1

---

### Análise Nodal

Nesta seção consideraremos métodos de análise de circuitos nos quais tensões são as incógnitas a serem determinadas. Uma escolha conveniente de tensões para muitas redes é o conjunto de *tensões nodais*. Desde que uma tensão é definida como existindo entre dois nós, é conveniente escolher um nó na rede para ser o *nó de referência* ou *nó de dados* e então associar uma tensão ou um potencial com cada um dos outros nós. A tensão de cada nó de não-referência com relação ao nó de referência é definida como uma *tensão do nó*. É prática comum escolher as polaridades de um nó, de tal forma que as tensões de nós sejam positivas em relação ao nó de referência. Para um circuito contendo  $N$  nós, haverá  $N - 1$  tensões de nó, algumas das quais podem ser conhecidas, é claro, se fontes de tensão estão presentes.

Freqüentemente o nó de referência é escolhido como aquele onde o maior número de ramos está conectado. Muitos circuitos práticos são construídos sobre bases metálicas ou chassis e normalmente há um bom número de elementos conectados ao chassi, este, então, será uma escolha lógica para ser o nó de referência. Em muitos casos, como em sistemas elétricos de potência, o chassi é o próprio terra. Por causa disto, o nó de referência é freqüentemente chamado como terra. O nó de referência está, então, no potencial do terra ou no potencial zero e os outros nós podem ser considerados como em um potencial acima de zero.

Como nos circuitos as incógnitas são as tensões, as equações que os descrevem são obtidas aplicando-se a LKC aos nós. A corrente nos elementos é proporcional às tensões sobre os mesmos que são então ou uma tensão de nó (se um nó do elemento está aterrado) ou a diferença de potencial entre dois nós. Por exemplo, na Fig. 4.1 o nó de referência é o nó 3 com potencial zero ou do terra. O símbolo conectado ao nó 3 é o símbolo normalizado para terra, como indicado no Capítulo. 3. Os nós .1 e 2 têm tensões

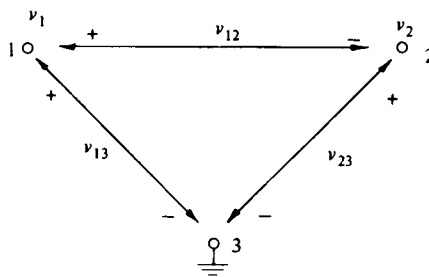


FIGURA 4.1 Nós de referência e de não-referência

de nó  $v_1$  e  $v_2$ . Então,  $v_{12}$ , com a polaridade mostrada, é

$$v_{12} = v_1 - v_2$$

As tensões nos outros elementos são

$$v_{13} = v_1 - 0 = v_1$$

e

$$v_{23} = v_2 - 0 = v_2$$

Estas equações podem ser estabelecidas, aplicando-se LKT ao longo dos laços (existentes ou imaginados). Evidentemente, se conhecemos todas as tensões dos nós, podemos encontrar as tensões de todos os elementos e, desta forma, as correntes em todos os elementos.

A aplicação da LKC a um nó resulta em uma *equação nodal*, isto é, uma equação relacionando tensões de nós. É claro que simplificações ao se escrever as equações resultantes são possíveis, quando o nó de referência é escolhido como um nó com um grande número de elementos a ele conectados. Como veremos, contudo, este não é o único critério para a seleção do nó de referência, mas é, com freqüência, o melhor.

Ao aplicarmos a LKC parece que as redes a serem consideradas como as mais simples são as que contêm somente fontes independentes de corrente. Isto nem sempre é verdade, como veremos, mas começaremos com um exemplo deste tipo. Na rede mostrada na Fig. 4.2.(a), três nós estão presentes, marcados e numerados como indicado [Isto é mais fácil de ver, na outra versão do desenho da Fig. 4.2.(b)]. Como existem quatro elementos conectados ao nó 3, este foi selecionado como o nó de referência, identificável pelo terra a ele conectado.

Antes de escrever as equações dos nós, considere o elemento mostrado na Fig. 4.3, onde  $v_1$  e  $v_2$  são tensões dos nós. A tensão do elemento  $v$  é dada por

$$v = v_1 - v_2$$

e pela Lei de Ohm temos

$$i = \frac{v}{R} = \frac{v_1 - v_2}{R}$$

ou

$$i = G(v_1 - v_2)$$

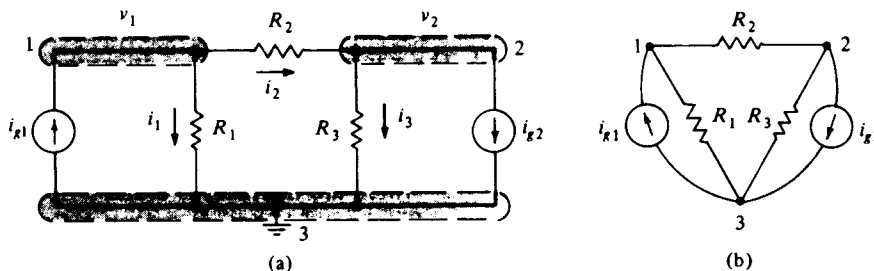


FIGURA 4.2 Circuito contendo fontes de corrente independentes.

onde  $G = 1/R$  é a condutância. Ou seja, a corrente que flui do nó 1 para o nó 2 é a diferença entre a *tensão de nó no nó 1* e a *tensão do nó no nó 2* dividida pela resistência  $R$ , ou multiplicada pela condutância  $G$ . Esta relação nos permitirá escrever rapidamente as equações de nós por inspeção direta em função das tensões dos nós.

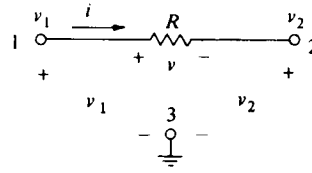


FIGURA 4.3 Elemento único

Agora, retornando ao circuito da Fig. 4.2, a soma das correntes que deixam o nó 1 tem que ser zero, e isto resulta na equação

$$i_1 + i_2 - i_{g1} = 0$$

Em termos das tensões de nó, esta equação fica

$$G_1 v_1 + G_2 (v_1 - v_2) - i_{g1} = 0$$

Poderíamos ter obtido esta equação diretamente, usando o procedimento descrito no parágrafo anterior. Aplicando a LKC ao nó 2, de maneira similar, obtemos

$$-i_2 + i_3 + i_{g2} = 0$$

ou

$$G_2 (v_2 - v_1) + G_3 v_2 + i_{g2} = 0$$

Novamente, os  $G$ 's são as condutâncias (recíprocas das  $R$ 's).

Poderíamos ter equacionado, de um lado, as correntes que deixam o nó e, do outro, as que entram no nó. Se tivéssemos feito isto, então, os termos de  $i_{g1}$  e  $i_{g2}$  que teriam aparecido do lado direito:

$$G_1 v_1 + G_2 (v_1 - v_2) = i_{g1}$$

$$G_2 (v_2 - v_1) + G_3 v_2 = -i_{g2}$$

Rearranjando estas duas equações, resulta

$$(G_1 + G_2) v_1 - G_2 v_2 = i_{g1} \quad (4.1)$$

$$-G_2 v_1 + (G_2 + G_3) v_2 = -i_{g2} \quad (4.2)$$

Estas equações exibem uma simetria que pode ser usada para escrever as equações da forma rearranjada por inspeção. Em (4.1) o coeficiente de  $v_1$  é a soma das condutâncias dos elementos conectados ao nó 1, enquanto o coeficiente de  $v_2$  é o valor negativo da condutância conectada entre os nós 1 e 2. O mesmo procedimento se verifica para (4.2) se os números 1 e 2 são trocados. Então, o nó 2 em (4.2) faz o mesmo papel do nó 1 em (4.1). Isto é, ele é o nó no qual a LKC foi aplicada. Em cada equação, o lado direito é a corrente de uma fonte de corrente que entra no nó correspondente.

Em geral, em redes contendo somente condutâncias e fontes de correntes, a LKC aplicada ao  $k$ -ésimo nó, com uma tensão de nó  $v_k$ , pode ser escrita como se segue. No lado esquerdo, o coeficiente das outras tensões de nó são os valores das condutâncias existentes entre esses outros nós e o nó  $k$ , com sinal negativo. O lado direito das equações consiste no conjunto de correntes fluindo para o nó  $k$  devido às fontes de corrente.

Para ilustrar este processo, considere a Fig. 4.4, que é uma parte de um circuito. As linhas tracejadas indicam as conexões para outros nós que não o nó 2 (rotulado de  $v_2$ ). No nó 2, temos, usando o processo simplificado

$$-G_1 v_1 + (G_1 + G_2 + G_3) v_2 - G_2 v_3 - G_3 v_4 = i_{g1} - i_{g2} \quad (4.3)$$

Isto pode ser verificado pela aplicação da LKC da forma usual, equacionando as correntes que deixam o nó 2 com aquelas que entram no nó 2. O resultado é

$$G_1 (v_2 - v_1) + G_2 (v_2 - v_3) + G_3 (v_2 - v_4) + i_{g2} = i_{g1}$$

O rearranjo deste resultado leva a (4.3).



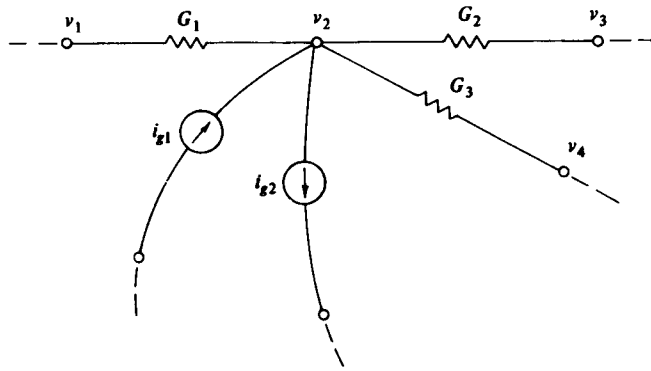


FIGURA 4.4 Parte de um circuito

Em geral, se existem  $N - 1$  tensões de nó desconhecidas, precisamos de  $N - 1$  equações, que podem ser escritas para os  $N - 1$  nós no circuito. Em um circuito como o da Fig. 4.2 podemos inclusive usar o nó de dados para uma das equações. Isto porque o nó de dados foi escolhido arbitrariamente e não existe corrente dentro do terra. (Não há percurso de retorno pelo terra, logo, não pode haver corrente.)

## 4.2 Um Exemplo

### EXEMPLO 4.1

Para ilustrar o método de análise nodal, vamos considerar o circuito da Fig. 4.5. Tomamos o nó de referência como mostrado e rotulamos os outros nós como  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ . Note que as condutâncias são especificadas para os resistores.

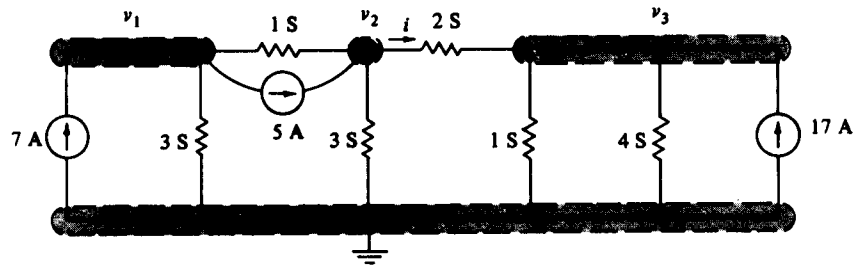


FIGURA 4.5 Exemplo de um circuito

Uma vez que são três os nós de não-referência, teremos três equações. No nó  $v_1$  usando o processo simplificado temos

$$4v_1 - v_2 = 2 \quad (4.4)$$

A soma das condutâncias no nó  $v_1$  é  $3 + 1 = 4$ , a condutância entre os nós 1 e 2 é 1, a condutância entre os nós 1 e 3 é 0, e a corrente total no nó através das fontes é  $7 - 5 = 2$ . Se tivéssemos usado a LKC (método convencional) em  $v_1$  teríamos obtido

$$1(v_1 - v_2) + 3v_1 + 5 = 7$$

que é equivalente a (4.4).  
Nos nós  $v_2$  e  $v_3$ , temos

$$\begin{aligned} -v_1 + 6v_2 - 2v_3 &= 5 \\ -2v_2 + 7v_3 &= 17 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Podemos resolver (4.4) e (4.5) para as tensões de nó usando um entre vários métodos para solução simultânea de equações. Dois desses métodos são a regra de Cramer, que emprega determinantes, e

a eliminação de Gauss. Para o leitor que não está acostumado com estes dois métodos, uma discussão completa é apresentada nos Apêndices A e B no final do livro.

Usando a regra de Cramer, primeiro encontramos o determinante de coeficientes, dado por

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 145$$

Então, temos

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & -2 \\ 17 & -2 & 7 \end{vmatrix}}{145} = \frac{145}{145} = 1 \text{ V}$$

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix}}{145} = \frac{290}{145} = 2 \text{ V}$$

e

$$v_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & 17 \end{vmatrix}}{145} = \frac{435}{145} = 3 \text{ V}$$

Agora que já temos as tensões dos nós, podemos realizar a análise completa do circuito. Por exemplo, se queremos o valor da corrente  $i$  no elemento de 2-S ela é dada por

$$i = 2(v_2 - v_3) = 2(2 - 3) = -2 \text{ A}$$

As Eqs. (4.4) e (4.5) são simétricas, numa forma que simplifica a escrita das equações. Esta simetria também está presente no caso geral. Por exemplo, o coeficiente de  $v_2$  na primeira equação é o mesmo de  $v_1$  na segunda equação. Também o coeficiente de  $v_3$  na primeira equação é o coeficiente de  $v_1$  na terceira equação. Finalmente, o coeficiente de  $v_3$  na segunda equação é o coeficiente de  $v_2$  na terceira equação. Estes resultados advêm do fato de que a condutância entre os nós 1 e 2 é a mesma entre 2 e 1, a condutância entre os nós 1 e 3 é a mesma que entre 3 e 1 etc.

Esta simetria também pode ser vista no determinante de coeficientes,  $\Delta$ . Os elementos da diagonal, 4, 6 e 7 são as somas das condutâncias conectadas nos três nós de não-referência e os elementos fora da diagonal são simétricos em relação à diagonal. Os últimos elementos são, sem dúvida, as condutâncias entre os nós, com sinal negativo.

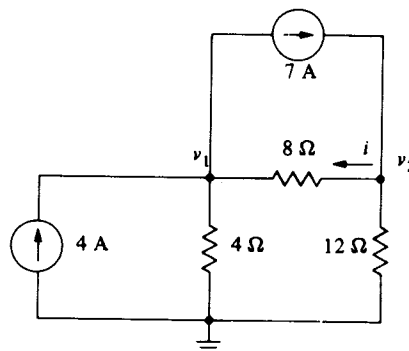
## EXERCÍCIOS

- 4.2.1** Usando a análise nodal, calcule  $v_1$  e  $v_2$  na Fig. 4.2(a) se  $R_1 = 4\Omega$ ,  $R_2 = 4\Omega$ ,  $R_3 = 8\Omega$ ,  $i_{g1} = 1 \text{ A}$  e  $i_{g2} = -2 \text{ A}$ .

Resposta: 7 V, 10 V

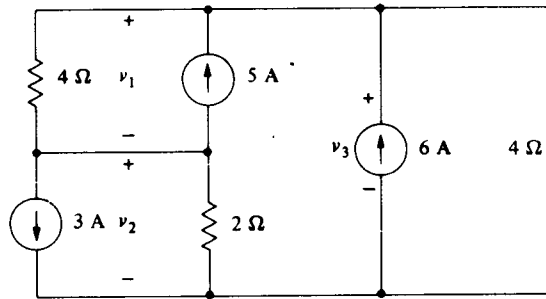
- 4.2.2** Usando a análise nodal, calcule  $v_1$ ,  $v_2$  e  $i$ .

Resposta: 4 V, 36 V, 4 A



EXERCÍCIO 4.2.2

**4.2.3** Usando a análise nodal, calcule  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ .  
 Resposta: 24, -4, 20 V



**EXERCÍCIO 4.2.3**

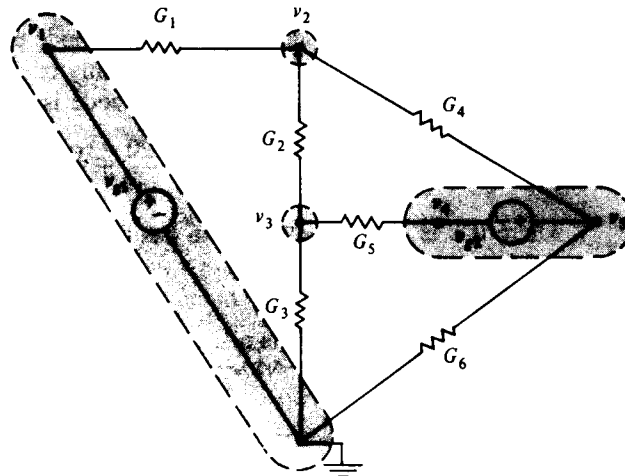
## 4.3

### Circuitos Contendo Fontes de Tensão

À primeira vista, pode parecer que a presença de fontes de tensão em um circuito complica a análise nodal. Não mais podemos escrever as equações empregando o processo simplificado, pois são desconhecidos os valores das correntes que fluem pelas fontes de tensão. Entretanto, a análise nodal não se torna mais complicada e em muitos casos, pode ser até mais fácil aplicá-la quando existem fontes de tensão, como veremos.

#### EXEMPLO 4.2

Para ilustrar o procedimento, vamos considerar o circuito da Fig. 4.6. Indicamos os nós de não-referência como  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $v_4$  e  $v_5$  e tomamos o sexto nó como o de referência, como mostrado. Novamente os resistores são representados por suas condutâncias.



**FIGURA 4.6** Circuito contendo fontes de tensão

Uma vez que existem cinco nós de não-referência, precisamos de cinco equações. Sem escrevermos qualquer equação através da LKC podemos notar, por inspeção, que

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{g1} \\ v_5 - v_4 &= v_{g2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Então, precisamos de somente três equações pela LKC. Para sistematizar e ao mesmo tempo eliminar a necessidade de conhecer os valores das correntes que fluem através das fontes de tensão, vamos então

envolver as fontes de tensão com linhas tracejadas, como mostrado na Fig. 4.6. Podemos pensar nestas superfícies como nós *generalizados* ou, como alguns autores preferem, *super* nós. Lembramos que a LKC se aplica para o nó generalizado do mesmo modo que para um nó normal. Temos, portanto, dois nós generalizados e dois nós normais, indicados como  $v_2$  e  $v_3$ , com um total de quatro nós. Então necessitamos de três equações pela LKC, que em conjunto com (4.6) constituem as cinco equações necessárias, em função das tensões de nós.

Para completar a formulação das equações dos nós, vamos aplicar a LKC aos nós  $v_2$  e  $v_3$  e ao nó generalizado que contém  $v_2$ . As duas primeiras são obtidas como anteriormente, resultando em

$$\begin{aligned}(G_1 + G_2 + G_4)v_2 - G_1v_1 - G_2v_3 - G_4v_5 &= 0 \\ (G_2 + G_3 + G_5)v_3 - G_2v_2 - G_5v_4 &= 0\end{aligned}\quad (4.7)$$

Finalmente, igualando a zero as correntes que deixam o nó generalizado temos

$$G_4(v_5 - v_2) + G_5(v_4 - v_3) + G_6v_5 = 0 \quad (4.8)$$

O circuito é analisado pela solução simultânea de (4.6), (4.7) e (4.8).

### EXEMPLO 4.3

Como um segundo exemplo, vamos encontrar  $v$  no circuito da Fig. 4.7(a). O nó inferior é tomado como o de referência e os de não-referência são denominados  $v$ ,  $v_1$  e  $v_2$ , como mostrado na Fig. 4.7 (b). Por inspeção, vemos que  $v_1 = v + 3$  e  $v_2 = 20$ , como indicado. Isto é, o nó  $v_1$  está 3 V acima do nó  $v$  e o nó  $v_2$  está 20 V acima do terra. Interpretando as duas fontes de tensão como nós generalizados, mostrado em tracejado, vemos que existem somente dois "nós", logo precisamos escrever somente uma equação de nó (em qualquer dos nós generalizados). É só o que é necessário, pois só existe uma grandeza desconhecida, a tensão do nó  $v$ . A equação nodal para o nó generalizado superior é

$$\frac{v + 3 - 20}{6} + \frac{v + 3}{2} + \frac{v}{4} = 6$$

onde, se  $v$  é dado em volts, todos os termos têm a unidade de miliampères. Resolvendo a equação tem-se  $v = 8$  V.

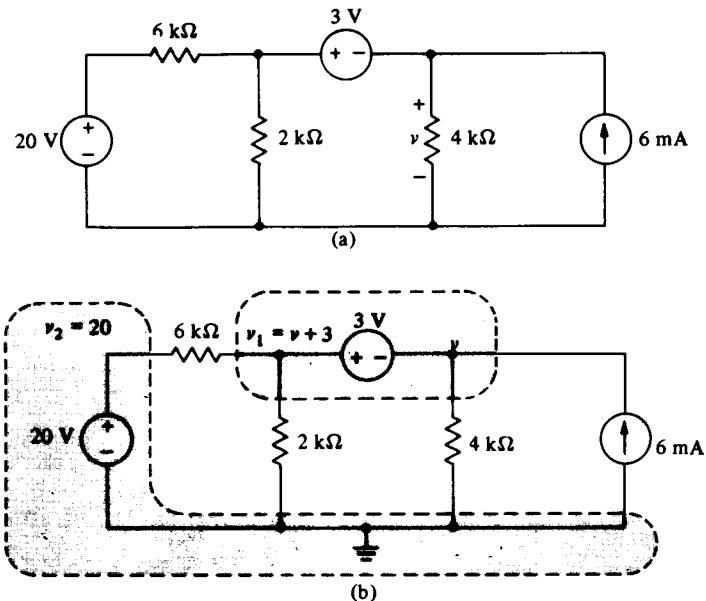


FIGURA 4.7 (a) Circuito contendo fontes de tensão e de corrente; (b) circuito redesenhado para mostrar as tensões de nó

### EXEMPLO 4.4

Como outro exemplo, consideremos o circuito da Fig. 4.8, que contém uma fonte independente de tensão e uma fonte dependente de corrente. Antecipando que a presença da fonte de tensão reduz o número de incógnitas para uma, chamamos o nó superior esquerdo de  $V_g$ , o nó de referência sendo escolhido como indicado. As tensões de nós desconhecidas são  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ . Aplicando a LKC a estes nós, temos

$$\begin{aligned}(G_1 + G_2 + G_3)v_1 - G_2v_2 - G_3v_3 - G_1v_g &= 0 \\ -G_2v_1 + (G_2 + G_5)v_2 + \beta(v_1 - v_3) &= 0 \\ -G_3v_1 + (G_3 + G_4)v_3 &= \beta(v_1 - v_3)\end{aligned}$$

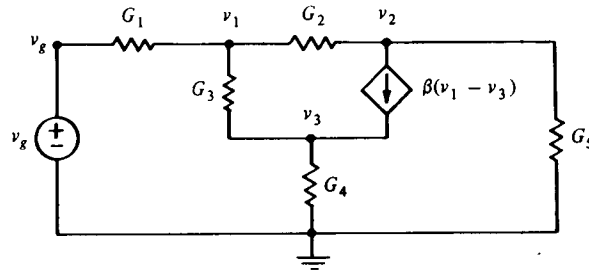


FIGURA 4.8 Circuito com fontes independentes e dependentes

Estas equações podem agora ser resolvidas para a tensão de nó desconhecida ( $v_g$  é considerada como conhecida). Note que a presença da fonte dependente acaba com a simetria que estava presente nas equações dos exemplos anteriores. Isto é verdade no caso geral, envolvendo fontes dependentes.

### EXEMPLO 4.5

Como um exemplo final, vamos calcular o valor de todas as correntes e tensões desconhecidas no circuito da Fig. 4.9, que contém fontes dependentes e independentes de corrente e de tensão. Para simplificar o assunto, escolhemos o nó de referência como mostrado e denominamos os demais nós como  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  e  $v_4$ . Antes de escrevermos qualquer equação de nó, devemos notar, a partir do circuito que

$$v_1 = 2$$

$$v_2 - v_3 = 3i_y$$

$$v_1 - v_4 = v_x$$

e, pela Lei de Ohm

$$v_2 = -2i_y$$

Destes resultados, temos

$$v_1 = 2$$

$$v_2 = -2i_y$$

$$v_3 = v_2 - 3i_y = -5i_y$$

$$v_4 = v_1 - v_x = 2 - v_x$$

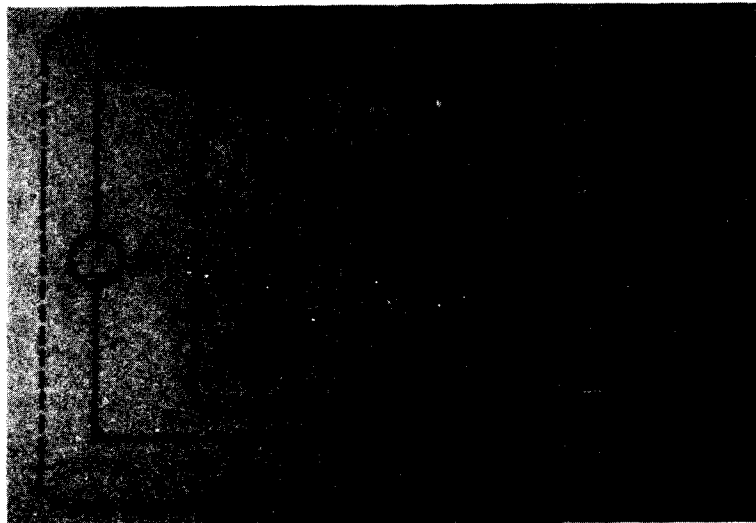


FIGURA 4.9 Circuito mais complexo

e assim as tensões dos nós podem ser expressas em termos de apenas duas incógnitas  $v_x$  e  $i_y$ . Portanto, precisamos somente de mais duas equações. Desde que temos três nós, o normal e os dois generalizados, em tracejado, duas equações independentes de nós são exatamente o que temos. No nó  $v_4$  temos que temos. No nó  $v_4$  temos

$$-\frac{v_x}{2} + 9 + \frac{v_4 - v_3}{1} = 0$$

e no nó generalizado, que contém a fonte de tensão dependente, temos

$$\frac{v_2 - v_1}{1} - i_y - 2v_x + \frac{v_3 - v_4}{1} = 0$$

Substituindo pelas tensões dos nós,

$$-\frac{v_x}{2} + 9 + \frac{2 - v_x - (-5i_y)}{1} = 0$$

$$\frac{-2i_y - 2}{1} - i_y - 2v_x + \frac{-5i_y - (2 - v_x)}{1} = 0$$

Estas equações podem ser simplificadas em

$$-3v_x + 10i_y = -22$$

$$-v_x - 8i_y = 4$$

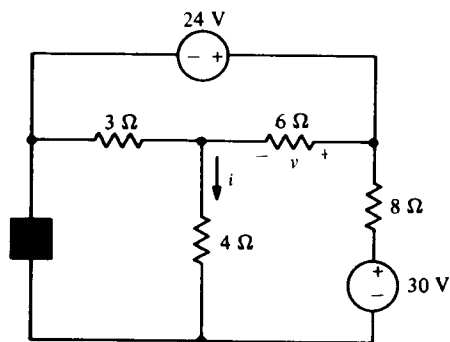
que tem a solução

$$v_x = 4 \text{ V}, \quad i_y = -1 \text{ A}$$

Podemos encontrar agora todas as tensões e correntes no circuito.

## EXERCÍCIOS

- 4.3.1** Usando análise nodal, calcule  $v$ , se o elemento  $x$  é uma fonte independente de tensão de 4 V com o terminal positivo na parte superior.  
Resposta: 20 V



EXERCÍCIO 4.3.1

- 4.3.2** Calcule  $v$  no Ex. 4.3.1 se o elemento  $x$  é uma fonte independente de corrente de 7-A apontando para cima.  
Resposta: 26 V
- 4.3.3** Calcule  $v$  no Ex. 4.3.1, se o elemento  $x$  é uma fonte de tensão dependente de  $5i$  V com o terminal positivo na parte superior.  
Resposta: 32 V

## Circuito Contendo AMP-OP'S

A análise nodal, na maioria das vezes, é o melhor método de análise quando um circuito contém amp. op's, porque em um circuito eletrônico o nó de referência é normalmente mostrado como no potencial do terra e os outros elementos conectados ao nó de referência são freqüentemente representados com um aterramento individual. Assim, os nós são facilmente identificáveis para o método nodal, mas os laços não são tão fáceis de identificar. Portanto, um método baseado em laços, como veremos na próxima seção, não é tão facilmente aplicável. Também, freqüentemente é necessário apenas um número relativamente pequeno de equações nodais.

### EXEMPLO 4.6

Como um exemplo, consideremos a FTCT da Fig. 3.11, redesenhada como é mostrado na Fig. 4.10. O nó de referência é mostrado como aterrado, de tal forma que as tensões  $v_1$  e  $v_2$  da Fig. 3.11 são agora tensões de nó, como indicado. Uma vez que a tensão entre os terminais de entrada do amp. op é zero e as correntes nos terminais de entrada também são zero, vemos que  $v_3 = v_1$  e que a equação de nó escrita no nó  $v_3$  é

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0 \quad (4.9)$$

Da qual encontramos

$$v_2 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v_1 = \mu v_1 \quad (4.10)$$

que é o resultado encontrado anteriormente na Seq. 3.4.

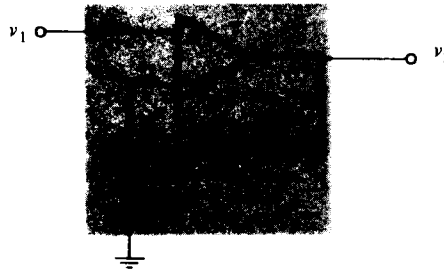


FIGURA 4.10 FTCT

### EXEMPLO 4.7

Como outro exemplo, vamos agora analisar o circuito da Fig. 4.11. Adotaremos o terra para o ponto de referência de tensão igual a zero, tal que o terminal inversor de entrada do amp. op. também está no potencial zero. Iremos considerar  $v_1$  como sendo a tensão de entrada conhecida e resolver a tensão de saída  $v_2$ . No nó  $v_3$ , aplicando-se a LKC, temos

$$(G_1 + G_2 + G_3 + G_4)v_3 - G_1v_1 - G_4v_2 = 0$$

usando o processo simplificado da Seq. 4.1. A soma das correntes que entram no nó ligado ao terminal inversor de entrada do amp. op é dada por

$$G_3v_3 + G_5v_2 = 0$$

Eliminando  $v_3$  destas duas equações, resulta

$$(G_1 + G_2 + G_3 + G_4)\left(-\frac{G_5v_2}{G_3}\right) - G_1v_1 - G_4v_2 = 0$$

da qual temos

$$v_2 = \frac{-G_1G_3v_1}{G_5(G_1 + G_2 + G_3 + G_4) + G_3G_4}$$

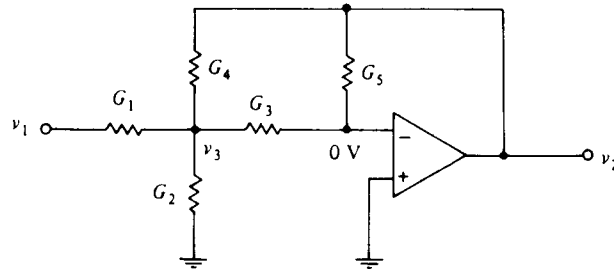
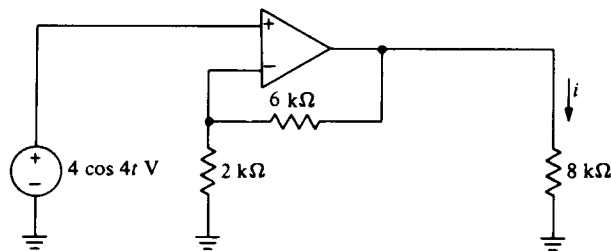


FIGURA 4.11 Circuito contendo um amp. op.

É sempre útil escrever equações nodais no terminal inversor da entrada de um amp-op., como fizemos neste exemplo. Contudo, é sempre bom evitar escrever a tensão de nó na saída dos amp. op's, pois é difícil encontrar o valor da corrente de saída de um amp. op. Não existem correntes nos terminais de entrada, mas, como existem outros terminais não mostrados, o terminal de saída terá uma corrente. Também, como observado no Capítulo 3, quando amp. op's. estão presentes, o nó do terra não é arbitrário, e, por causa destes terminais desconhecidos, pode haver circulação de corrente para terra. Desta forma, também devemos evitar escrever equações de nó no nó do terra.

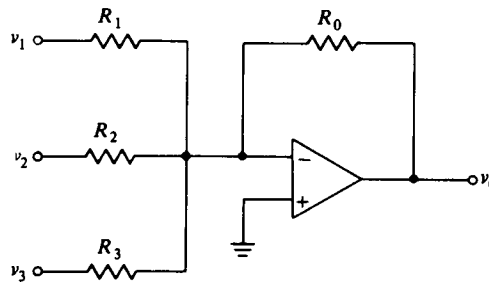
## EXERCÍCIOS

- 4.4.1 Calcule  $i$ .  
Resposta:  $2 \cos 4t$  mA



EXERCÍCIO 4.4.1

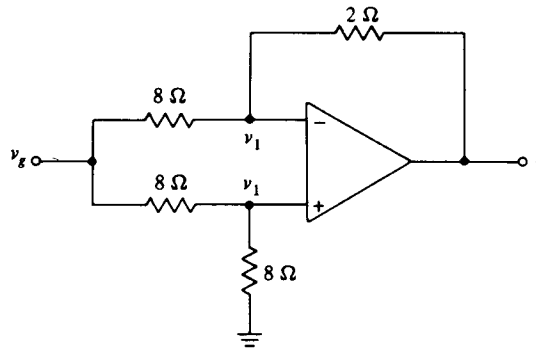
- 4.4.2 Calcule  $v_0$  em termos das tensões de nó  $v_1$ ,  $v_2$ , e  $v_3$  e das resistências. (Este circuito é um somador, como o do Prob. 3.14, com uma fonte de tensão adicional.)  
Resposta:  $-R_0(v_1/R_1 + v_2/R_2 + v_3/R_3)$



EXERCÍCIO 4.4.2

- 4.4.3 Calcule  $v$ , se  $v_g = 8 \cos 2t$  V. (Sugestão: Note que os terminais de entrada do amp. op. têm a mesma tensão de nó  $v_1$ , como indicado.)  
Resposta:  $3 \cos 2t$  V





EXERCÍCIO 4.4.3

## 4.5 Análise de Malhas

Na análise nodal das seções anteriores, aplicávamos a LKC aos nós de não-referência do circuito. Agora, vamos considerar um método, conhecido como *análise de malhas* ou *análise de laços*, no qual se aplica a LKT em volta de um percurso fechado do circuito. Como veremos, neste caso, as incógnitas normalmente serão as correntes.

Neste capítulo, vamos nos restringir a circuitos *planares*, que são os que podem ser desenhados em uma superfície plana sem que nenhum elemento cruze com outro elemento. Neste caso, o plano é dividido pelos elementos em áreas distintas, da mesma forma que partes de metais e madeiras numa janela definem os painéis da mesma. O contorno fechado de cada área é chamado de *malha* do circuito. Então, a malha é um caso especial de um laço, que nós consideramos como sendo o percurso fechado de elementos no circuito que não passa mais de uma vez sobre um nó ou um elemento. Em outras palavras, uma malha é um laço que não contém elementos dentro de si.

### EXEMPLO 4.8

Como um exemplo, o circuito da Fig. 4.12 é planar e contém três malhas identificadas pelas setas. A malha 1 contém os elementos  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  e  $v_{g1}$ ; a malha 2 contém  $R_2$ ,  $R_4$ ,  $v_{g2}$  e  $R_5$ ; e a malha 3 contém  $R_5$ ,  $v_{g2}$ ,  $R_6$  e  $R_3$ .

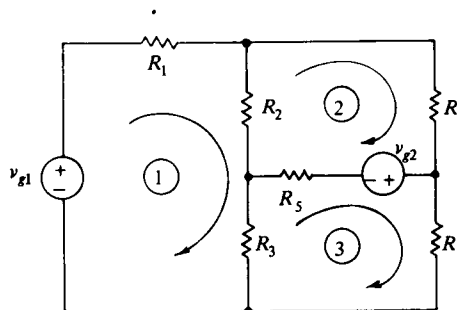


FIGURA 4.12 Circuito planar com três malhas

No caso de circuitos não planares (isto é, aqueles que não são planares), não podemos definir malhas. Assim, na análise usando a LKT, os percursos fechados são laços. O procedimento é o mesmo, sem dúvida, mas as equações não são facilmente formuláveis. Abordaremos com detalhes este caso mais genérico no Capítulo 6.

### EXEMPLO 4.9

Como um exemplo de aplicação da LKT vamos considerar o circuito de duas malhas da Fig. 4.13. As correntes nos elementos são  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ . Aplicando a LKT em volta da primeira malha (contendo  $v_{g1}$ ) temos

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 = v_{g1} \quad (4.11)$$

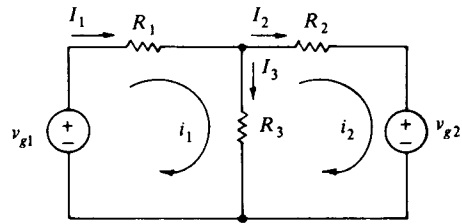


FIGURA 4.13 Circuito com duas malhas

Da mesma forma, em volta da outra malha, temos

$$R_2 I_2 - R_3 I_3 = -v_{g2} \quad (4.12)$$

Definimos uma *corrente de malha* como a corrente que flui ao redor de uma malha. A corrente de malha pode ser a corrente total que flui por um elemento da malha, ou somente parte da corrente que percorre o elemento. Por exemplo, na Fig. 4.13, as correntes  $i_1$  e  $i_2$  são correntes de malha, com os sentidos indicados. As correntes nos elementos  $R_1$  e  $R_2$  são as correntes de malha, mas em  $R_3$  a corrente é a composição das duas correntes de malha.

Em geral, a corrente através de um elemento é a soma algébrica das correntes de malha. Isto é ilustrado na Fig. 4.13, pois a corrente no elemento  $R_1$  é

$$I_1 = i_1$$

a corrente em  $R_2$  é

$$I_2 = i_2$$

e a corrente em  $R_3$ , pela LKC é

$$I_3 = I_1 - I_2 = i_1 - i_2$$

Usando estes resultados, podemos escrever (4.11) e (4.12) como

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + R_3(i_1 - i_2) &= v_{g1} \\ R_2 i_2 - R_3(i_1 - i_2) &= -v_{g2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Estas são as *equações de malha* do circuito.

Existe também um processo simplificado para escrever as equações de malha, que é similar ao processo nodal simplificado da Seção 4.1. Reorganizando (4.13) na forma

$$\begin{aligned} (R_1 + R_3)i_1 - R_3 i_2 &= v_{g1} \\ -R_3 i_1 + (R_2 + R_3)i_2 &= -v_{g2} \end{aligned}$$

notamos que, na primeira equação, correspondente à primeira malha, o coeficiente da primeira corrente é a soma das resistências da primeira malha, e o coeficiente de qualquer outra corrente de malha é o valor negativo da resistência comum a primeira e a esta malha. O membro da direita da primeira equação é a soma algébrica das fontes de tensão que produzem a corrente da primeira malha, na sua direção indicada. Trocando a palavra *primeira* pela palavra *segunda* em todos os locais onde aparecem nas duas últimas sentenças, escreveremos a segunda equação, e assim por diante. Este procedimento simplificado é uma consequência da escolha de todas as correntes de malhas no mesmo sentido (sentido horário na Fig. 4.13) e escrevendo a LKT quando as malhas são percorridas no sentido das correntes. Certamente, o método só se aplica quando nenhuma fonte está presente, exceto fontes de tensão independentes.

## EXEMPLO 4.10

Como outro exemplo, vamos retornar à Fig. 4.12 e definir  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  como as correntes de malhas indicadas nas malhas, 1, 2 e 3, respectivamente. Então, aplicando o processo simplificado na malha 1, temos

$$(R_1 + R_2 + R_3)i_1 - R_2 i_2 - R_3 i_3 = v_{g1}$$

Este resultado pode ser verificado pela aplicação da LKT à malha 1, do que resulta

$$R_1 i_1 + R_2(i_1 - i_2) + R_3(i_1 - i_3) = v_{g1}$$

Os dois resultados são evidentemente idênticos.

Aplicando a LKT às malhas 2 e 3, teremos, da mesma forma,

$$\begin{aligned} -R_2 i_1 + (R_2 + R_4 + R_5) i_2 - R_5 i_3 &= -v_{g2} \\ -R_3 i_1 - R_5 i_2 + (R_3 + R_5 + R_6) i_3 &= v_{g2} \end{aligned}$$

A análise é completada pela solução das três equações de malha para as correntes de malha.

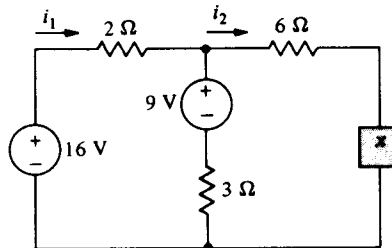
A mesma simetria notada nas equações nodais está presente nas equações de malha. Se a regra de Cramer for usada na solução para as correntes, então o determinante de coeficientes a ser calculado é

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_2 & -R_3 \\ -R_2 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ -R_3 & -R_5 & R_3 + R_5 + R_6 \end{vmatrix}$$

Os elementos da diagonal são as somas das resistências nas malhas e os elementos fora da diagonal são as resistências comuns às malhas, correspondendo às linhas e colunas do determinante, com sinal negativo. Isto é,  $-R_2$  na linha 1, coluna 2 ou na linha 2, coluna 1 é o negativo das resistências comuns às malhas 1 e 2 etc. Então, o determinante é simétrico em relação à sua diagonal. Naturalmente, esta simetria deixará de existir se fontes dependentes estiverem presentes no circuito.

## EXERCÍCIOS

- 4.5.1** Usando a análise de malhas, calcule  $i_1$  e  $i_2$  na Fig. 4.13 se  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 4\Omega$ ,  $R_3 = 3\Omega$ ,  $v_{g1} = 9\text{ V}$  e  $v_{g2} = -5\text{ V}$ .  
*Resposta:* 3 A, 2 A
- 4.5.2** Repita o Exerc. 4.5.1 com  $R_1 = 1\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $R_3 = 4\Omega$ ,  $v_{g1} = 21\text{ V}$  e  $v_{g2} = 0$ . Verifique os resultados empregando resistência equivalente e divisão de corrente.  
*Resposta:* 9 A, 6 A
- 4.5.3** Usando análise de malhas, encontre  $i_1$  e  $i_2$  se o elemento  $x$  é uma fonte de tensão independente de 6 V, com o terminal positivo na parte superior.  
*Resposta:* 2 A, 1 A



EXERCÍCIO 4.5.3

- 4.5.4** Repita o Exerc. 4.5.3, se o elemento  $x$  é uma fonte de tensão dependente com  $6i_1\text{ V}$ , com o terminal positivo situado abaixo.  
*Resposta:* 5 A, 6 A

## 4.6

### Circuitos Contendo Fontes de Corrente

Como no caso de análise nodal de um circuito com fontes de tensão, a análise de malhas é mais fácil se presentes fontes de corrente. Para ilustrar este ponto, vamos considerar o circuito da Fig. 4.14(a) que tem duas fontes de corrente e uma de tensão. Com as correntes de malha  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  escolhidas como indicado, é claro que necessitamos de três equações independentes. Entretanto, nem todas estas precisam

ser equações de malha. A presença de duas fontes de corrente nos dá duas restrições que podem ser obtidas por inspeção:

$$\begin{aligned} i_2 &= -i_{g1} \\ i_3 - i_1 &= i_{g2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Portanto, só necessitamos de mais uma equação. Desde que ela terá que vir da LKT, precisamos selecionar um percurso fechado no qual todas as tensões sejam facilmente obtidas. Isto é, devemos evitar as fontes de corrente visto que suas tensões não são facilmente encontradas.

Se imaginarmos por um instante que as duas fontes de corrente são removidas, isto é, abertas, então teremos duas malhas a menos. Mas já temos duas equações, então ainda existem malhas suficientes para o número de equações necessário. Além disto, os laços que sobram (eles não podem ser malhas) terão somente resistores e fontes de tensão e, portanto, a LKT é facilmente aplicável. Ressalte que não estamos retirando as fontes de corrente. Apenas as imaginamos fora por um instante para *localizar* os laços onde a LKT será aplicada.

Retornando à Fig. 4.14(a) e imaginando por um momento que as fontes de corrente estejam abertas, observaremos que temos apenas uma malha, a saber, a malha que contém  $v_{g3}$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ . Aplicando a LKT a esta malha, temos a nossa terceira equação

$$R_1(i_1 - i_2) + R_2(i_3 - i_2) + R_3i_3 = v_{g3} \quad (4.15)$$

A análise do circuito pode agora ser completada pela solução de (4.14) e (4.15).

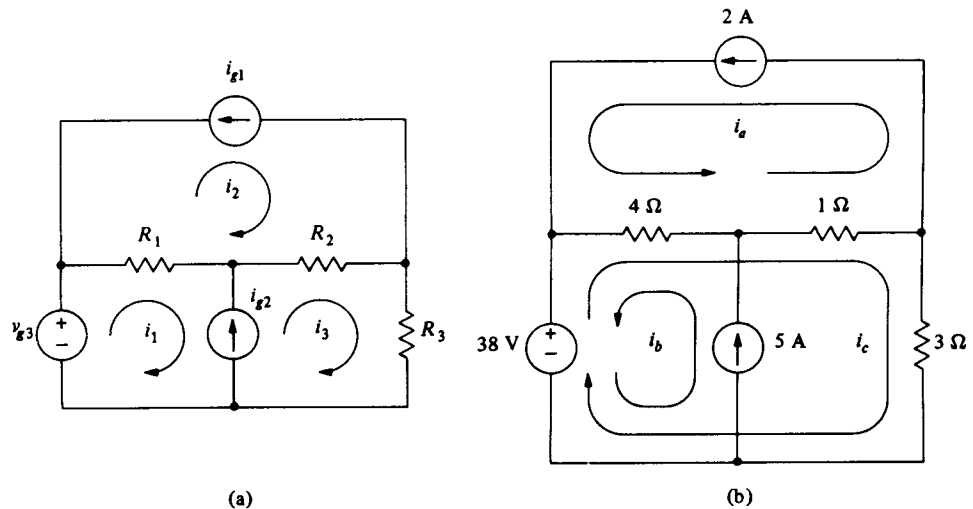


FIGURA 4.14 Circuito com duas fontes de corrente e uma de tensão

### EXEMPLO 4.11

Como um exemplo, vamos completar a análise da Fig. 4.14(a) se  $R_1 = 4\Omega$ ,  $R_2 = 1\Omega$ ,  $R_3 = 3\Omega$ ,  $i_{g1} = 2\text{A}$ ,  $i_{g2} = 5\text{A}$ , e  $v_{g3} = 38\text{V}$ . Das Eqs. (4.14) e (4.15) vem

$$\begin{aligned} i_2 &= -2 \\ i_3 - i_1 &= 5 \\ 4(i_1 - i_2) + 1(i_3 - i_2) + 3i_3 &= 38 \end{aligned}$$

de onde se obtém  $i_1 = 1$ ,  $i_2 = -2$ , e  $i_3 = 6\text{A}$ .

Neste exemplo, podemos simplificar o processo pelo uso de correntes de laço, em vez de correntes de malha. Suponha que o problema é encontrar a corrente que desce sobre  $R_3$ , que é evidente,  $i_3 = 6\text{A}$ . Vamos usar as correntes de laço  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$ , como na Fig. 4.14 (b), onde  $i_c$  é agora a corrente que desce sobre  $R_3 = 3\Omega$ , e nos será útil tomar somente uma corrente de laço, que é a mesma da fonte de corrente. Por inspeção temos

$$\begin{aligned} i_a &= 2 \\ i_b &= 5 \end{aligned}$$

e pela LKT em volta do laço de  $i_c$

$$4(i_a - i_b + i_c) + 1(i_a + i_c) + 3i_c = 38$$

ou

$$4(2 - 5 + i_c) + 1(2 + i_c) + 3i_c = 38$$

Resolvendo esta equação, temos  $i_c = 6$  A, como anteriormente.

### EXEMPLO 4.12

Como exemplo final, vamos aplicar a análise de laços ao circuito da Fig. 4.9, que já foi analisado anteriormente pelo método nodal. O novo desenho do circuito é apresentado na Fig. 4.15. Existem quatro malhas e duas restrições que devem ser satisfeitas pelas variáveis de controle  $v_x$  e  $i_y$ . Portanto, precisaremos de seis equações.

Podemos escolher as correntes de malha e obter suas relações com as duas fontes de corrente, como fizemos anteriormente na Fig. 4.14(a). Contudo, para melhor ilustrar o uso das correntes de laço e também para simplificar as equações resultantes, escolhemos  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  e  $i_4$ , como as incógnitas de corrente, como mostrado no circuito. Esta seleção resulta em uma corrente de laço único através das fontes de corrente e através do elemento cuja corrente controla a fonte dependente. Então as restrições são simples equações. Antes de aplicarmos a LKT, podemos escrever, por inspeção do circuito,

$$i_1 = 9$$

$$i_2 = 2v_x$$

$$i_3 = i_y$$

$$2(i_1 + i_4) = v_x$$

Destes resultados, podemos expressar todas as correntes de laço em termos de  $v_x$  e  $i_y$ . O resultado é

$$i_1 = 9$$

$$i_2 = 2v_x$$

$$i_3 = i_y$$

$$i_4 = \frac{v_x}{2} - 9$$

(4.16)

Até agora ainda não escrevemos uma única equação de laço. Precisamos de mais duas equações, já que são duas as incógnitas  $v_x$  e  $i_y$ . Imaginando, por um instante, que as fontes de corrente estão abertas,

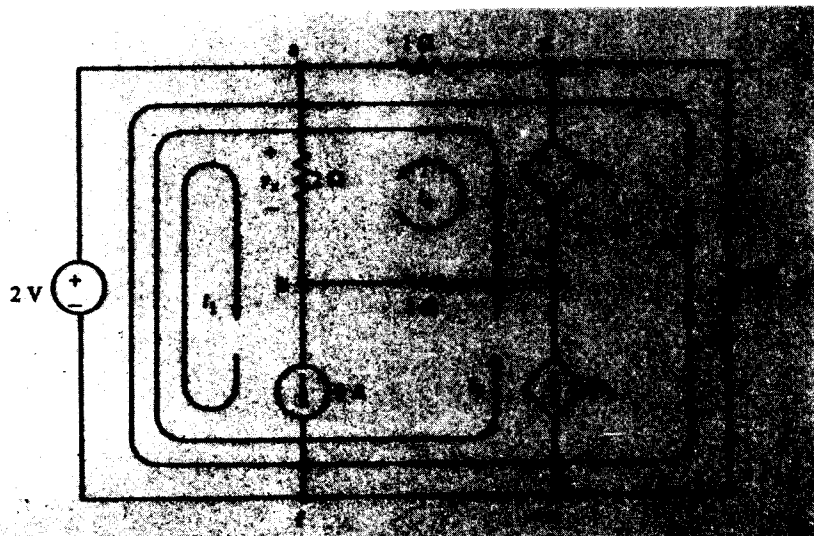


FIGURA 4.15 Circuito mais complexo

vemos dois laços nos quais podemos aplicar a LKT. Eles são *abcd* e *afeda*. As respectivas equações de laço são

$$\begin{aligned}v_x + 1(i_4) - 3i_y + 1(i_2 + i_3 + i_4) &= 0 \\2 + 2i_3 + 1(i_2 + i_3 + i_4) &= 0\end{aligned}$$

Substituindo (4.16) nestas equações, temos

$$\begin{aligned}4v_x - 2i_y &= 18 \\ \frac{5v_x}{2} + 3i_y &= 7\end{aligned}$$

A solução é dada por

$$v_x = 4 \text{ V}, \quad i_y = -1 \text{ A}$$

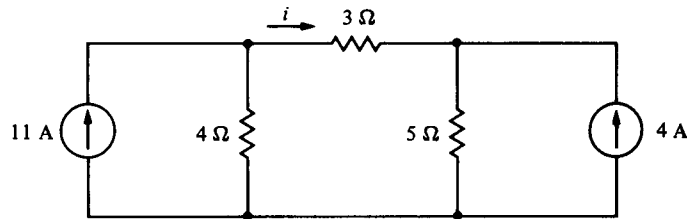
que confirma o resultado encontrado anteriormente na Seç. 4.3.

As correntes de laço podem ser agora calculadas de (4.16), completando a análise. Qualquer outra corrente ou tensão no circuito pode também ser facilmente obtida.

Em geral, antes de se analisar algum circuito, deve-se levantar quantas equações são necessárias na análise nodal e na análise por laços e empregar o método mais simples. É claro que no último exemplo a análise nodal feita anteriormente foi a mais simples.

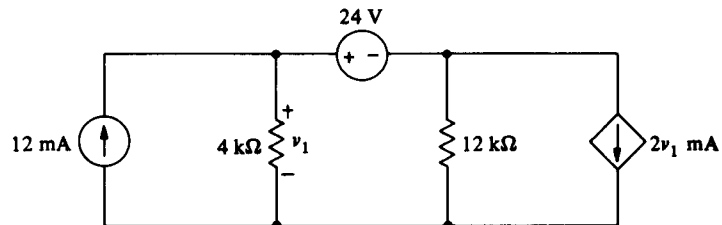
## EXERCÍCIOS

- 4.6.1** Usando a análise de malhas, calcule  $i$ .  
Resposta: 2 A



EXERCÍCIO 4.6.1

- 4.6.2** Usando a análise de malhas, calcule  $v_1$ .  
Resposta: 6 V



EXERCÍCIO 4.6.2

- 4.6.3** Na Fig. 4.14(a), considere  $R_1 = 4\Omega$ ,  $R_2 = 6\Omega$ ,  $R_3 = 2\Omega$ ,  $i_{g1} = 4 \text{ A}$ ,  $i_{g2} = 6 \text{ A}$  e  $v_{g3} = 52 \text{ V}$ . Mantendo  $i_2$  e  $i_3$  como indicado e trocando  $i_1$  para uma corrente de laço no sentido horário que passa através de  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  e  $v_{g3}$ , empregue a análise de laço para encontrar a potência entregue a  $R_3$ . (Note que neste caso a corrente em  $R_3$  é  $i_1 + i_3$ .)  
Resposta: 18 W

## Dualidade

O leitor pode ter notado uma similaridade em certos pares de equações de redes. Por exemplo, a lei de Ohm pode ser escrita como

$$v = Ri \quad (4.17)$$

ou

$$i = Gv \quad (4.18)$$

No segundo caso, solucionamos para  $i$ , certamente, e usamos a definição  $G = 1/R$ . Uma outra forma de enxergar estas equações é notar que a segunda pode ser obtida da primeira trocando-se  $v$  por  $i$ ,  $i$  por  $v$  e  $R$  por  $G$ . De maneira similar, a primeira pode ser obtida da segunda trocando-se  $i$  por  $v$ ,  $v$  por  $i$  e  $G$  por  $R$ .

Similarmente, no caso de resistências em *série*,  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , a resistência equivalente foi mostrada na Seq. 2.3 como

$$R_s = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (4.19)$$

e para condutância em *paralelo*  $G_1, G_2, \dots, G_n$ , vimos na Seq. 2.4, que a condutância equivalente era

$$G_p = G_1 + G_2 + \dots + G_n \quad (4.20)$$

É claro que uma destas equações pode ser obtida da outra pela troca de resistências e condutâncias e dos subíndices  $s$  e  $p$ , isto é, *série* e *paralelo*.

Há, então, uma *dualidade* bem definida entre resistência e condutância, corrente e tensão, e *série* e *paralelo*. Reconhecemos este fato, definindo estas quantidades como *duais* uma da outra. Isto é,  $R$  é o dual de  $G$ ,  $i$  é o dual de  $v$ , *série* é o dual de *paralelo* e vice-versa em cada caso.

Um outro caso simples de equações duais é

$$v = 0 \quad (4.21)$$

e sua dual

$$i = 0 \quad (4.22)$$

No caso geral, um elemento descrito por (4.21) é um *curto-circuito* e o descrito por (4.22) é um circuito aberto. Então curto-circuito e circuito aberto são duais. Existem, também outras grandezas duais, como veremos mais tarde.

## EXEMPLO 4.13

Toda equação na teoria de circuitos elétricos tem uma dual, obtida pela troca de cada grandeza na equação por sua grandeza dual. Se uma equação descreve um circuito planar, então a outra descreve o dual do circuito, ou o circuito *dual*. (Como o leitor poderá ver em outro curso, os circuitos não-planares não têm dual.) Por exemplo, considere o circuito da Fig. 4.16. As equações de malha são dadas por

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2)i_1 - R_2i_2 &= v_g \\ -R_2i_1 + (R_2 + R_3)i_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Para obter a dual de (4.23), simplesmente trocamos os  $R$ 's pelos  $G$ 's, os  $i$ 's por  $v$ 's e  $v$  por  $i$ . O resultado é

$$\begin{aligned} (G_1 + G_2)v_1 - G_2v_2 &= i_g \\ -G_2v_1 + (G_2 + G_3)v_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

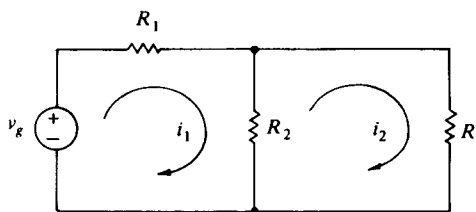


FIGURA 4.16 Circuito de duas malhas

Estas são as equações nodais de um circuito que tem duas tensões de nó de não-referência,  $v_1$  e  $v_2$ , três condutâncias e uma fonte de corrente independente  $i_g$ . De nosso processo simplificado para equações nodais, vemos que  $G_1$  e  $G_2$  estão conectadas no primeiro nó,  $G_2$  é comum aos dois nós,  $G_2$  e  $G_3$  estão conectadas ao segundo nó, e  $i_g$  entra no primeiro nó. Visto que  $G_1$  e  $i_g$  não estão conectadas ao segundo nó e  $G_3$  não está conectada ao primeiro nó, estes elementos estão conectados ao nó de referência. Tal circuito é mostrado na Fig. 4.17 e é o dual do da Fig. 4.16.

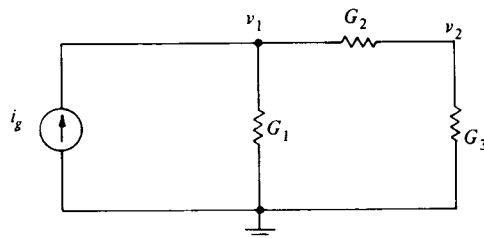


FIGURA 4.17 Dual da Fig. 4.16

A Figura 4.16 pode ser descrita como  $v_g$  em série com  $R_1$  e a combinação paralela de  $R_2$  e  $R_3$ . Trocando nesta declaração as grandezas pelos seus duais, vemos corretamente que a Fig. 4.17, um circuito dual, pode ser descrita como  $i_g$  em paralelo com  $G_1$  e com a combinação série de  $G_2$  e  $G_3$ .

Neste exemplo, notamos que nós são duais de malhas, e vice-versa. Isto é verdade, em geral, devido à dualidade entre as correntes de malha e as tensões de nós de não-referência. O nó de referência é dual da região de contorno da parte externa ao circuito, ou o que se pode chamar de malha externa.

Esta última dualidade (entre nós e malhas) nos dá um procedimento para calcular o dual de um dado circuito. Podemos situar um nó da rede dual a ser obtida no interior de cada malha, desta forma assegurando-nos das correspondências entre cada nó de não-referência e uma malha. Então podemos colocar o nó de referência do lado de fora do circuito (correspondendo à malha externa). Unindo estes nós, em um ponto, por meio dos elementos desenhados através de elementos do circuito original, garante-nos a correspondência entre os elementos. Se estes últimos elementos desenhados são os duais daqueles que eles cruzam, então o circuito obtido é o dual do circuito original.

Como um exemplo, o circuito da Fig. 4.16 é redesenhado, usando linhas inteiras, na Fig. 4.18. O circuito com linhas tracejadas, superposto de acordo com os procedimentos duais é seu dual. Deve ficar claro, que o último circuito é o mesmo que o da Fig. 4.17.

No caso de fontes dependentes ou independentes, a polaridade da fonte dual é especificada quando o circuito dual é obtido das equações duais, como no caso da Fig. 4.17. Contudo, no método geométrico da Fig. 4.18, a polaridade de  $i_g$  não pode ser determinada, visto que as direções das correntes de malha não são mostradas e, portanto, são completamente arbitrárias.

Se as correntes de malha ou as tensões de nós são mostradas no circuito original, então a polaridade da fonte obtida no circuito dual pode ser determinada pelo conceito de *excitação* de um nó ou uma malha. Diremos que uma malha é *excitada* por uma fonte a ela conectada se a polaridade da fonte é tal que a corrente tem o sentido da corrente de malha. Um nó é excitado por uma fonte a ele conectada se a polaridade da fonte é tal que aplica uma tensão no nó, isto é, envia uma corrente para o nó. Então, a fonte dual irá ou não excitar uma malha ou um nó, conforme a fonte original excita ou não a correspondente malha ou o nó. Isto é consistente, como deve ser, com os dois conjuntos de equações duais do circuito.

Em geral, quando analisamos um circuito, os valores numéricos de suas tensões e correntes são os mesmos que os de seus duais em seu circuito dual. Quando resolvemos um circuito, portanto, realmente

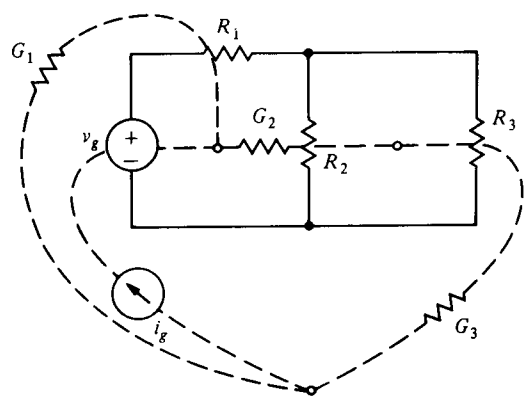


FIGURA 4.18 Dois circuitos duais



resolvemos dois. Como uma ilustração, os valores numéricos de  $i_1$  e  $i_2$  na Fig. 4.16 são, respectivamente, os mesmos de  $v_1$  e  $v_2$  na Fig. 4.17.

Como uma nota final deste capítulo não iremos dar um dual do amp. op's. Podemos, sem dúvida, obter circuitos duais contendo fontes dependentes que são equivalentes a circuitos contendo amp. op's.

---

## EXERCÍCIOS

4.7.1 Encontre o dual do circuito da Fig. 4.14(a).

---

## 4.8

### Análise de Circuitos com Ajuda de Computador Usando "Spice"

Numerosos programas de análise de circuitos através de computadores estão disponíveis para solução de circuitos elétricos em todos os tipos de computadores digitais, desde os de grande porte até em um pequeno (em tamanho) microcomputador. Embora programas de computador sejam muito úteis e em alguns casos necessários para a solução de redes complexas, eles não são, de nenhuma forma, um substituto ao entendimento complexo dos fundamentos da teoria de circuitos. O estudante não deve se esquecer de que a resposta destes programas é totalmente baseada na entrada fornecida. Isto requer um completo conhecimento dos princípios básicos para fornecer os dados de entrada e também para uma interpretação correta dos resultados computados.

"SPICE", desenvolvido em Berkeley, na Universidade da Califórnia, é um programa poderoso que se tornou corrente na simulação de circuitos analógicos, "Spice", uma versão do "SPICE" executável em microcomputadores como os da família IBM PC, é usado para ilustração neste texto. Uma descrição dos comandos normalizados do "SPICE" empregados em nosso estudo, é fornecida no Apêndice E, que deve ser estudado antes de se continuar esta seção. De importância especial para os exemplos em cc são as declarações de dados E, F, G, H, I, R, V e X; bem como os comandos DC, END, ENDS, LIB, OP, PRINT, SUBCKT, e TF.

---

### EXEMPLO 4.14

Como um primeiro exemplo, considere o circuito simples da Fig. 4.19 onde as designações dos nós foram circundadas, para evitar dúvidas. O procedimento para uma simulação requer os seguintes passos:

1. Criar um arquivo de entrada ou *arquivo de circuito* usando um editor de texto em ASCII (e.g., EDLIN do MS DOS)
2. Rodar o programa
3. Examinar os arquivos de saída.

No Apêndice E, vemos que a criação de um arquivo de circuito para o nosso circuito simples cc envolve (1) declarações de títulos e comentários, (2) declarações de dados, (3) declarações de controle da solução, (4) declarações de controle da saída e (5) uma declaração de fim. O arquivo de circuito, gravado como "EX 4-19-CIR", que dá a solução, é:

Solução em cc simples para o exemplo da Fig. 4.19 (Declaração de título)  
\*Declaração de dados para o valor dos componentes

```
I 1 0 1 DC 1M
V1 2 0 DC 6V
R1 1 0 1KOHM
R2 1 2 2K
RL 1 0 3K
```

\*Declaração de controle da solução para imprimir todos os valores de correntes e potências dissipadas para todas as fontes de tensão. (Nota: .OP é o "default", usado se nenhuma declaração de controle for incluída.)

```
.OP
```

\*Declaração de controle de saída para as tensões de nó 1 e 2. \*(Opcional neste caso, pois OP dá o valor de todas as tensões nos nós e correntes através das fontes de tensão, automaticamente.)

```
.PRINT DC V(1) V(2)
```

\*Declaração de fim

```
.END
```

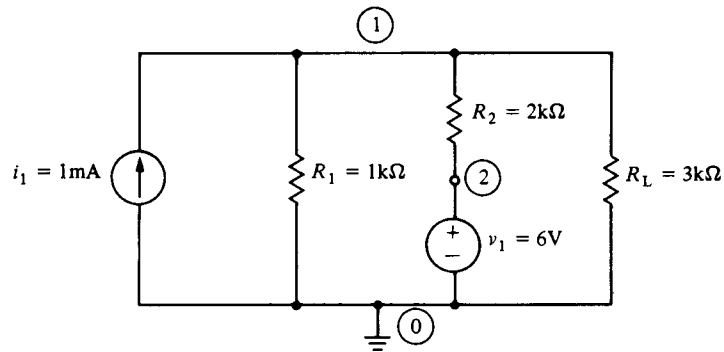


FIGURA 4.19 Circuito para o exemplo de "SPICE"

Rodar o programa (passo 2) irá depender da configuração do *hardware* empregado. No caso de um IBM PC com disco rígido, a seguinte entrada é suficiente:

PSPICE EX4-19. CIR

A saída é salva no disco rígido como EX4-19.OUT.

A análise dos resultados (passo 3) é facilmente executada pela inspeção do arquivo de saída, usando-se os comandos TYPE ou COPY do DOS para vê-la no monitor de vídeo ou na impressora do sistema. A solução neste caso é a que se segue:

```

NODE VOLTAGE      NODE VOLTAGE
(  1)  2.1818    (  2)  6.0000
VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME          CURRENT
V1            -1.909E-03
TOTAL POWER DISSIPATION  1.15E-02  WATTS

```

### EXEMPLO 4.15

Como um segundo exemplo, considere o circuito da Fig. 4.20(a), que ilustra uma singularidade do SPICE. Para usar a corrente no ramo, tal como  $I_x$ , da fonte de corrente controlada por corrente (FCCC)  $i_1$ , uma fonte de tensão simulada tal como  $V_d$  deve ser inserida, como mostrado na Fig. 4.20(b). Um arquivo de circuito para as tensões de nó 1 e 2, a tensão entre os nós 2 e 3 e a corrente em  $R_L$  é

Arquivo de circuito para a solução em cc da Fig. 4.20  
 \*Declaração de dados

```

V1 1 0 DC 4V
VD 100 0 DC 0
FI1 3 2 VD 4
R1 1 2 20HM
R2 2 100 4
R3 2 3 7
RL 3 0 3

```

\*Declaração de controle da solução para a solução em cc como  $V1 = 4V$ .

.DC V1 4 4 1

\*Declaração de controle da saída

.PRINT DC V(1) V(2) V(2,3) I(RL)

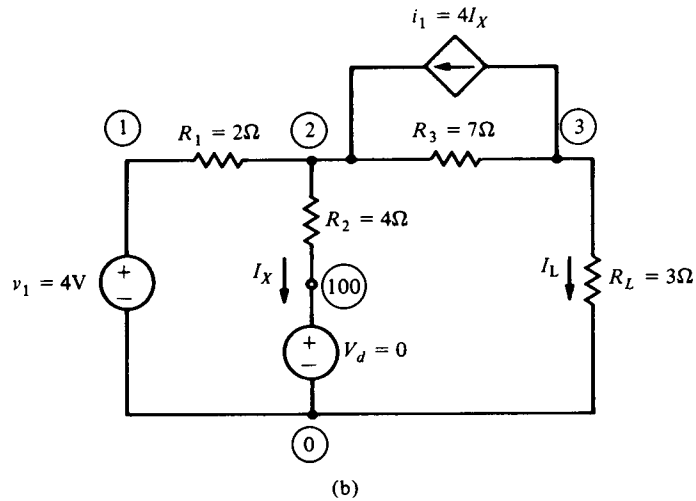
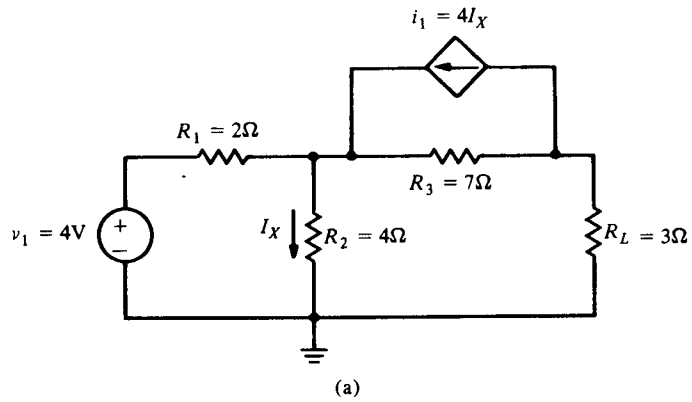
.END

Arquivo de saída para a solução encontrada

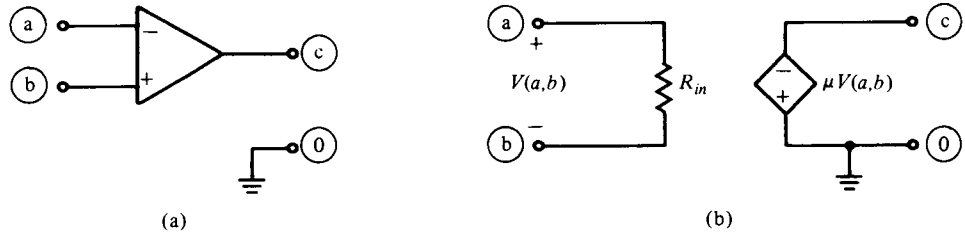
V1	V(1)	V(2)	V(2,3)	I(RL)
4.000E+00	4.000E+00	1.333E+01	3.733E+01	-8.000E+00

### EXEMPLO 4.16

Como um exemplo final, vamos considerar um circuito contendo um amp.op. Um modelo simples de uma FTCT de um amp. op real é mostrado na Fig. 4.21. Neste modelo,  $R_{in}$  representa a resistência



**FIGURA 4.20** (a) Circuito contendo uma FCCC; (b) redesenhado para uma simulação com SPICE com  $V_d$  incluída para o uso de  $I_x$



**FIGURA 4.21** (a) Símbolo do amp. op.; (b) circuito equivalente de uma FTCT simples

de entrada do amp. op e  $\mu$  o ganho. Este modelo pode ser usado para simular o amp.op no circuito inversor simples da Fig. 4.22(a). Valores nominais de  $R_{in} = 10^{10}$  ohms e  $\mu = 10^6$  foram usados para simular um dispositivo ideal. Um arquivo de circuito para a solução é

AMP. OP. INVERSOR DA FIG. 4.22  
 \*Declaração de dados

```
VI 10 0 DC 0.5V
R1 10 1 10K
R2 1 3 100K
R3 2 0 10K
RIN 1 2 1E+10
EVO 0 3 1 2 1E+6
```

\*Declarações de controle das soluções para  $V_I = 0,5V$  e a função de transferência para  $V(3)/V_I$ , resistências \*de entrada e de saída.

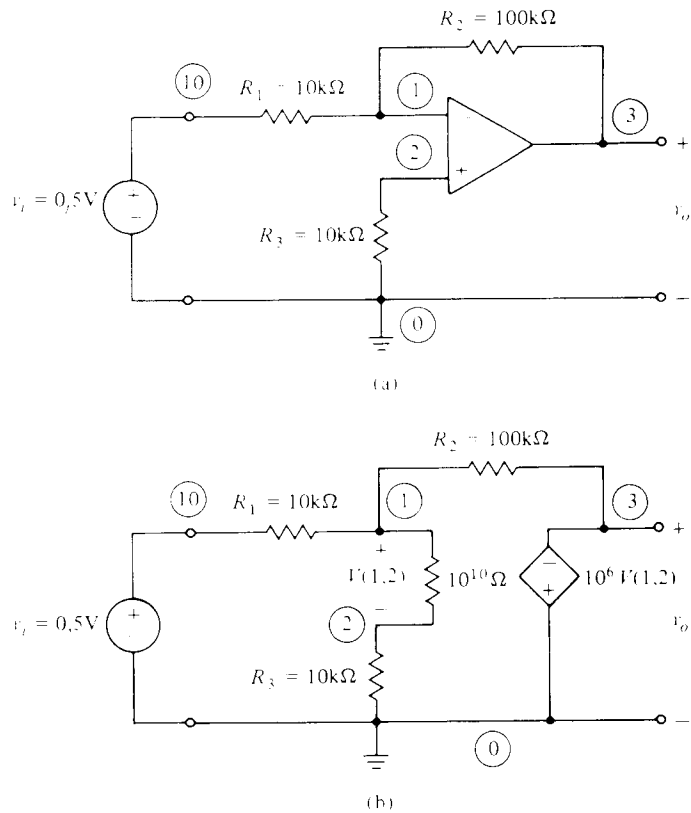


FIGURA 4.22 (a) Inversor; (b) FTCT equivalente

```
.DC VI 0.5 0.5 1
.TF V(3) VI
*Declaração de controle da saída
.PRINT DC V(1) V(2) V(3) I(R1)
*Declaração de fim
.END
```

A declaração de controle da solução TF (função de transferência) adicionada ao arquivo do circuito faz com que a relação de  $V(3)/V_i$ , a corrente em  $V_i$ , a resistência de entrada vista por  $V_i$ , e a resistência de saída do amp. op. vista nos terminais de saída sejam impressas. Uma discussão formal da função de transferência é adiada até o Capítulo 14. O resultado da simulação é

```
VI      V(1)      V(2)      V(3)      I(R1)
5.000E-01 5.000E-06 5.000E-12 -5.000E+00 5.000E-05
V(3)/VI = -1.000E+01
INPUT RESISTANCE AT VI = 1.000E+04
OUTPUT RESISTANCE AT V(3) = 0.000E+00
```

Uma característica importante do "SPICE" é sua capacidade para definir subcircuitos que podem ser referenciados na declaração de dados. Suponha, por exemplo, que desejássemos armazenar o circuito equivalente para o amp. op. empregado no Exemplo 4.16 e chamá-lo sempre que necessitamos dele numa solução. Isto pode ser feito pela geração de um arquivo tal como OPAMP.CKT contendo a definição do circuito desejado para o amp.op. e então chamando-o, usando uma declaração de dados em um arquivo do circuito empregando o comando X (chamada de subcircuito). Vamos iniciar pelo uso da característica de definição de subcircuito para o arquivo OPAMP.CKT, que podemos escrever como

```
.SUBCKT OPAMP 1 2 3
*1 representa nó inversor de entrada
*2 representa nó não-inversor de entrada
*3 representa nó de saída
```

```

RIN 1 2 1E+10
EVO 0 3 1 2 1E+6
.ENDS

```

O arquivo de circuito do Exemplo 4.16, usando a definição de subcircuito, pode agora ser escrito como

```

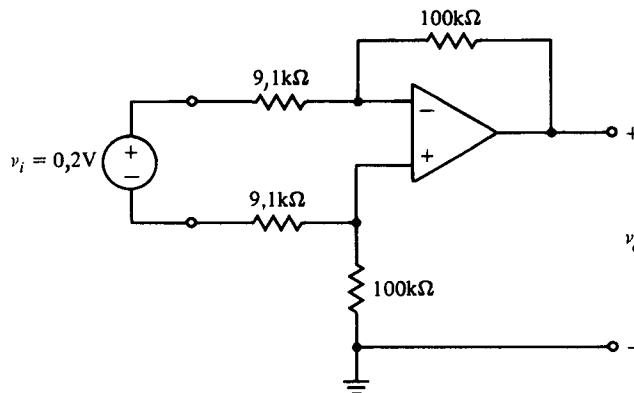
APM OP INVERSOR DA FIG. 4.22. IG. 4.22
*Declarações de dados

VI 10 0 DC 0.5V
R1 10 1 10K
R2 1 3 100K
R3 2 0 10K
XAMP1 1 2 3 OPAMP
*Define arquivo onde o subcircuito OPAMP é colocado
.LIB OPAMP.CKT
*Declaração de controle das soluções
.DC V(3) 0.5 0.5 1
.TF V(3) VI
*Declaração de controle de saída
.PRINT DC V(1) V(2) V(3) I(R1)
*Declaração de fim
.END

```

## EXERCÍCIOS

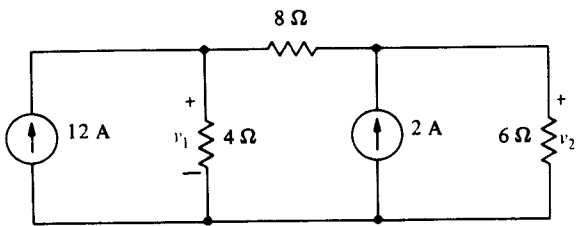
- 4.8.1** Escreva um arquivo de circuito para determinar  $v$  na Fig. 4.7.
- 4.8.2** Escreva um arquivo de circuito para encontrar as tensões de nó na Fig. 4.9.
- 4.8.3** Escreva  $v_o$ ,  $v_o/v_i$ , a resistência de entrada e a resistência de saída  
*Resposta:*  $-2,198 \text{ V}$ ,  $-10,99$ ,  $18,2 \text{ k}\Omega$ ,  $0 \text{ k}\Omega$



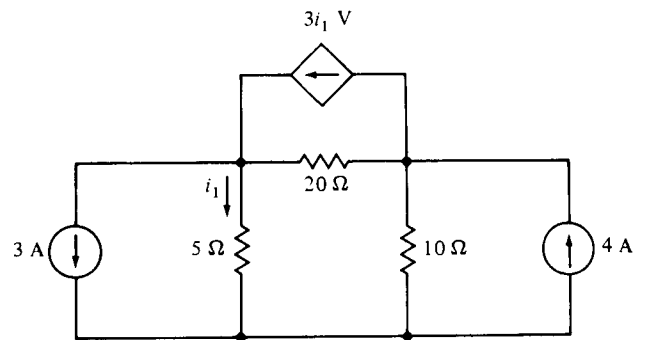
EXERCÍCIO 4.8.3

## PROBLEMAS

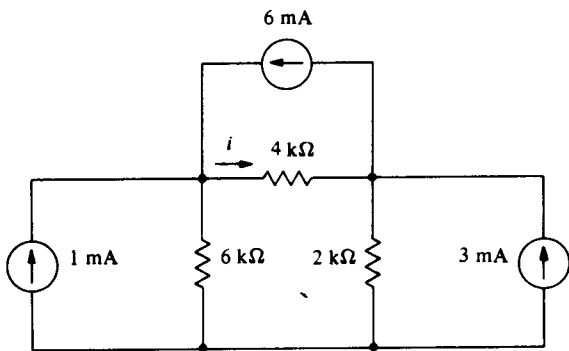
- 4.1** Usando a análise nodal, calcule  $v_1$  e  $v_2$ .
- 4.2** Usando a análise nodal, calcule  $i$ .
- 4.3** Usando a análise nodal, calcule  $i_1$  e  $i_2$ .
- 4.4** Usando a análise nodal, calcule  $i$  e  $i_1$ .
- 4.5** Usando a análise nodal, calcule  $i_1$ .
- 4.6** Calcule a potência entregue para o resistor de  $2\Omega$ , usando a análise nodal.



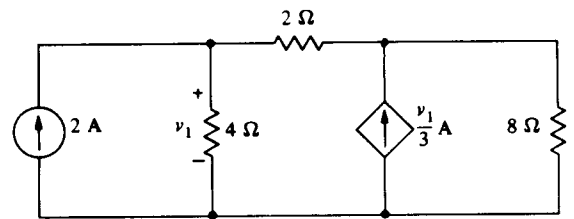
PROBLEMA 4.1



PROBLEMA 4.5

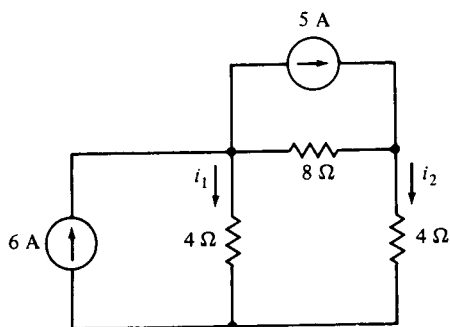


PROBLEMA 4.2

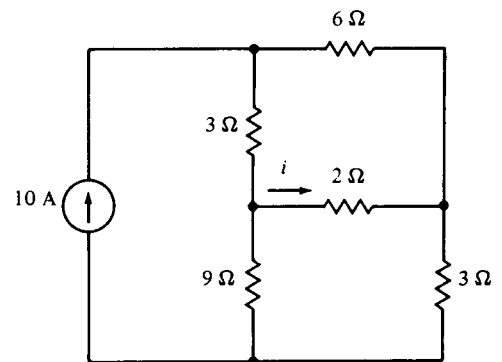


PROBLEMA 4.6

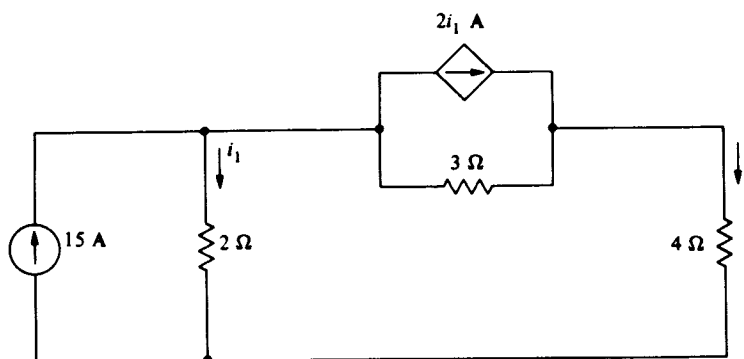
4.7 Calcule  $i$ , usando a análise nodal.



PROBLEMA 4.3

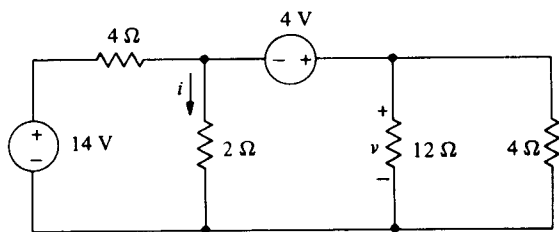


PROBLEMA 4.7



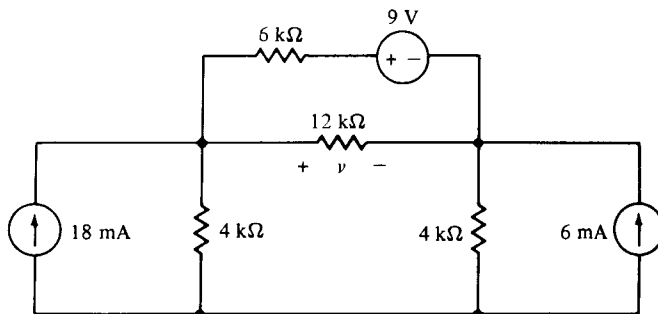
PROBLEMA 4.4

4.8 Calcule  $v$  e  $i$ , usando a análise nodal.



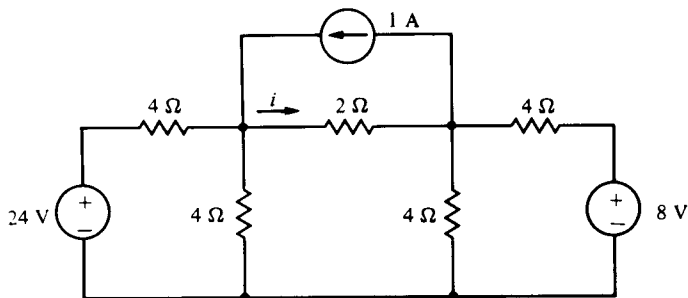
PROBLEMA 4.8

4.11 Usando a análise nodal, calcule  $v$ .



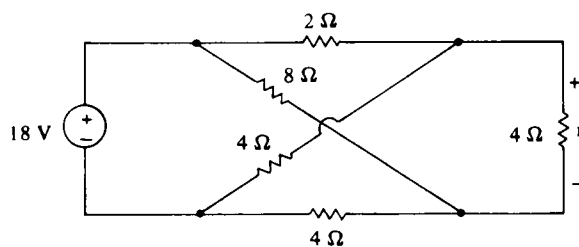
PROBLEMA 4.11

4.9 Usando a análise nodal, calcule  $i$ .



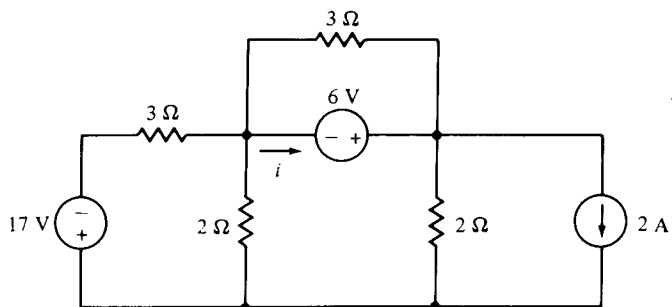
PROBLEMA 4.9

4.12 Usando a análise nodal, calcule  $v$ .



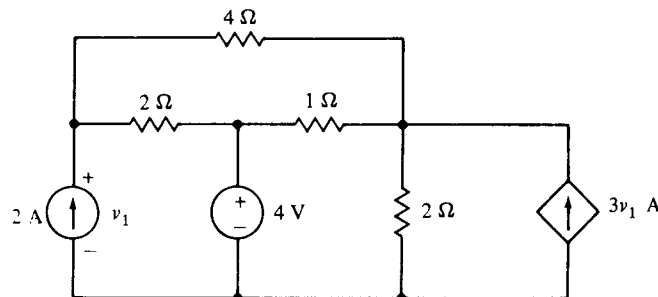
PROBLEMA 4.12

4.10 Calcule  $i$ , usando a análise nodal.



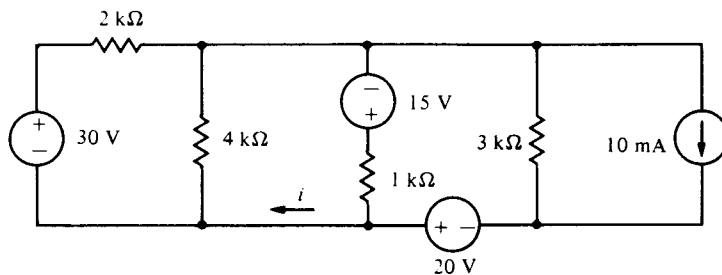
PROBLEMA 4.10

4.13 Usando a análise nodal, calcule a potência entregue ao resistor de 4Ω.



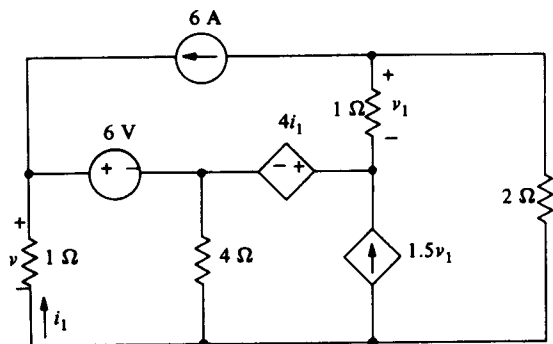
PROBLEMA 4.13

4.14 Usando a análise nodal, calcule  $i$ .



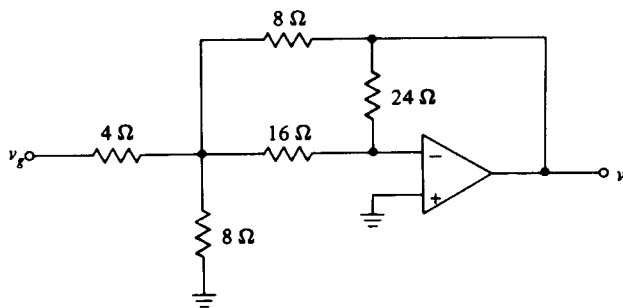
PROBLEMA 4.14

4.15 Usando a análise nodal, calcule  $v$  e  $v_1$ .



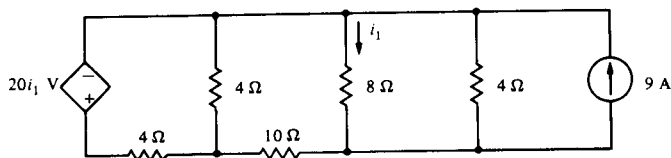
PROBLEMA 4.15

4.18 Calcule  $v$  se  $v_g = 8 \text{ sen } 6t \text{ V}$ .



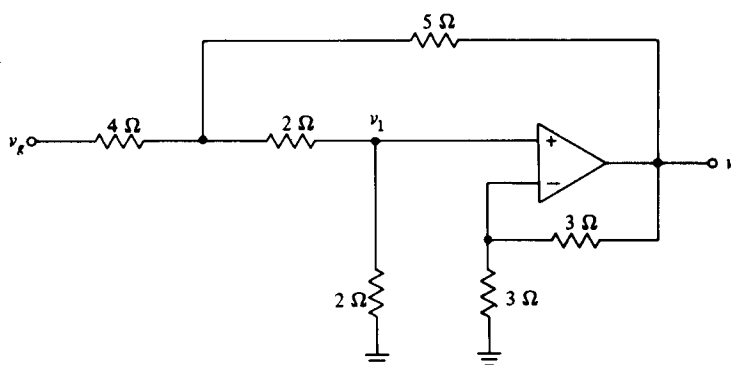
PROBLEMA 4.18

4.16 Usando a análise nodal, calcule  $i_1$ .



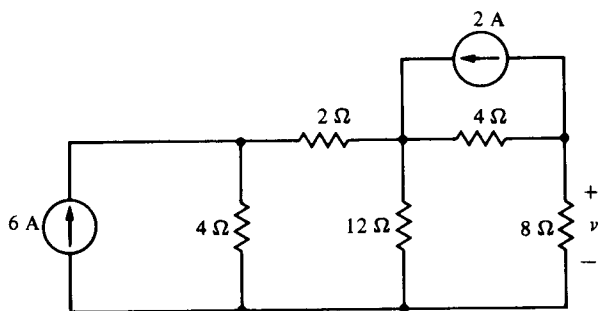
PROBLEMA 4.16

4.19 Calcule  $v$  se  $v_g = 8 \text{ cos } 3t \text{ V}$ . (Sugestão: Note que  $v_1 = v/\mu$ , onde  $\mu = 2$  é o ganho da FTCT.)



PROBLEMA 4.19

4.17 Usando a análise nodal, calcule  $v$ .



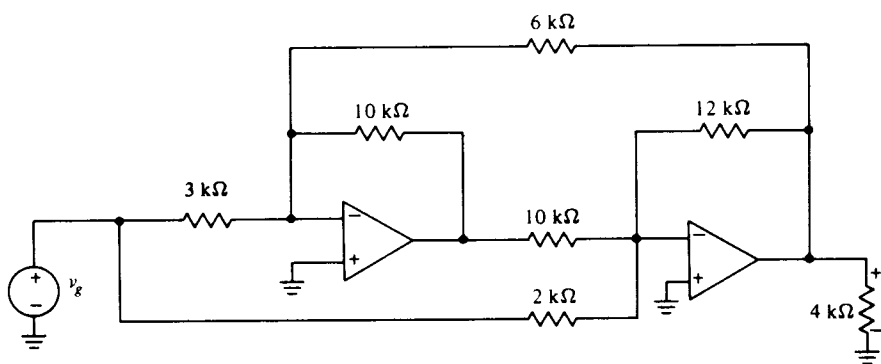
PROBLEMA 4.17

4.20 Calcule  $v$  se  $v_g = 4 \text{ cos } 6t \text{ V}$ .

4.21 Calcule  $R$  tal que  $v_o = -20 v_g$

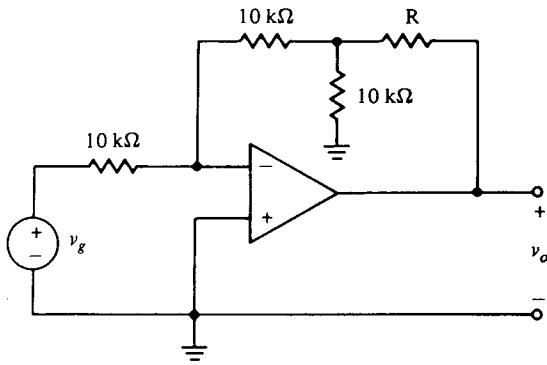
4.22 Calcule  $i$  se  $v_g = 4 \text{ cos } 100t \text{ V}$ .

4.23 Resolva o Prob. 4.2 usando análise de malhas.

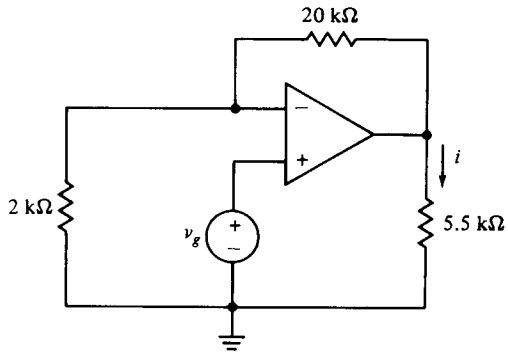


PROBLEMA 4.20





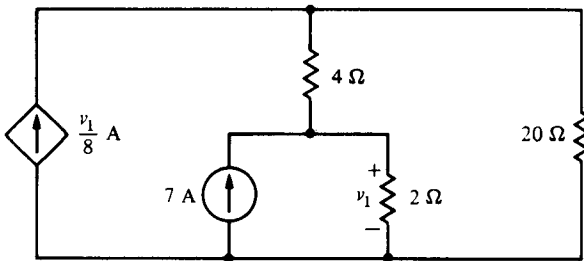
**PROBLEMA 4.21**



**PROBLEMA 4.22**

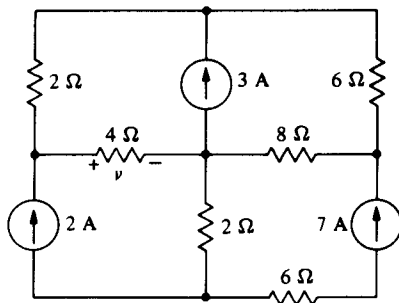
4.24 Resolva o Prob. 4.3 usando análise de malhas.

4.25 Usando análise de malha ou de laço, calcule a potência entregue ao resistor de  $4\Omega$ .



**PROBLEMA 4.25**

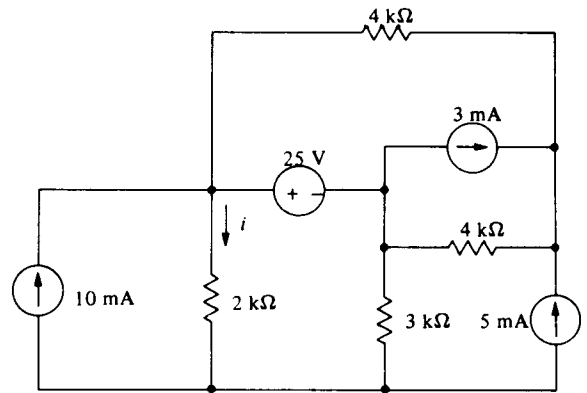
4.26 Calcule  $v$ .



**PROBLEMA 4.26**

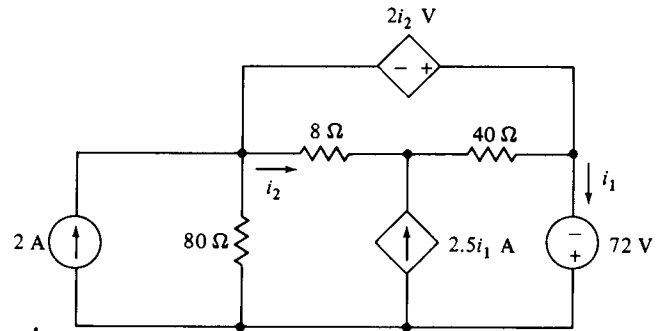
4.27 Resolva o Prob. 4.26, se as fontes de corrente de 2A, 3A e 7 A são substituídas por fontes de tensão de, respectivamente, 17V, 4 V e 16V, sendo o terminal positivo a parte superior de cada uma delas.

4.28 Calcule  $i$  usando tanto a análise nodal quanto a de malhas.



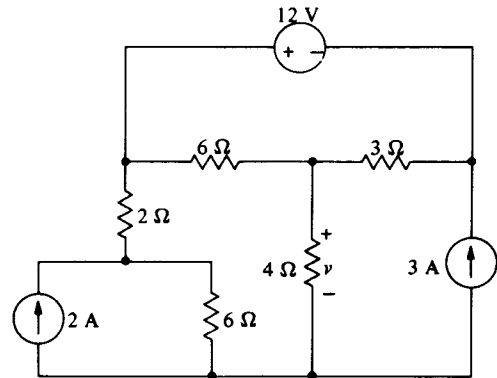
**PROBLEMA 4.28**

4.29 Encontre  $i_1$  e  $i_2$  usando a análise de malhas ou de laço.



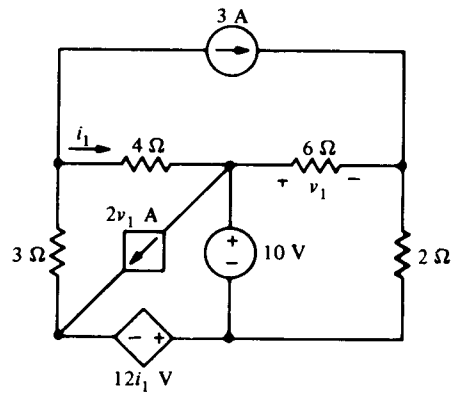
**PROBLEMA 4.29**

4.30 Calcule  $v$  usando o método (nodal ou de malhas) que requer o menor número de equações.

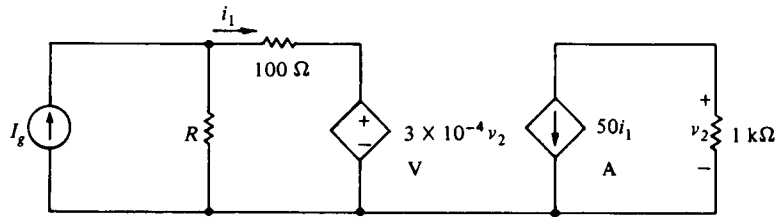


**PROBLEMA 4.30**

4.31 Calcule a potência desenvolvida pela fonte de 10V, usando as análises de malha e de nó.



PROBLEMA 4.31



PROBLEMA 4.32

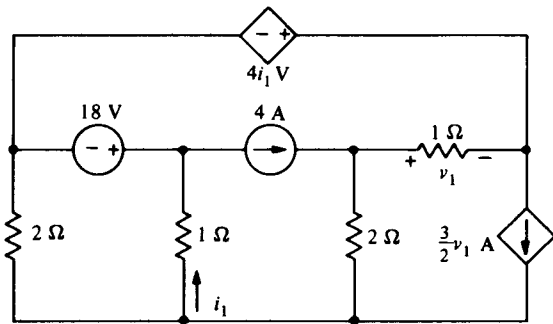
4.32 Calcule  $v_2$  em termos de  $R$  e de  $I_g$ , e mostre que se  $R = 10 \text{ k}\Omega$  então

$v_2 \approx -5 \times 10^4 I_g$

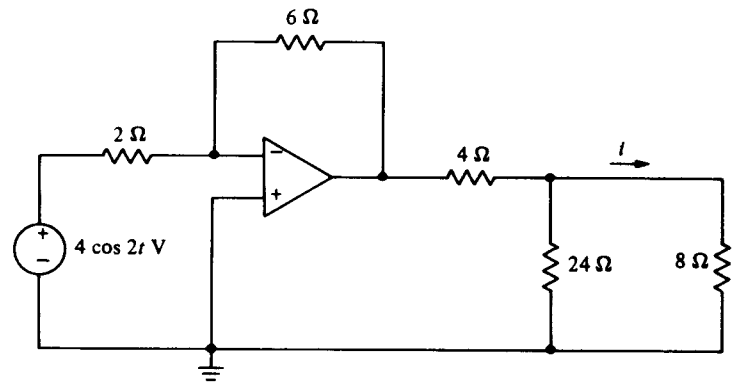
4.33 Calcule  $v_1$ .

4.34 Calcule  $i$ .

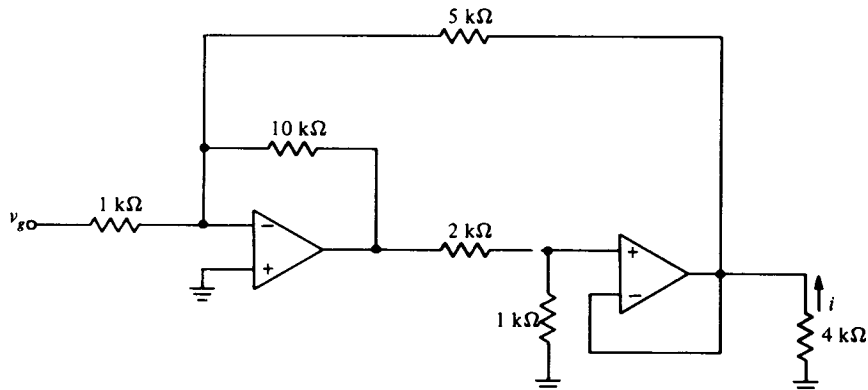
4.35 Calcule  $i$  se  $v_g = 6 \cos 1000t \text{ V}$ .



PROBLEMA 4.33

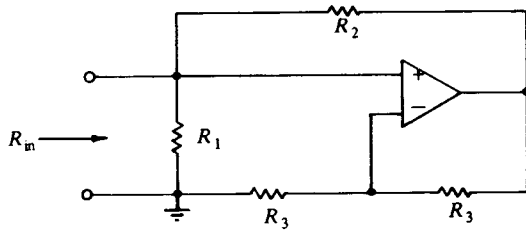


PROBLEMA 4.34



PROBLEMA 4.35

- 4.36 Calcule a resistência de entrada  $R_{in}$ , em termos das outras resistências. Considere  $R_1 = R_3 = 2 \text{ k}\Omega$ , e encontre  $R_2$  tal que (a)  $R_{in} = 6 \text{ k}\Omega$  e (b)  $R_{in} = -1 \text{ k}\Omega$ .



PROBLEMA 4.36

- 4.37 Desenhe um circuito e seu dual para as equações de malha deste circuito dadas por

$$10i_1 - 2i_2 = 4$$

$$-2i_1 + 8i_2 - i_3 = 0$$

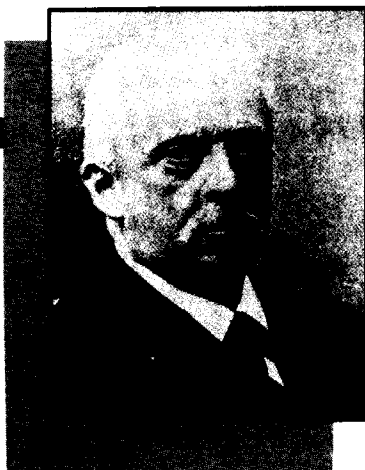
$$-i_2 + 11i_3 = -6$$

- 4.38 Desenhe o dual do circuito do Prob. 4.26. Identifique  $i$  no circuito dual correspondente a  $v$  no circuito original e mostre que eles têm o mesmo valor numérico.

- 4.39 Repita o Prob. 4.38 para o circuito do Prob. 4.28, resolvendo para  $v$  o dual de  $i$ .

## PROBLEMAS PARA A APLICAÇÃO DE COMPUTADORES

- 4.40 Use o SPICE para encontrar (a)  $i$  no Prob. 4.14; (b)  $v$  no Prob. 4.15; e (c)  $i_1$  no Prob. 4.31.
- 4.41 Use o SPICE para calcular  $v$  e a resistência de entrada, vista pelos terminais, de  $v$  se  $v_g = 1,5 \text{ V}$  no Prob. 4.20.
- 4.42 Use o SPICE para calcular a corrente no resistor de  $5 \text{ k}\Omega$ , do Prob. 4.35, se  $v_g = 2 \text{ V}$ .
- 4.43 Use o comando .DC para calcular  $v_1$  no Prob. 4.33, se o valor da fonte de  $18 \text{ V}$  varia de  $10 \text{ V}$  a  $20 \text{ V}$ , com incrementos de  $2 \text{ V}$ .



# 5

## Teoremas de Rede

---

*A força da água caindo só pode fluir das montanhas quando chuva e neve a levam ao alto.*

*Hermann von Helmholtz*

---

O homem que muitos consideram responsável pelo teorema de Thévenin, abordado neste capítulo, foi Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, físico, médico, fisiologista e o maior cientista alemão do século XIX. Ele ajudou a provar a lei da conservação da energia, inventou o oftalmoscópio, construiu uma formulação generalizada da eletrodinâmica e previu a estrutura atômica da eletricidade. Sua antecipação da existência das ondas de rádio foi mais tarde provada quando elas foram descobertas por um de seus alunos, Heinrich Hertz.

Helmholtz nasceu em Potsdam, Alemanha, o mais velho dos seis filhos de August Helmholtz e Caroline Penne Helmholtz, uma descendente de William Penn, o fundador da Pensilvânia. Ele serviu por 8 anos como médico do exército para pagar suas mensalidades escolares durante seu tempo de estudante no Friedrich Wilhelm Institute. Seu maior interesse, entretanto, foi pela física, que o tornou famoso. Seu aniversário de 70 anos foi motivo de celebração nacional na Alemanha. Três anos depois faleceu, tendo elevado a ciência germânica às grandes alturas, tal qual seu famoso contemporâneo, Otto von Bismarck, elevara a nação alemã. ■

Nos capítulos anteriores consideramos métodos bastante diretos de análise de circuitos. Entretanto, em muitos casos, a análise pode ser consideravelmente encurtada aplicando-se certos teoremas de rede. Por exemplo, se estamos interessados apenas no que acontece em um determinado elemento de um circuito, pode ser possível, por meio de um teorema de rede, substituir o restante do circuito por outro circuito equivalente mais simples.

Neste capítulo introduziremos vários teoremas de rede e ilustraremos sua aplicação na simplificação da análise de certos circuitos. Os teoremas são aplicáveis, em geral, a circuitos *lineares*, um termo que também iremos discutir.

Finalmente, usaremos os teoremas de rede como uma motivação à introdução de fontes reais, diferentes das fontes ideais consideradas até aqui. Como seria de se esperar, fontes reais são capazes de fornecer somente uma quantidade finita de potência, e dedicaremos uma seção para determinar a potência máxima que pode ser entregue por uma dada fonte.

## 5.1

### Circuitos Lineares

No Capítulo 2, definimos resistor linear como aquele que satisfaz a lei de Ohm

$$v = Ri$$

e consideramos circuitos constituídos de resistores lineares e fontes independentes. Definimos fontes dependentes no Capítulo 3 e analisamos circuitos contendo fontes dependentes e independentes no Capítulo 4. As fontes dependentes que consideramos são todas descritas por uma relação da forma

$$y = kx \quad (5.1)$$

onde  $k$  é uma constante e as variáveis  $x$  e  $y$  são ou tensões ou correntes. É claro que a lei de Ohm é um caso particular de (5.1)

Em (5.1), a variável  $y$  é proporcional à variável  $x$ , e o gráfico de  $y$  versus  $x$  é uma linha reta que passa pela origem. Por esta razão, alguns autores se referem a elementos caracterizados por (5.1) como *elementos lineares*.

Para o nosso propósito, definiremos um elemento linear de maneira mais genérica, que inclui (5.1) como um caso especial. Se  $x$  e  $y$  são variáveis, tais como tensões e correntes, associadas com um elemento de dois terminais, então dizemos que o elemento é *linear* se a multiplicação de  $x$  por uma constante  $K$  resulta na multiplicação de  $y$  pela mesma constante  $K$ . Isto é chamado de *propriedade da proporcionalidade*, evidentemente mantida para (5.1) desde que

$$Ky = k(Kx)$$

Portanto, não somente um elemento descrito por (5.1) é linear, mas, também, elementos descritos por relações da forma

$$\frac{dy}{dt} = ax, y = b\frac{dx}{dt} \quad (5.2)$$

são também lineares, se  $a$  e  $b$  são constantes diferentes de zero.

O amp. op. ideal é um elemento de multiterminal e será descrito por mais de uma equação. Não

obstante, empregaremos o amp. op. apenas no modo realimentado, como abordado no Capítulo 3, e neste caso, os circuitos equivalentes resultantes consistem em elementos lineares com relações como descrito em (5.1). Portanto, podemos incluir o amp. op. ideal em nossa lista de elementos lineares.

Definiremos um *circuito linear* como aquele que contém somente fontes independentes e/ou elementos lineares. Por exemplo, todos os circuitos que temos considerado até este ponto são circuitos lineares.

As equações que descrevem um circuito linear são obtidas pela aplicação da LKT e da LKC e, portanto, contêm somas de múltiplos de tensões ou correntes. Por exemplo, a equação de um laço é da forma

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = f \quad (5.3)$$

onde  $f$  é a soma algébrica das tensões das fontes independentes no laço, os  $v$ 's são as tensões sobre os demais elementos do laço e os  $a$ 's são 0 ou  $\pm 1$ .

### EXEMPLO 5.1

Para ilustrar, aplicando a LKT em volta do laço mostrado no circuito da Fig. 5.1 obtemos

$$v_1 + v_2 - v_3 = v_{g1} - v_{g2}$$

Neste caso,  $a_1 = a_2 = 1$ ;  $a_3 = -1$ ; os outros  $a$ 's são todos 0; e  $f = v_{g1} - v_{g2}$ . Temos também

$$v_1 = 2i_1, \quad v_2 = 5i_2, \quad v_3 = 3i_6$$

onde  $i_6$  é uma corrente em outro local no circuito.

A propriedade de proporcionalidade de um único elemento linear também é mantida para um circuito linear no sentido que, se todas as fontes independentes de um circuito forem multiplicadas por uma constante

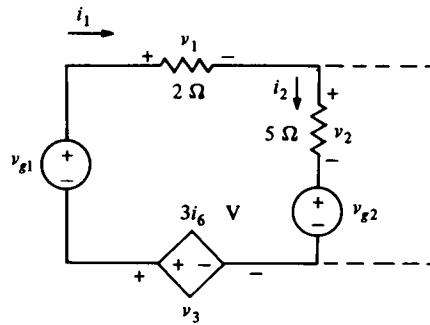


FIGURA 5.1 Laço de um circuito linear

$K$ , então todas as correntes e tensões sobre os demais elementos são multiplicadas pela mesma constante  $K$ . Isto é facilmente visto em (5.3), que multiplicada por  $K$  se torna

$$a_1 K v_1 + a_2 K v_2 + \dots + a_n K v_n = K f$$

O membro da direita é o resultado da multiplicação das fontes independentes por  $K$  e para que a igualdade seja mantida, todos os  $v$ 's são multiplicados por  $K$ . Uma vez que os elementos são lineares, multiplicando-se suas tensões por  $K$ , multiplicam-se suas correntes também por  $K$ .

### EXEMPLO 5.2

Para ilustrar a propriedade da proporcionalidade, vamos calcular a corrente  $i$  na Fig. 5.2. Visto que, pela LKC a corrente à direita do resistor de  $2\ \Omega$  é  $i - i_{g2}$ , a LKT ao redor da malha esquerda dá

$$2(i - i_{g2}) + 4i = v_{g1} \quad (5.4)$$

da qual

$$i = \frac{v_{g1}}{6} + \frac{i_{g2}}{3} \quad (5.5)$$

Se  $v_{g1} = 18\ \text{V}$  e  $i_{g2} = 3\ \text{A}$ , então  $i = 3 + 1 = 4\ \text{A}$ . Se dobrarmos o valor de  $v_{g1}$  para  $36\ \text{V}$  e de  $i_{g2}$  para  $6\ \text{A}$ , então  $i$  é dobrada para  $8\ \text{A}$ .

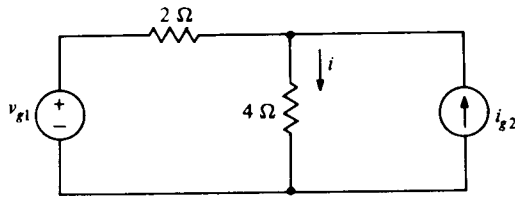


FIGURA 5.2 Circuito linear com duas fontes

### EXEMPLO 5.3

Como exemplo final, vamos ilustrar outro uso da relação de proporcionalidade encontrando  $v_1$  no circuito da Figura 5.3. Tal circuito, devido à sua semelhança com uma escada, é muitas vezes chamado de rede *escada* (“ladder”).

Podemos escrever as equações de nó e de malha, mas para ilustrar a proporcionalidade, introduziremos um método alternativo. Vamos simplesmente *assumir* a solução

$$v_1 = 1 \text{ V}$$

e ver aonde isso nos leva. Referindo-nos à figura, atribuindo-se este valor a  $v_1$ , resulta que  $i_1 = 2 \text{ A}$  e  $i_2 = 1 \text{ A}$ , e, portanto,

$$i_3 = i_1 + i_2 = 3 \text{ A}$$

Continuando a análise da escada a partir da fonte, temos, pela lei de Ohm, pela LKT e pela LKC

$$v_2 = 3i_3 = 9 \text{ V}$$

$$v_3 = v_1 + v_2 = 10 \text{ V}$$

$$i_4 = \frac{v_3}{5} = 2 \text{ A}$$

$$i_5 = i_3 + i_4 = 5 \text{ A}$$

$$v_4 = 1(i_5) = 5 \text{ V}$$

e, finalmente, se a suposição que  $v_1 = 1 \text{ V}$  está correta

$$v_g = v_3 + v_4 = 15 \text{ V}$$

Nossa suposição não estava correta, uma vez que o valor real é  $v_g = 45 \text{ V}$ , mas, tendo em vista as leis das probabilidades, isto não nos surpreende. Contudo, pela relação de proporcionalidade, se uma fonte de  $15 \text{ V}$  fornece uma saída  $v_1 = 1 \text{ V}$ , então nossa fonte de  $45 \text{ V}$  dará uma saída três vezes maior, de tal forma que a resposta correta é

$$v_1 = 3 \text{ V}$$

Este método de assumir uma resposta para a saída, trabalhar no sentido contrário para obter um valor de entrada, e ajustar a saída presumida para que esta seja consistente com o valor atual da entrada, por meio da relação de proporcionalidade, é especialmente fácil de aplicar à rede escada. Existem outros circuitos nos quais ela também é aplicável, mas a rede escada é um dos circuitos mais frequentemente encontrados, e o método é perfeitamente aplicável.

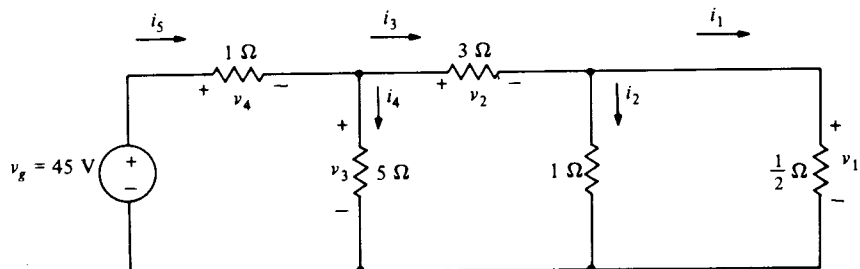


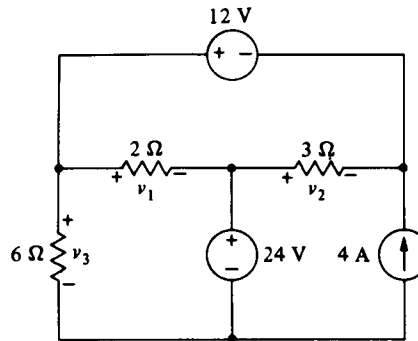
FIGURA 5.3 Rede escada

Um circuito *não-linear* é aquele que obviamente não é linear. Isso é, que tem no mínimo um elemento no qual a relação nos terminais não é da forma de (5.1) ou (5.2). Um exemplo é dado no Ex. 5.1.4, no qual se vê que a propriedade da proporcionalidade não é aplicável.

## EXERCÍCIOS

- 5.1.1 Calcule  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  com (a) os valores das fontes como mostrado, (b) os valores das fontes divididos por 2 e (c) os valores das fontes multiplicados por 2. Note como o princípio da proporcionalidade se aplica em (b) e (c).

Resposta: (a) 4,8, 28 V; (b) 2, 4, 14 V; (c) 8, 16, 56 V



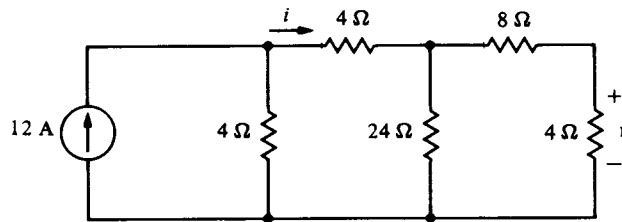
EXERCÍCIO 5.1.1

- 5.1.2 Calcule  $i_1$ ,  $v_2$ ,  $i_3$ ,  $v_3$ ,  $v_4$  e  $i_5$  na Figura 5.3.

Resposta: 6 A, 27 V, 9 A, 30 V, 15 V, 15 A

- 5.1.3 Calcule  $v$  e  $i$  usando o princípio da proporcionalidade.

Resposta: 8 V, 3 A



EXERCÍCIO 5.1.3

- 5.1.4 Um circuito é construído a partir de uma fonte de tensão  $v_g$ , um resistor linear de  $2\ \Omega$  e um resistor não-linear em série. O resistor não-linear é representado por

$$v = i^2$$

onde  $v$  é a tensão sobre o resistor e  $i$ , que é obrigada a ser não-negativa, é a corrente que flui no terminal positivo. Calcule a corrente que sai pelo terminal positivo da fonte se (a)  $v_g = 8\ \text{V}$  e (b)  $v_g = 16\ \text{V}$ . Note que a propriedade da proporcionalidade não é aplicável.

Resposta: (a) 2 A; (b) 3, 123 A

## 5.2

### Superposição

Nesta seção abordaremos circuitos lineares com mais de uma entrada. A propriedade de linearidade torna possível, como veremos, se obter a resposta nestes circuitos pela análise de apenas uma entrada.



## EXEMPLO 5.4

Para ver como isto pode ser feito, vamos primeiro considerar o circuito da Figura 5.2, que foi analisado na seção anterior. A saída  $i$  satisfaz a equação de circuito (5.4), que repetimos como

$$2(i - i_{g2}) + 4i = v_{g1} \quad (5.6)$$

Da solução

$$i = \frac{v_{g1}}{6} + \frac{i_{g2}}{3} \quad (5.7)$$

também obtida, anteriormente, vemos que a corrente  $i$  é composta de duas outras, uma devida a cada entrada.

Se  $i_1$  é componente de  $i$  devida apenas a  $v_{g1}$ , isto é, com  $i_{g2} = 0$ , então por (5.6) temos

$$2(i_1 - 0) + 4i_1 = v_{g1} \quad (5.8)$$

Similarmente, se  $i_2$  é a componente de  $i$  devida apenas a  $i_{g2}$ , isto é, com  $v_{g1} = 0$ , então de (5.6) temos

$$2(i_2 - i_{g2}) + 4i_2 = 0 \quad (5.9)$$

Somando (5.8) e (5.9), temos

$$2(i_1 - 0) + 4i_1 + 2(i_2 - i_{g2}) + 4i_2 = v_{g1} + 0$$

ou

$$2[(i_1 + i_2) - i_{g2}] + 4(i_1 + i_2) = v_{g1} \quad (5.10)$$

Comparando este resultado com (5.6), vemos que

$$i = i_1 + i_2$$

Também resolvendo (5.8) e (5.9), temos

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{v_{g1}}{6} \\ i_2 &= \frac{i_{g2}}{3} \end{aligned} \quad (5.11)$$

que confere com os dois componentes dados em (5.7).

Alternativamente, podemos obter os componentes de  $i$  diretamente do circuito da Figura 5.2. Para calcular  $i_1$  precisamos fazer com que a fonte de corrente  $i_{g2}$  seja zero. Visto que  $i_{g2} = 0$  é a equação de um circuito aberto, isto é conseguido trocando-se no circuito a fonte de corrente por um circuito aberto. Esta operação de fazer a fonte igual a zero é muitas vezes “cruelmente” referida como “matando” a fonte ou tornando a fonte “morta”. O circuito resultante, neste caso, é mostrado na Fig. 5.4 (a), da qual é fácil ver, usando a lei de Ohm, que  $i_1$ , a componente de  $i$  devida apenas à fonte  $v_{g1}$ , é dada pela primeira equação de (5.11).

Para encontrar  $i_2$ , a componente de  $i$  devida somente a  $i_{g2}$ , necessitamos ter  $v_{g1} = 0$ , a equação de um curto-circuito. Então, para matar uma fonte de tensão como  $v_{g1}$  vamos trocá-la por um circuito aberto, como mostrado na Figura 5.4 (b). Usando divisão de corrente, é fácil ver que  $i_2$  é dada pela segunda equação de 5.11.

O método ilustrado neste exemplo é chamado de “superposição”, por termos superposto, ou somado algebricamente, as componentes de cada fonte independente, atuando isoladamente, para obter o resultado

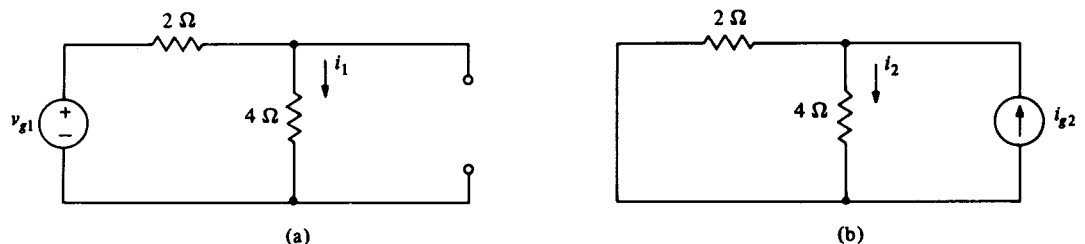


FIGURA 5.4 Circuito da Figura 5.2 com (a) a fonte de corrente morta; (b) a fonte de tensão morta

total. O princípio da superposição se aplica a qualquer circuito linear com duas ou mais fontes, pois as equações do circuito são equações *lineares* (equações de primeiro grau). Isto pode ser visto de (5.3) e da natureza das relações  $v-i$  para os elementos lineares. Em particular, no caso de circuitos resistivos, a resposta pode ser encontrada pelo uso da regra de Cramer, e é claramente uma soma de parcelas, cada uma devida somente a uma fonte independente. (Expandindo o determinante do numerador por cofatores da coluna contendo as fontes, claramente revela isto.)

A linearidade das equações de circuito habilita-nos a somar (5.8) e (5.9) e ver em (5.10) que a resposta foi a soma de cada resposta individual. Por exemplo, podemos dizer que

$$2i_1 + 2i_2 = 2(i_1 + i_2)$$

porque estas expressões são lineares. Entretanto, *não podemos* dizer que

$$2(i_1 + i_2)^2 = 2i_1^2 + 2i_2^2$$

porque estas são expressões quadráticas e não expressões lineares.

A superposição nos conduz a analisar circuitos lineares com mais de uma fonte independente para a análise de circuitos com somente uma entrada. Isto é normalmente vantajoso, pois podemos usar as propriedades de redução de redes, tais como resistência equivalente e divisão de tensão, na análise de circuitos com entrada única. Enunciamos formalmente o princípio da superposição como se segue:

Em qualquer circuito resistivo linear contendo duas ou mais fontes independentes, qualquer tensão (ou corrente) do circuito pode ser calculada como a soma algébrica de todas as tensões (ou correntes) individuais causadas pela atuação isolada de cada fonte independente, isto é, com todas as outras fontes independentes mortas.

### EXEMPLO 5.5

Como segundo exemplo, vamos encontrar a tensão  $v$  em um circuito contendo três fontes independentes, mostrado na Fig. 5.5. Para ilustrar a declaração que a resposta é a soma das parcelas, sendo cada uma devida a apenas uma fonte independente, resolveremos primeiro o circuito pela forma convencional. Então, para contrastar os métodos, empregaremos a superposição.

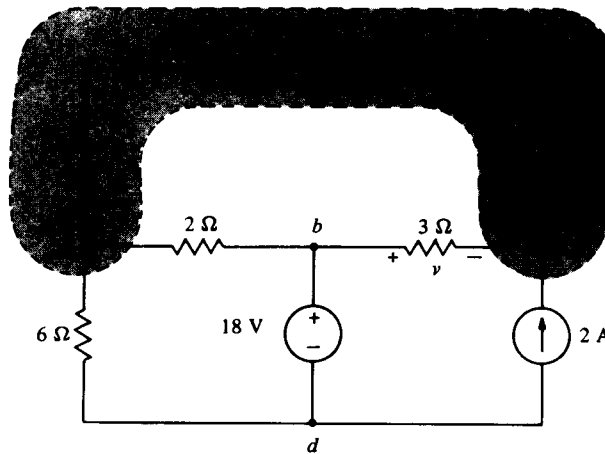


FIGURA 5.5 Circuito com três fontes

Para ilustrar o efeito de cada fonte na resposta, designaremos as fontes como

$$\begin{aligned} v_{g1} &= 6 \text{ V} \\ i_{g2} &= 2 \text{ A} \\ v_{g3} &= 18 \text{ V} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Tomando  $d$  como o nó de referência, então a tensão do nó em  $b$  e  $v_{g3}$  em  $c$  é  $v_{g3} - v$ , e em  $a$  é  $v_{g3} - v + v_{g1}$ . A equação nodal no nó genérico é então

$$\frac{v_{g3} - v + v_{g1}}{6} + \frac{-v + v_{g1}}{2} - \frac{v}{3} - i_{g2} = 0 \quad (5.13)$$

da qual temos

$$v = \frac{2}{3}v_{g1} - i_{g2} + \frac{1}{6}v_{g3} \quad (5.14)$$

Então, vemos que  $v$  é a soma das parcelas devidas a cada fonte individual. Finalmente, substituindo (5.12) em (5.14), temos

$$v = 4 - 2 + 3 = 5 \text{ V} \quad (5.15)$$

Resolvendo para  $v$ , agora pelo método de superposição, podemos escrever

$$v = v_1 + v_2 + v_3 \quad (5.16)$$

onde  $v_1$  é a parcela devida somente à fonte de 6 V (com as fontes de 2 A e de 18 V mortas),  $v_2$  é a parcela devida somente à fonte de 2 A (com as duas fontes de tensão mortas) e  $v_3$  é a parcela devida somente à fonte de 18 V (com as fontes de 6 V e 2 A mortas). Os circuitos mostrando  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  são dados nas Figs. 5.6 (a), (b) e (c), respectivamente. Na Fig. 5.6 (a), matar a fonte de 18 V coloca os nós  $b$  e  $d$  juntos; na Fig. 5.6 (b), matar as duas tensões coloca os nós  $a$  e  $c$  juntos e (b) e (d) juntos; etc.

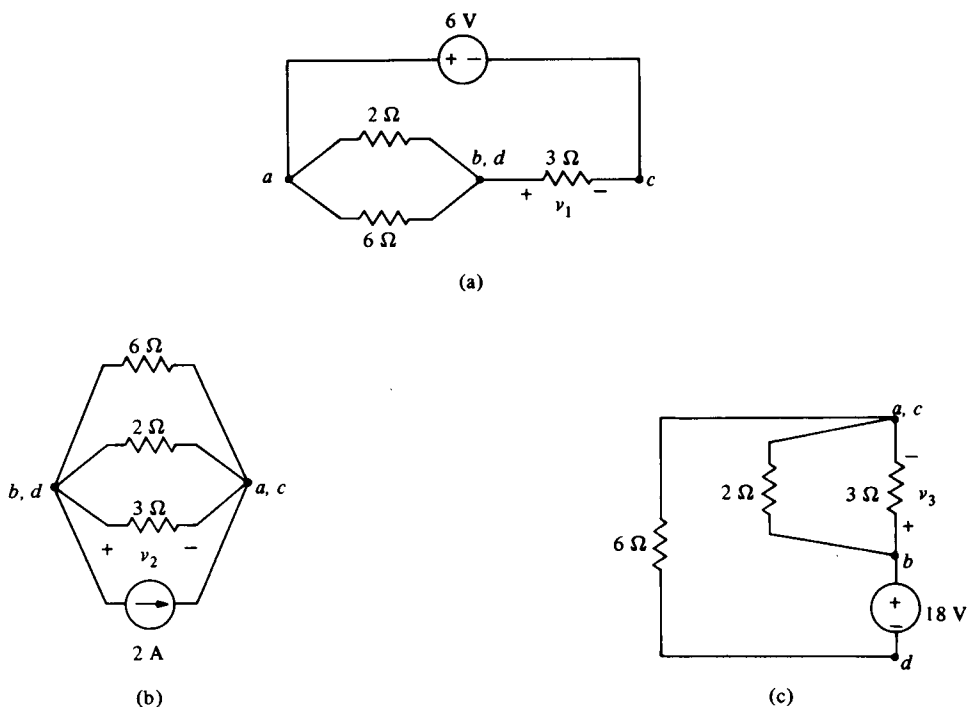


FIGURA 5.6 Circuito da Fig. 5.5 com várias fontes mortas

Da Figura 5.6 é quase trivial obter

$$\begin{aligned} v_1 &= 4 \text{ V} \\ v_2 &= -2 \text{ V} \\ v_3 &= 3 \text{ V} \end{aligned}$$

que são os valores dados em (5.15).

### EXEMPLO 5.6

Para ilustrar superposição onde há uma fonte dependente presente, consideraremos o circuito da Fig. 5.7, onde se deseja encontrar potência entregue ao resistor de 3 Ω. Inicialmente vamos deixar claro que a potência não é *uma combinação linear* de tensões ou correntes.

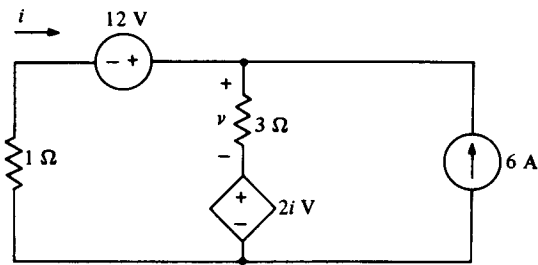


FIGURA 5.7 Circuito com uma fonte dependente

No caso em que estamos considerando, temos

$$p = \frac{v^2}{3}$$

que é uma expressão quadrática e não uma expressão *linear*. Portanto, a superposição *não* pode ser empregada diretamente para a obtenção da potência. Isto é, *não podemos* encontrar a potência devida a cada fonte independente isoladamente e somar estes resultados para obter a potência total. Entretanto, *podemos* encontrar  $v$  por superposição e, a seguir, obter  $p$ .

Tomando  $v_1$  como sendo uma componente de  $v$  quando a fonte de 12 V está atuando sozinha, [Fig. 5.8 (a)] e  $v_2$  sendo a componente de  $v$  devido somente à fonte de 6 A [Fig. 5.8 (b)], temos, como antes,

$$v = v_1 + v_2$$

Note-se que a corrente  $i$  fornecida pela fonte dependente também tem duas componentes, que designaremos como  $i_1$  e  $i_2$ , devidas a cada fonte isoladamente. Resolvendo para  $v_1$  na Fig. 5.8 (a) e  $v_2$  na Fig. 5.8 (b) temos

$$v_1 = 6 \text{ V}, \quad v_2 = 9 \text{ V}$$

e, portanto,  $v = 15 \text{ V}$ . A potência será dada por

$$p = \frac{(15)^2}{3} = 75 \text{ W}$$

Existem pelo menos três aspectos que são mostrados no último exemplo. Primeiro, como já mencionado, não podemos usar superposição diretamente para calcular a potência, mas podemos empregá-la para obter

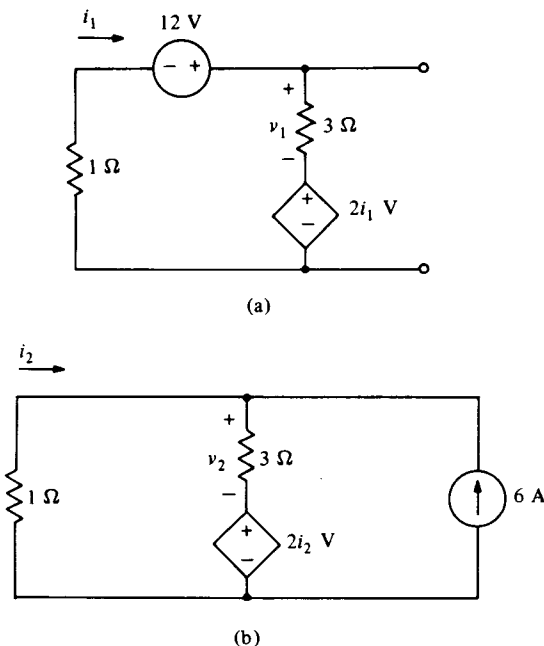


FIGURA 5.8 Circuito da Fig. 5.7 (a) matando a fonte de corrente; (b) matando a fonte de tensão

a corrente ou a tensão, das quais a potência é então calculada. Segundo, na aplicação de superposição, *somente* fontes independentes podem ser mortas, *nunca* fonte dependentes. Finalmente, superposição é freqüentemente um método pobre para análise de circuitos com fontes dependentes, porque cada um dos circuitos de entrada única é freqüentemente quase tão difícil de analisar quanto o circuito original. Por exemplo, existem duas malhas na Fig. 5.7, o circuito original, e é conhecida uma corrente de malha. Portanto, apenas uma aplicação de LKT é necessária, através da malha da esquerda, para calcular o valor da corrente no resistor de  $1 \Omega$ . Este é também exatamente o caso no circuito da Fig. 5.8(b).

## EXERCÍCIOS

- 5.2.1 Resolva o Exerc. 4.2.3 usando superposição.  
 5.2.2 Resolva o Prob. 3.14, usando superposição.  
 5.2.3 Calcule a potência entregue aos resistores de  $3 \Omega$  da Fig. 5.8 (a) e da Fig. 5.8 (b) e mostre que a sua soma *não* é igual à potência total entregue ao resistor de  $3 \Omega$  na Fig. 5.7.  
*Resposta:* 12,27 W

## 5.3

### Teoremas de Thévenin e de Norton

Nas seções anteriores vimos que a análise de alguns circuitos pode ser muito simplificada pela aplicação do princípio da superposição. Entretanto, como vimos no último exemplo da Seção 5.2, a superposição sozinha pode não reduzir a complexidade de um problema, mas seu uso pode levar a um trabalho adicional. Nesta seção consideraremos os *teoremas de Thévenin e de Norton*, que serão, em muitos casos, aplicáveis para simplificar bastante o circuito a ser analisado. Como veremos, o uso de qualquer um destes teoremas habilita-nos a trocar um circuito inteiro, visto nos seus terminais, por um circuito equivalente, composto de uma fonte e um resistor. Então, podemos determinar a tensão ou a corrente em um único elemento de um circuito complexo, trocando o restante do circuito por um resistor equivalente e uma fonte, e analisar o circuito resultante, extremamente simples.

Consideremos que o circuito possa ser separado em duas partes, como mostrado na Fig. 5.9. A parte chamada de circuito A é um circuito linear contendo resistores, fontes dependentes, ou fontes independentes. O circuito B pode conter elementos não-lineares. Adicionalmente, uma restrição é que uma fonte dependente em um circuito deva ser controlada por elementos do mesmo circuito. Isto é, nenhuma fonte dependente no circuito A pode ser controlada por uma tensão ou corrente associada a um elemento do circuito B, e vice-versa. A razão para isto se tornará clara no desenvolvimento que se segue.

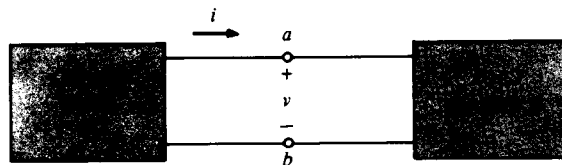


FIGURA 5.9 Circuito fracionado

Mostraremos que podemos substituir o circuito A por um *circuito equivalente*, contendo uma fonte e um resistor, de forma que, nos terminais *a-b*, as relações de tensão e corrente sejam as mesmas. Uma vez que nossa meta é a de manter as mesmas relações nos terminais *a-b*, é claro, do ponto de vista do circuito A, podemos obter o mesmo efeito se trocarmos o circuito B por uma fonte de tensão de *v* volts com a polaridade apropriada, como mostrado na Fig. 5.10. No que diz respeito ao circuito A, ele tem a mesma tensão em seus terminais, e como o circuito A em si não foi alterado, a mesma corrente

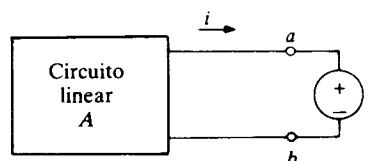


FIGURA 5.10 Troca do circuito B por uma fonte de tensão

de saída deve fluir. Obtemos agora um circuito linear, e, conseqüentemente, podemos empregar todas as propriedades que estabelecemos para tais circuitos.

Em particular, aplicando a superposição ao circuito linear que acabamos de obter, vemos que a corrente  $i$  será dada por

$$i = i_1 + i_{sc} \quad (5.17)$$

onde  $i_1$  é produzida pela fonte de tensão  $v$  com a rede  $A$  morta (todas as suas fontes independentes foram mortas) e  $i_{sc}$  é a corrente de *curto-circuito* produzida por alguma fonte no circuito  $A$  com  $v$  morta (trocada por um curto-circuito). Estes dois casos são mostrados na Fig. 5.11.

Uma vez que as fontes independentes estão mortas no circuito  $A$  [Fig. 5.11 (a)], dos terminais da fonte  $v$  vemos somente um circuito resistivo, cuja resistência equivalente será chamada de  $R_{th}$ . Pela lei de Ohm, temos, portanto,

$$i_1 = -\frac{v}{R_{th}} \quad (5.18)$$

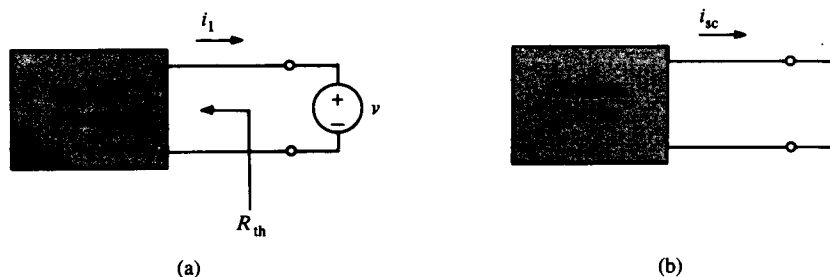


FIGURA 5.11 Circuitos obtidos pela aplicação da superposição

De (5.17) a expressão para a corrente  $i$  é então

$$i = -\frac{v}{R_{th}} + i_{sc} \quad (5.19)$$

Visto que (5.19) descreve a rede  $A$  no caso geral, ela deve se manter para qualquer condição em seus terminais. Suponha que os terminais estejam abertos. Neste caso,  $i = 0$ , e designaremos a tensão por  $v = v_{oc}$ , a tensão de circuito aberto. Substituindo estes valores em (5.19), temos

$$0 = -\frac{v_{oc}}{R_{th}} + i_{sc}$$

ou

$$v_{oc} = R_{th} i_{sc} \quad (5.20)$$

Eliminando  $i_{sc}$  em (5.19) e (5.20) temos

$$v = -R_{th} i + v_{oc} \quad (5.21)$$

As relações dadas em (5.19) e (5.21) podem ser usadas para a obtenção de dois circuitos muito empregados, que são equivalentes ao circuito  $A$ . Historicamente, o primeiro destes foi o *circuito equivalente de Thévenin*, nome dado em honra ao engenheiro de telégrafo Charles Leon Thévenin (1857-1926), que publicou seus resultados em 1883. [O circuito poderia, mais apropriadamente, receber o nome do grande físico alemão H. L. F. von Helmholtz (1821-1894), que deu um exemplo limitado, em 1853].

O circuito equivalente de Thévenin é simplesmente um que seja descrito por (5.21), com a tensão nos terminais  $v$  e a corrente  $i$ , orientadas como na Fig. 5.9. Para desenhar o circuito, notamos que  $v$  é a soma de dois termos, que, portanto, deve representar dois elementos em série, cujas tensões, nos terminais, se somam, dando o valor  $v$ . O primeiro termo, evidentemente, corresponde a uma resistência  $R_{th}$ , chamada de *resistência de Thévenin* e o segundo termo corresponde a uma fonte de tensão nos terminais com valor  $v_{oc}$ . O resultado é mostrado na Fig. 5.12, onde as linhas tracejadas representam as conexões ao circuito externo  $B$  na Fig. 5.9. A análise do circuito irá mostrar que (5.21) é satisfeita. A afirmativa que a Fig. 5.12 é equivalente, nos terminais, à Fig. 5.9 é conhecida como *teorema de Thévenin*.

Outro circuito que é equivalente ao circuito  $A$  da Fig. 5.9 é o obtido de (5.19). Este circuito é o dual do circuito de Thévenin e é chamado de *circuito equivalente de Norton*, em homenagem ao engenheiro

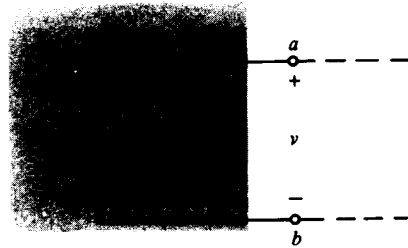


FIGURA 5.12 Circuito equivalente de Thévenin do circuito A da Fig. 5.9

americano E. L. Norton (1898- ), cujo trabalho foi apenas publicado cerca de 50 anos depois do de Thévenin. De (5.19) vemos que  $i$  é a soma de dois termos, que devem então representar dois elementos em paralelo cujas correntes se somam resultando o valor  $i$ . O primeiro termo provém da resistência de Thévenin  $R_{th}$ , e o segundo termo corresponde a uma fonte de corrente  $i_{sc}$ . O resultado é mostrado na Fig. 5.13, e a afirmação de equivalência das Figs. 5.9 e 5.13 é o *teorema de Norton*. Novamente, as linhas tracejadas representam as conexões ao circuito externo  $B$ .

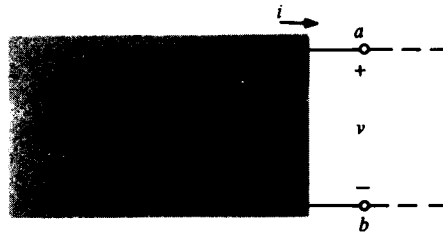


FIGURA 5.13 Circuito equivalente de Norton da Fig. 5.9

### EXEMPLO 5.7

Como exemplo, vamos calcular os circuitos equivalentes de Thévenin e de Norton para a rede à esquerda dos terminais  $a$ - $b$ , na Fig. 5.14. Então, empregando os resultados, vamos obter a corrente  $i$ , como mostrado, em termos da resistência de carga  $R$ .

Para obter o circuito de Thévenin, precisamos encontrar  $R_{th}$  e  $v_{oc}$ . A resistência de Thévenin  $R_{th}$  é encontrada a partir do circuito morto (as duas fontes independentes igualadas a zero), mostrado na

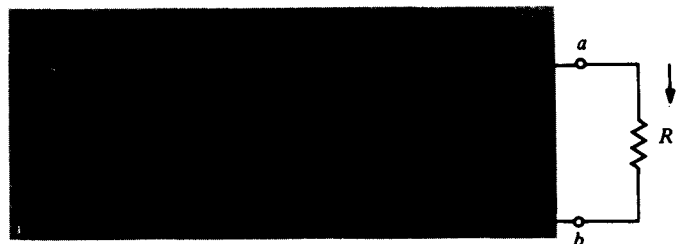


FIGURA 5.14 Circuito com uma resistência de carga variável

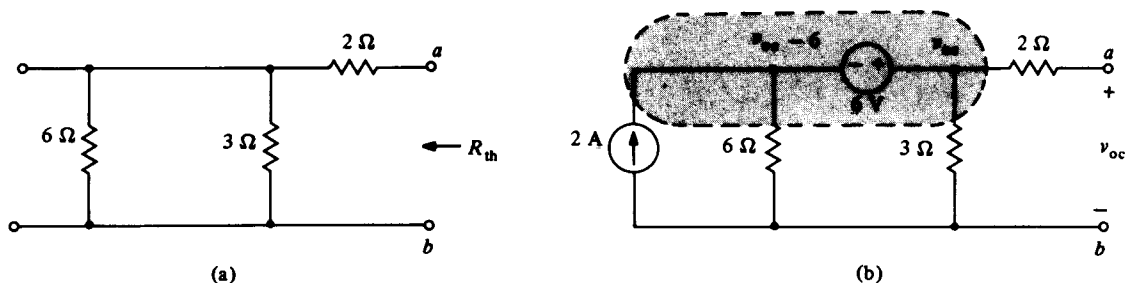


FIGURA 5.15 Circuitos para se obter o circuito de Thévenin da Fig. 5.14

Fig. 5.15(a), da qual temos

$$R_{th} = 2 + \frac{(3)(6)}{3 + 6} = 4 \Omega$$

A tensão do circuito aberto  $v_{oc}$  é obtida da Fig. 5.15(b). Visto que os terminais  $a-b$  estão abertos, a tensão  $v_{oc}$  aparece sobre o resistor de  $3 \Omega$ . Rotulando os nós como mostrado, com o nó  $b$  como o de referência, e escrevendo a equação nodal para o nó genérico, mostrado tracejado, temos

$$\frac{v_{oc} - 6}{6} + \frac{v_{oc}}{3} = 2$$

ou

$$v_{oc} = 6 \text{ V}$$

O circuito equivalente de Thévenin, com a resistência de carga  $R$  conectada, é mostrado na Fig. 5.16. Note-se que a polaridade de  $v_{oc} = 6 \text{ V}$  é tal que resulta na polaridade correta da tensão nos terminais  $a-b$ , quando estes estão abertos.

A corrente  $i$  na Fig. 5.14 é a mesma da Fig. 5.16 que, no último caso, é fácil ver que será

$$i = \frac{6}{R + 4}$$

Podemos usar este resultado para encontrar a corrente na carga, para qualquer valor de  $R$  que escolhermos.

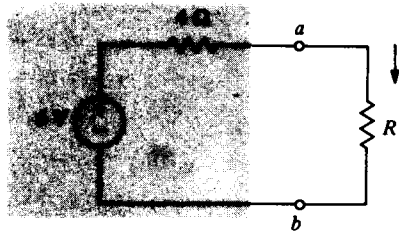


FIGURA 5.16 Equivalente de Thévenin do circuito da Fig. 5.14, com carga

### EXEMPLO 5.8

Para obter o equivalente Norton, usamos  $R_{th} = 4 \Omega$ , como antes e calculamos  $i_{sc}$ . Podemos curto-circuitar os terminais  $a$  e  $b$  e calcular  $i_{sc}$  do circuito resultante, ou podemos usar o  $v_{oc}$ , que já temos, e obter  $i_{sc}$  de (5.20). Neste último caso, temos

$$i_{sc} = \frac{6}{4} = 1,5 \text{ A}$$

O circuito equivalente de Norton, com a carga  $R$  conectada, é mostrado na Fig. 5.17. Usando divisão de corrente, temos, como antes,

$$i = \left( \frac{4}{R + 4} \right) (1,5) = \frac{6}{R + 4}$$

O sentido da fonte de  $1,5 \text{ A}$  é tal que, quando  $R$  é trocada por um curto,  $i_{sc} = 1,5 \text{ A}$  tem o sentido correto. Neste caso e no de Thévenin da Fig. 5.16, é uma tarefa simples colocar as fontes corretamente, mas em alguns exemplos complexos precisa-se de prática para saber a polaridade correta.



FIGURA 5.17 Equivalente de Norton do circuito da Fig. 5.14, com carga



### EXEMPLO 5.9

Vamos agora considerar um exemplo contendo uma fonte dependente, como a da Fig. 5.18(a). Suponha que queiramos o circuito equivalente de Norton nos terminais  $a$ - $b$ . Precisaremos, neste caso, de  $R_{th}$  definido para o circuito morto da Fig. 5.18(b) e  $i_{sc}$  mostrado na Fig. 5.18 (c).

Podemos encontrar  $i_{sc}$  da Fig. 5.18 (c) notando que

$$i_2 = 10 - i_1 - i_{sc}$$

e escrevendo as duas equações de malha,

$$-4(10 - i_1 - i_{sc}) - 2i_1 + 6i_1 = 0$$

$$-6i_1 + 3i_{sc} = 0$$

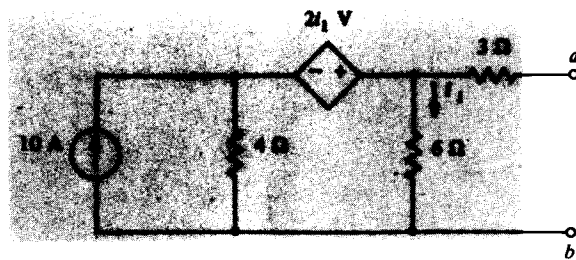
Eliminando  $i_1$ , temos

$$i_{sc} = 5 \text{ A} \quad (5.22)$$

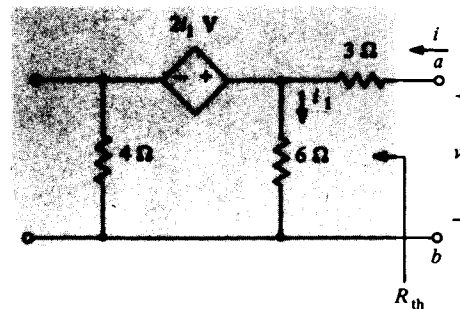
Não podemos calcular  $R_{th}$  da Fig. 5.18 (b) simplesmente pelo cálculo da resistência equivalente, devido a presença da fonte dependente. Entretanto, podemos excitar o circuito com uma tensão  $v$  (ou uma corrente  $i$ ) em seus terminais e calcular o  $i$  (ou  $v$ ) resultante. Então  $R_{th} = v/i$ . Alternativamente, podemos calcular  $v_{oc}$  como para um circuito de Thévenin, e obter  $R_{th}$  (de 5.20). Este é o método que iremos empregar.

Para encontrar  $v_{oc}$ , recorreremos à Fig. 5.19, onde temos

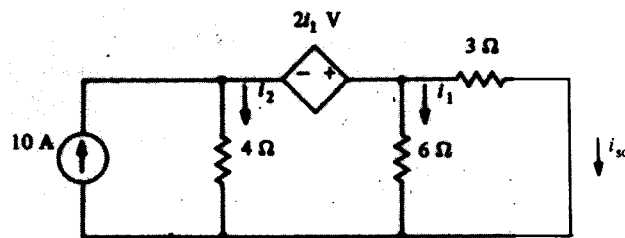
$$v_{oc} = 6i_1$$



(a)



(b)



(c)

FIGURA 5.18 (a) Circuito a ser realizado com (b) suas fontes mortas; (c) seus terminais curto-circuitados

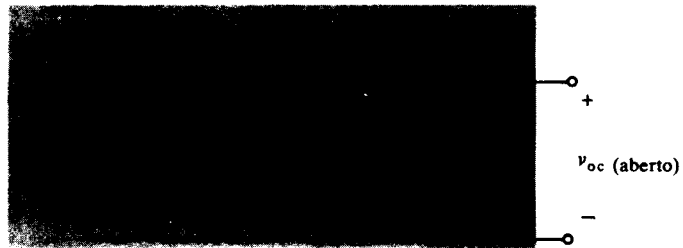


FIGURA 5.19 Circuito da Fig. 5.18 (a) com seus terminais abertos

e, ao redor da malha central,

$$-4(10 - i_1) - 2i_1 + 6i_1 = 0$$

Destas equações encontramos  $v_{oc} = 30 \text{ V}$ , e então

$$R_{th} = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = \frac{30}{5} = 6 \Omega$$

### EXEMPLO 5.10

Como exemplo final, vamos encontrar o equivalente de Thévenin do circuito da Fig. 5.20. De início, vemos por inspeção que como não há fontes independentes presentes, devemos ter

$$v_{oc} = i_{sc} = 0 \quad (5.23)$$

Também, o circuito morto é o próprio circuito dado, de forma que  $R_{th}$  é simplesmente a resistência vista nos terminais da Fig. 5.20. Com base em (5.23), não podemos usar  $v_{oc} = R_{th} i_{sc}$  para encontrar  $R_{th}$ , como fizemos no exemplo anterior. O único recurso que temos é excitar o circuito nos seus terminais e calcular  $R_{th}$  destes resultados.

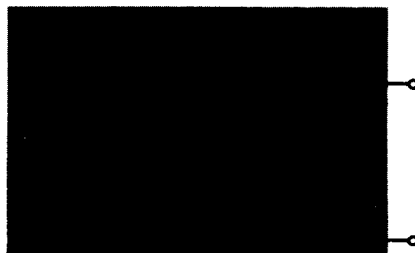


FIGURA 5.20 Circuito com uma fonte dependente

Por exemplo, suponha que excitemos o circuito com uma fonte de corrente de 1 A, como mostrado na Fig. 5.21. Então temos

$$R_{th} = \frac{v}{1} = v$$

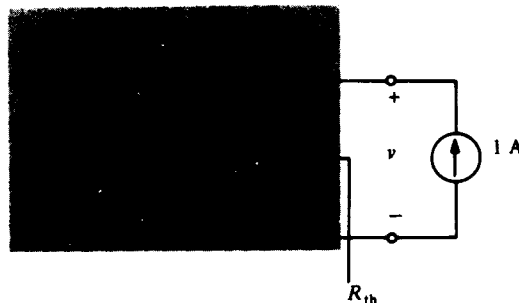


FIGURA 5.21 Circuito da Fig. 5.20 excitado por uma fonte de corrente

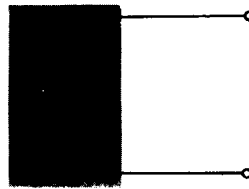


FIGURA 5.22 Equivalente de Thévenin da Fig. 5.20

Onde  $v$  é a tensão resultante nos terminais. Tomando o nó inferior como o de referência, as tensões dos nós de não-referência serão como mostrado. A análise nodal dá

$$\frac{v - 2i_1}{4} + \frac{v}{6} = 1$$

onde

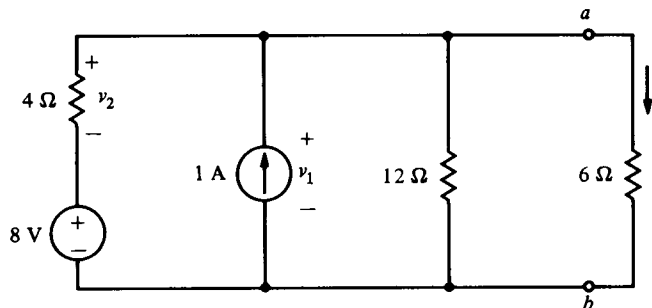
$$v = 6i_1$$

Destas equações temos  $v = 3 \text{ V}$ , e logo  $R_{th} = 3 \Omega$ . O equivalente de Thévenin (bem como o equivalente de Norton) é mostrado na Fig. 5.22.

## EXERCÍCIOS

- 5.3.1 Substitua a rede à esquerda dos terminais  $a$ - $b$  pelo seu circuito equivalente de Thévenin e use este resultado para calcular o valor de  $i$ .

Resposta:  $v_{OC} = 9 \text{ V}$ ,  $R_{th} = 3 \Omega$ ,  $i = 1 \text{ A}$



EXERCÍCIO 5.3.1

- 5.3.2 Substitua tudo no circuito do Ex. 5.3.1, exceto a fonte de 1 A, pelo seu circuito equivalente de Thévenin e use o resultado para calcular  $v$ .  
Resposta:  $v_{OC} = 4 \text{ V}$ ,  $R_{th} = 2 \Omega$ ,  $v_1 = 6 \text{ V}$
- 5.3.3 Substitua tudo no circuito do Ex. 5.3.1, exceto o resistor de  $4 \Omega$ , pelo seu equivalente de Norton e use o resultado para calcular  $v_2$ .  
Resposta:  $i_{SC} = -1 \text{ A}$ ,  $R_{th} = 4 \Omega$ ,  $v_1 = -2 \text{ V}$

## 5.4

### Fontes Práticas

No Capítulo 1 definimos fontes independentes e afirmamos que elas eram elementos *ideais*. Uma bateria ideal de 12 V, por exemplo, fornece 12 V entre seus terminais, independente do valor da carga conectada a eles. Entretanto, uma bateria de 12 V real, ou *prática*, fornece 12 V quando seus terminais estão abertos e fornece menos de 12 V quando uma corrente flui através de seus terminais. Uma fonte de tensão prática então apresenta uma queda de tensão interna quando uma corrente flui através de seus terminais, e esta queda interna diminui a tensão de saída em seus terminais.



FIGURA 5.23 Fonte de tensão prática conectada a uma carga  $R_L$

Podemos representar uma fonte prática pelo modelo matemático da Fig. 5.23, consistindo numa fonte ideal  $v_g$  em série com uma resistência interna  $R_g$ . A tensão  $v$  nos terminais da fonte dependem agora da corrente  $i$  que flui pela fonte. A relação é facilmente determinada como sendo

$$v = v_g - R_g i \quad (5.24)$$

Assim, sob a condição de circuito aberto ( $i = 0$ ) temos  $v = v_g$ , e sob a condição de curto-circuito ( $v = 0$ ) temos  $i = v_g/R_g$ . Se  $R_g > 0$ , como é em uma fonte prática, a fonte não pode nunca fornecer uma corrente infinita, como o pode uma fonte ideal.

Para uma dada fonte de tensão prática (fixados os valores de  $v_g$  e  $R_g$  na Fig. 5.23), o valor da resistência de carga  $R_L$  determina o valor da corrente que flui dos terminais. Por exemplo, na Fig. 5.23, a corrente de carga é

$$i = \frac{v_g}{R_g + R_L} \quad (5.25)$$

Também, pela divisão de tensões, temos

$$v = \frac{R_L v_g}{R_g + R_L} \quad (5.26)$$

Portanto, como variamos  $R_L$ , tanto  $i$  como  $v$  variam. Um esboço da  $v$  versus  $R_L$  é mostrado na Fig. 5.24, em conjunto com o caso ideal, que está em tracejado. Para grandes valores de  $R_L$  comparados aos de  $R_g$ ,  $v$  é bem próximo do valor ideal de  $v_g$ . (Se  $R_L$  é infinita, correspondendo a um circuito aberto, então  $v$  é  $v_g$ .)

Podemos substituir a fonte de tensão prática da Fig. 5.23 por uma fonte de corrente prática, reescrevendo (5.24) como

$$i = \frac{v_g}{R_g} - \frac{v}{R_g}$$

a qual, se definimos

$$i_g = \frac{v_g}{R_g} \quad (5.27)$$

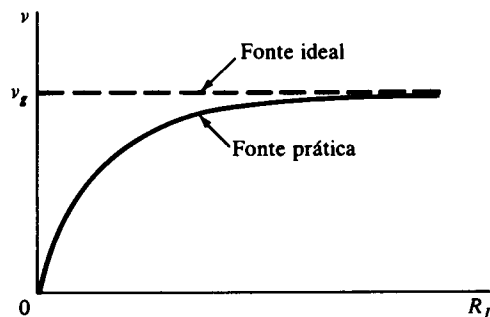


FIGURA 5.24 Características das fontes de tensão prática e ideal

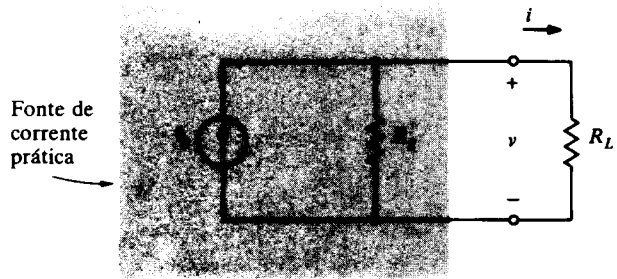


FIGURA 5.25 Fonte de corrente prática conectada a uma carga  $R_L$

torna-se

$$i = i_g - \frac{v}{R_g}$$

Um circuito descrito por esta equação com a tensão  $v$  e a corrente  $i$  é mostrado no retângulo sombreado da Fig. 5.25. O circuito é então uma fonte de corrente prática e pode-se ver que é composto de uma fonte de corrente ideal em paralelo com uma resistência interna.

As Figuras 5.23 e 5.25 são equivalentes em seus terminais se  $R_g$  é a mesma em ambos os casos e se (5.27) se mantém. Esta equivalência é válida, além disso, se as fontes ideais forem fontes independentes ou dependentes. No caso de fontes independentes, as duas fontes práticas são simplesmente os equivalentes de Thévenin e de Norton do mesmo circuito.

Por divisão de corrente, encontramos, na Fig. 5.25,

$$i = \frac{R_g i_g}{R_g + R_L} \quad (5.28)$$

Por conseguinte, para uma fonte de corrente dada, fixados os valores de  $i_g$  e de  $R_g$ , a corrente de carga depende de  $R_L$ . Um esboço de  $i$  versus  $R_L$  é mostrado na Fig. 5.26, em conjunto com o caso ideal, que é tracejado.

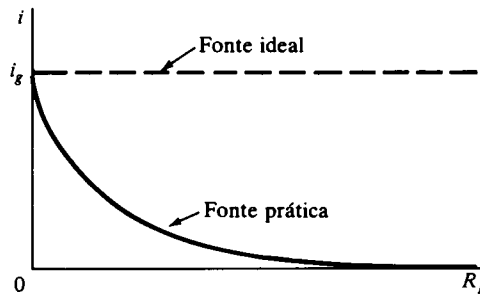


FIGURA 5.26 Características de fontes de corrente ideal e prática

### EXEMPLO 5.11

Freqüentemente, a análise de redes pode ser bastante simplificada pela troca de uma fonte de tensão prática por uma fonte de corrente prática, e vice-versa, empregando-se as Figs. 5.23 a 5.25, ou, equivalentemente, por meio dos teoremas de Norton e de Thévenin. Por exemplo, suponha que desejamos encontrar a corrente  $i$  mostrada na Fig. 5.27. Podemos resolver o problema de várias formas, tais como substituindo

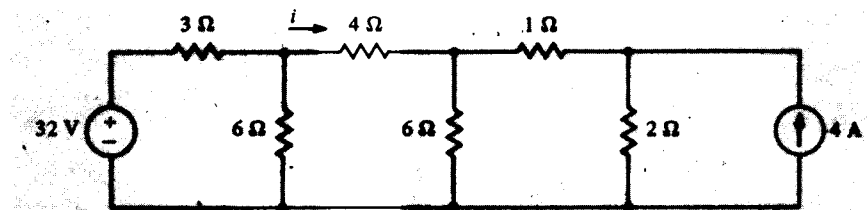


FIGURA 5.27 Circuito com duas fontes práticas

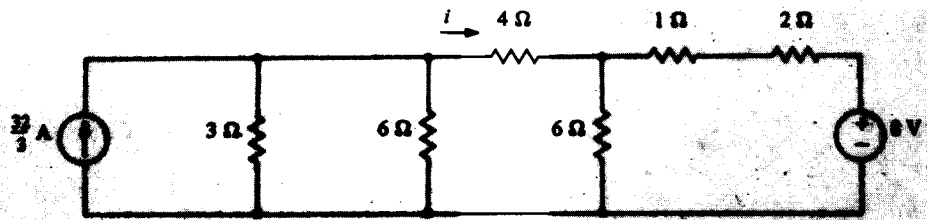
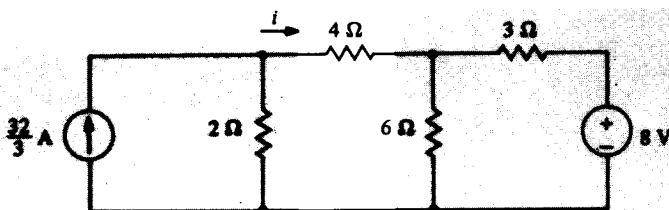


FIGURA 5.28 Resultado de duas transformações aplicadas à Fig. 5.27

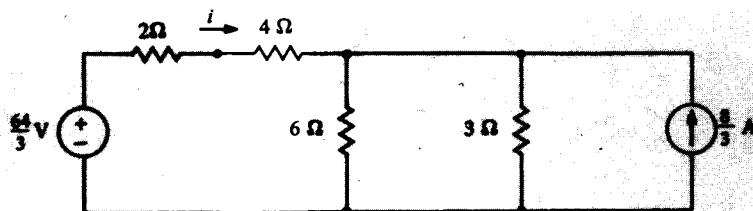
tudo, menos o resistor de  $4\ \Omega$ , por seu equivalente de Thévenin e então encontrar  $i$ . Contudo, em vez disso, ilustraremos o método de transformações sucessivas de fontes.

Vamos iniciar pela troca da fonte de  $32\ \text{V}$  e a resistência interna de  $3\ \Omega$  por uma fonte prática de corrente de resistência interna de  $3\ \Omega$  e por uma fonte ideal de  $32/3\ \text{A}$ . Então vamos trocar a fonte de  $4\ \text{A}$  e  $2\ \Omega$  de resistência interna por uma fonte de tensão de  $2(4) = 8\ \text{V}$  e uma resistência interna de  $2\ \Omega$ . Estamos aplicando, respectivamente, os teoremas de Norton e de Thévenin, ou, equivalentemente, (5.27). Os resultados das transformações destas duas fontes são mostrados na Fig. 5.28.

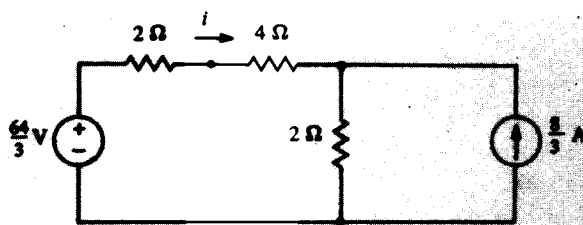
Podemos agora combinar as resistências em paralelo de  $3\ \Omega$  e  $6\ \Omega$ , com as resistências em série de  $1\ \Omega$  e de  $2\ \Omega$ , como mostrado na Fig. 5.29(a), e repetir o procedimento de transformação de fontes.



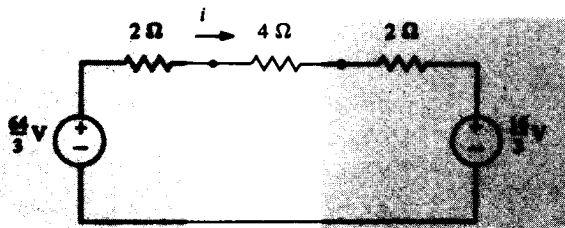
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.29 Passos na obtenção de  $i$  na Fig. 5.28

Continuando o processo, como mostrado nas Figs. 5.29(b), (c) e (d), finalmente chegamos a um circuito equivalente (no que se relaciona à corrente  $i$ ), que pode ser analisado por inspeção. Neste caso, da Fig. 5.29(d), a resposta é

$$i = \frac{\frac{64}{3} - \frac{16}{3}}{2 + 4 + 2} = 2 \text{ A}$$

Este procedimento pode ser visto como indesejavelmente longo, mas deve-se observar que a maioria dos passos pode ser realizada mentalmente.

### EXEMPLO 5.12

Como observação final desta seção, freqüentemente podemos combinar fontes, da mesma forma como fazemos com resistências, para obter fontes equivalentes. Por exemplo, se estamos interessados somente em  $i$  na Fig. 5.29(d), podemos combinar os três resistores em série, como sabemos, mas podemos também combinar as fontes em série, como fizemos na Seq. 2.5. Elas representam uma fonte total de  $64/3 - 16/3 = 16 \text{ V}$  com a polaridade da fonte maior. Assim um circuito equivalente, no que se relaciona a  $i$ , é o da Fig. 5.30. De forma similar podemos combinar fontes de corrente em paralelo para obter uma fonte equivalente.

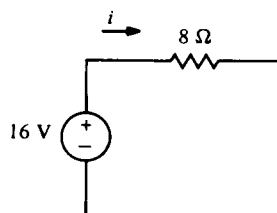
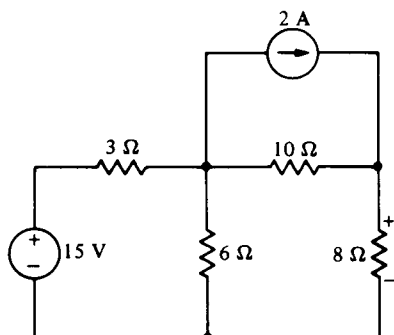


FIGURA 5.30 Circuito equivalente ao da Fig. 5.29 para cálculo de  $i$

### EXERCÍCIOS

- 5.4.1 Resolva o Ex. 5.3.1 usando transformações de fontes.  
 5.4.2 Através de transformações de fontes, substitua todo o circuito, exceto o resistor de  $8 \Omega$ , por um circuito equivalente com uma única fonte e uma única resistência  $R$ . Usando o resultado, calcule  $v$ .  
 Resposta:  $R = 12 \Omega$ ,  $v = 12 \text{ V}$



EXERCÍCIO 5.4.2

- 5.4.3 Converta todas as fontes na Figura do Ex. 4.2.3 para fontes de tensão e calcule  $v_3$ .  
 Resposta:  $20 \text{ V}$

## Transferência Máxima de Potência

Em várias aplicações na teoria de circuitos deseja-se obter a máxima potência possível que uma dada fonte prática pode entregar. É muito fácil, usando-se o teorema de Thévenin, ver-se qual o máximo de potência que uma fonte é capaz de entregar e que carga colocar na fonte para obter essa potência máxima. Isto será o objeto desta seção.

Vamos começar com a fonte prática mostrada anteriormente na Fig. 5.23, com uma resistência de carga  $R$ . A potência  $p_L$  entregue ao resistor  $R_L$  é dada por

$$p_L = \left( \frac{v_g}{R_g + R_L} \right)^2 R_L \quad (5.29)$$

e desejamos maximizar esta grandeza.

Visto que a fonte é considerada como dada,  $v_g$  e  $R_g$  estão fixados, e então  $p_L$  é uma função de  $R_L$ . Para maximizar  $p_L$  podemos fazer  $dp_L/dR_L = 0$  e resolver para  $R_L$ . De (5.29) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dp_L}{dR_L} &= v_g^2 \left[ \frac{(R_g + R_L)^2 - 2(R_g + R_L)R_L}{(R_g + R_L)^4} \right] \\ &= \frac{(R_g - R_L)v_g^2}{(R_g + R_L)^3} = 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

que resulta em

$$R_L = R_g \quad (5.31)$$

Pode ser imediatamente mostrado que

$$\left. \frac{d^2 p_L}{dR_L^2} \right|_{R_L=R_g} = -\frac{v_g^2}{8R_g^3} < 0$$

e, portanto (5.31) é a condição na qual  $p_L$  é máxima. Vemos, portanto, que a máxima potência é entregue por uma fonte prática quando a carga  $R_L$  é igual à resistência interna da fonte. Esta afirmativa é chamada algumas vezes de *teorema da máxima transferência de potência*. Foi demonstrado para uma fonte de tensão, mas, considerando o teorema de Norton, ele também se verifica para uma fonte de corrente prática.

A potência máxima que uma fonte de tensão prática pode entregar a uma carga é dada por (5.29) e (5.31) como sendo

$$p_{L_{\text{máx}}} = \frac{v_g^2}{4R_g} \quad (5.32)$$

No caso de uma fonte de corrente prática, a potência máxima entregue é

$$p_{L_{\text{máx}}} = \frac{R_g i_g^2}{4} \quad (5.33)$$

Isto pode ser visto da Fig. 5.25 e (5.31) ou por (5.32) e teorema de Norton.

Podemos estender o teorema da máxima transferência de potência para um circuito linear, em lugar de para única fonte, por meio do teorema de Thévenin. Isto é, a máxima potência é obtida de um circuito linear em um dado par de terminais, quando estes terminais têm carga igual à resistência de Thévenin, do circuito. Isto é obviamente verdadeiro, pois, pelo Teorema de Thévenin, o circuito é equivalente a uma fonte de tensão prática com resistência interna  $R_{th}$ .



### EXEMPLO 5.13

Como um exemplo, podemos retirar a potência máxima do circuito da Fig. 5.18(a) se conectamos aos terminais de carga  $a$ - $b$  uma carga com a resistência de Thévenin.

$$R_L = R_{th} = 6 \Omega$$

Como  $i_{sc} = 5 \text{ A}$  por (5.22), podemos desenhar o circuito equivalente de Norton com o valor  $R_L$  necessário, como mostrado na Fig. 5.31. A potência fornecida para a carga é dada por

$$p = \frac{900R_L}{(R_L + 6)^2}$$

a qual, para  $R_L = 6$ , fica

$$p_{\text{máx}} = 37,5 \text{ W}$$

Qualquer outro valor de  $R_L$  irá resultar num valor menor de  $p$ . Por exemplo, se  $R_L = 5 \Omega$ , então temos  $p = 37,19 \text{ W}$ , e, para  $R_L = 7 \Omega$ , temos  $p = 37,28 \text{ W}$ .

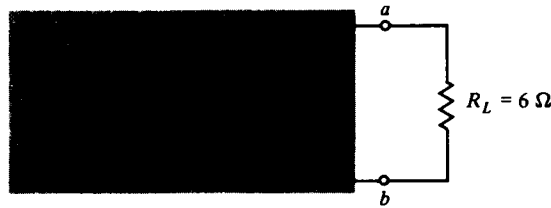
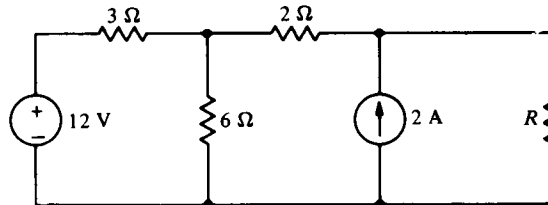


FIGURA 5.31 Circuito equivalente ao da Fig. 5.18 (a) com uma carga para a transferência máxima de potência

## EXERCÍCIOS

- 5.5.1 Calcule a potência entregue a  $R$  quando (a)  $R = 6 \Omega$ , (b)  $R = 2 \Omega$  e (c) quando  $R$  recebe a potência máxima.

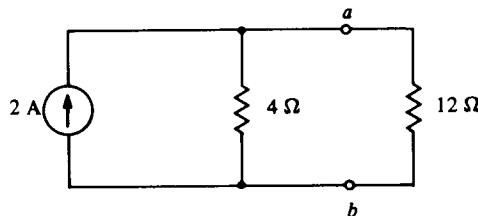
Resposta: (a) 15,36 W; (b) 14,22 W; (c) 16 W (quando  $R = 4 \Omega$ )



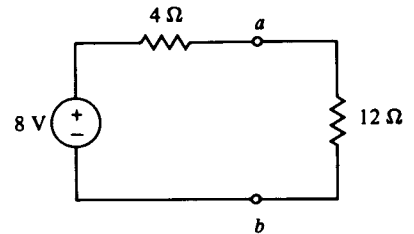
EXERCÍCIO 5.5.1

- 5.5.2 Mostre que as duas redes são equivalentes, vistas pelos terminais  $a$ - $b$ , e calcule a potência dissipada no resistor de  $4 \Omega$ , em cada caso.

Resposta: (a) 9 W; (b) 1 W



(a)



(b)

EXERCÍCIO 5.5.2

- 5.5.3 Calcule a potência máxima entregue à carga  $R_L$  na Fig. 5.23, se  $v_g$  e  $R_L > 0$  são fixados e  $R_g$  é variável.  
Resposta:  $v_g/R_L$  quando  $R_g = 0$

## 5.6

### Circuitos Equivalentes de Thévenin e Spice

O "SPICE" pode ser usado diretamente para se determinar o equivalente de Thévenin para circuitos complexos utilizando o comando .TF. Estes circuitos equivalentes são muito úteis na determinação das condições de carga para a transferência máxima de potência, como discutido na seção anterior.

#### EXEMPLO 5.14

Como exemplo da utilidade do SPICE, considere encontrar o circuito equivalente de Thévenin à esquerda de  $R_L$  na Fig. 5.23(a).

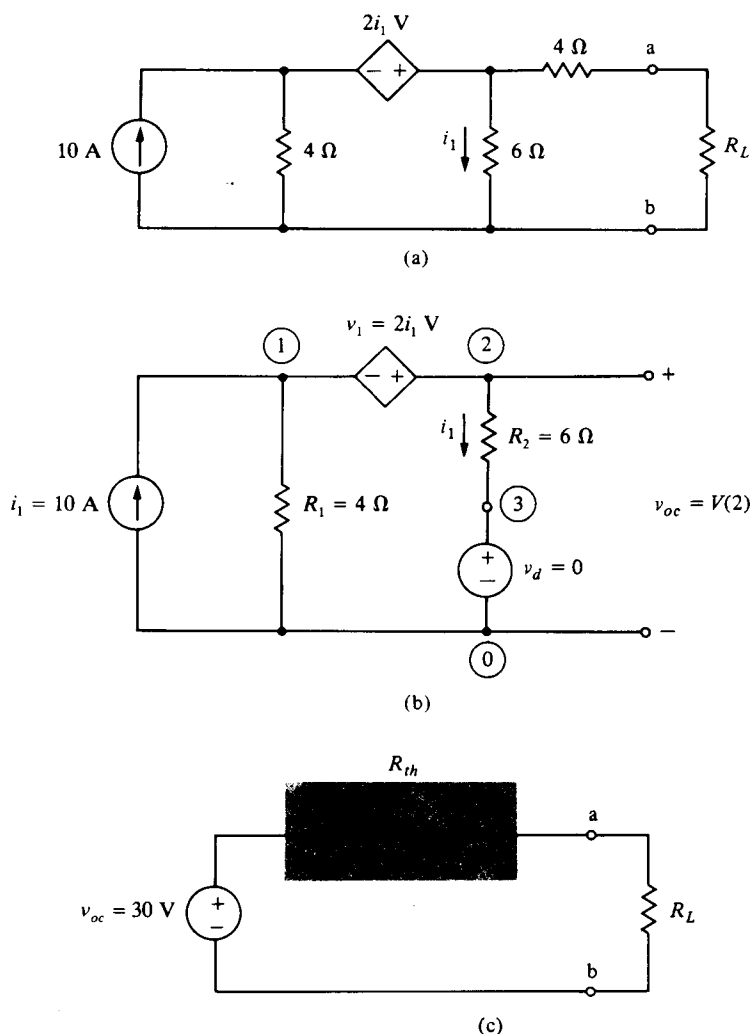


FIGURA 5.32 Circuitos para obter o equivalente de Thévenin usando o SPICE

Visto que a tensão de circuito aberto nos terminais  $a-b$  é igual à tensão através do resistor de  $6\ \Omega$  (nenhuma corrente flui pelo resistor de  $4\ \Omega$ ), precisamos apenas aplicar a simulação "SPICE" ao circuito da Fig. 5.32(b) e adicionar a resistência de  $4\ \Omega$  à resistência de saída encontrada para os terminais de saída abertos. Deve ser notado que uma fonte simulada de tensão  $v_d = 0$  foi inserida para prover a corrente necessária  $i_1$ , que define a FTCC  $v_1$ . Um arquivo de circuito para este circuito é

$i_1$ , que define a FTCC  $v_1$ . Um arquivo de circuito para este circuito é

Circuito equivalente de Thévenin para a Fig. 5.32 (b)

```

I1 0 1 DC 10
R1 1 0 4
HV1 2 1 VD 2
R2 2 3 6
VD 3 0 DC 0
.TF V(2) I1
.END
    
```

A solução para este programa é

```

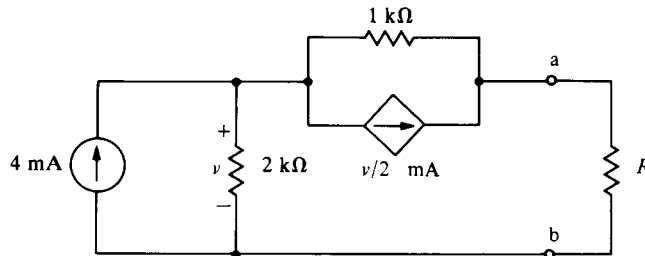
NODE      VOLTAGE      NODE      VOLTAGE      NODE      VOLTAGE
( 1)      20.0000    ( 2)      30.0000    ( 3)      0.0000
VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME      CURRENT
VD        5.000E + 00
TOTAL POWER DISSIPATION  0.00E+00 WATTS
**** SMALL-SIGNAL CHARACTERISTICS
V(2)/I1 = 3.000E + 00
INPUT RESISTANCE AT I1 = 2.000E+00
OUTPUT RESISTANCE AT V(2) = 3.000E+0
    
```

A tensão de circuito aberto é  $V(2) = 30 \text{ V}$ , e a resistência de saída é 3 ohms. Portanto, a resistência total de Thévenin é  $3 + 4 = 7$  ohms. O circuito equivalente de Thévenin é mostrado na Fig. 5.32 (c). Assim, a transferência máxima de potência ocorre quando  $R = 7$  ohms e a potência máxima é  $(30/14)^2 \times 7 = 32,14 \text{ W}$ .

## EXERCÍCIO

**5.6.1** Usando SPICE determine o circuito equivalente de Thévenin à esquerda dos terminais  $a-b$ . Calcule o valor de  $R$  para a transferência máxima de potência e o valor da potência máxima.

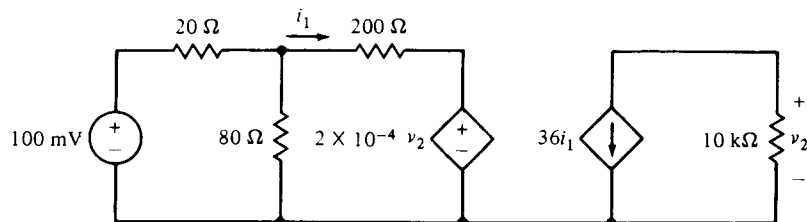
Resposta: 12 V, 4 k $\Omega$ , 4 k $\Omega$ , 9 mW



EXERCÍCIO 5.6.1

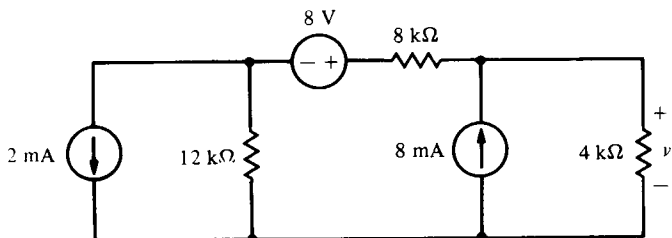
## PROBLEMAS

- 5.1 Resolva o Prob. 2.34 usando a propriedade de proporcionalidade.      5.3 Resolva o Ex. 4.4.1 usando a propriedade da proporcionalidade.  
 5.2 Resolva o Prob. 2.38, usando a propriedade da proporcionalidade.      5.4 Resolva o Prob. 4.32 usando a propriedade da proporcionalidade.  
 (Sugestão: faça  $i_2 = 1 \text{ mA}$ , e trabalhe em direção à fonte.)      5.5 Use a propriedade da proporcionalidade para encontrar  $v_2$ .



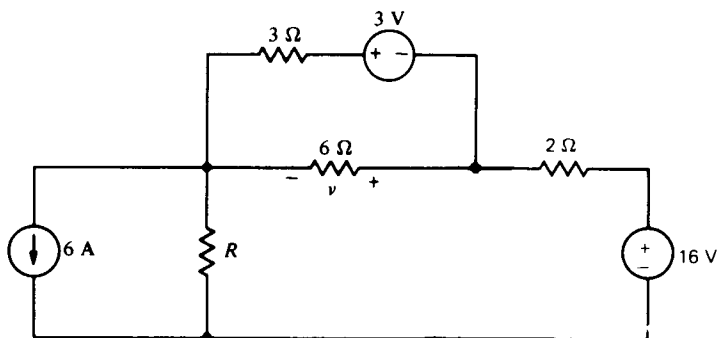
PROBLEMA 5.5

- 5.6 Resolva o Prob. 4.34 usando a propriedade da proporcionalidade (*Sugestão*: considere  $i = \cos 2t$  A.)  
 5.7 Resolva o Ex. 4.6.1 usando superposição.  
 5.8 Resolva o Prob. 4.9 usando superposição.  
 5.9 Resolva o Prob. 4.10 usando superposição.  
 5.10 Resolva o Prob. 4.26 usando superposição.  
 5.11 Calcule  $v$  usando superposição.



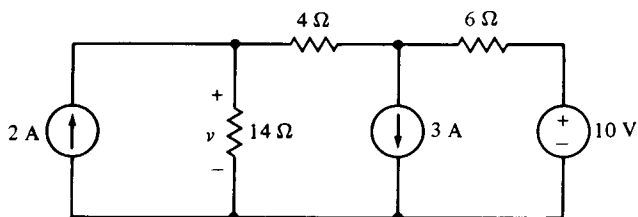
**PROBLEMA 5.11**

- 5.12 Calcule  $v$  usando superposição, se  $R = 2 \Omega$ .



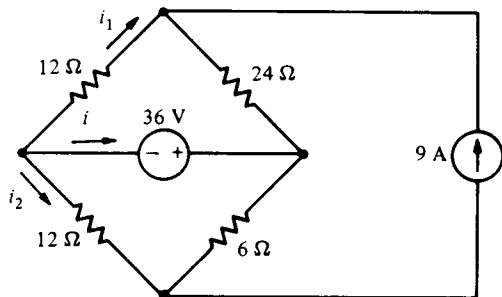
**PROBLEMA 5.12**

- 5.13 Usando superposição, calcule a potência entregue ao resistor de  $4 \Omega$  no circuito do Prob. 4.30.  
 5.14 Calcule  $v$  usando superposição.



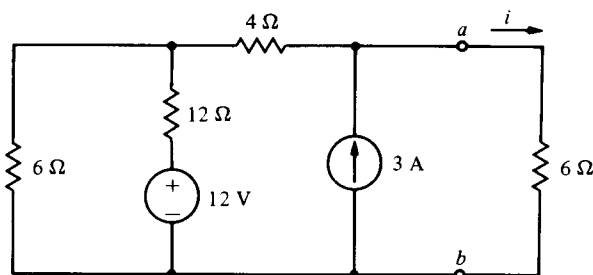
**PROBLEMA 5.14**

- 5.15 Calcule  $i$  usando superposição. (*Sugestão*: Calcule  $i_1$  e  $i_2$ .)



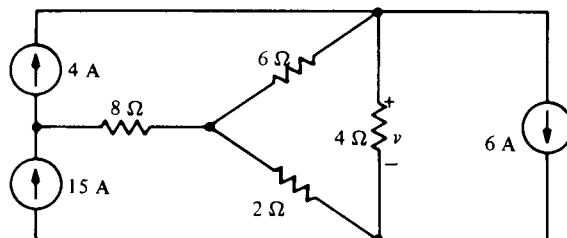
**PROBLEMA 5.15**

- 5.16 Substitua a rede à esquerda dos terminais  $a-b$  pelo seu equivalente de Thévenin e use o resultado para calcular  $i$ .



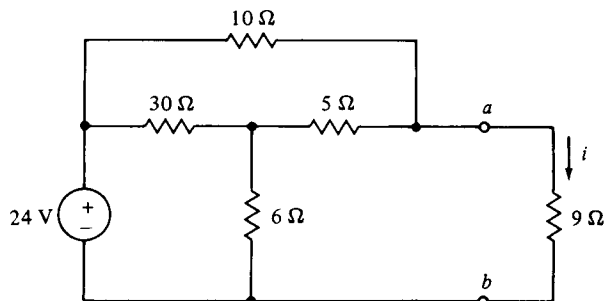
**PROBLEMA 5.16**

- 5.17 Calcule o equivalente de Thévenin de tudo, exceto o resistor de  $4 \Omega$  no Prob. 5.16, e use o resultado para encontrar a potência entregue ao resistor de  $4 \Omega$ .  
 5.18 Calcule  $v$  pela substituição de tudo, menos o resistor de  $4 \Omega$ , pelo seu equivalente de Thévenin.



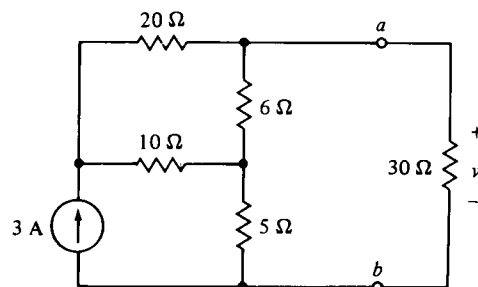
**PROBLEMA 5.18**

- 5.19 Calcule o equivalente de Norton, do circuito à esquerda dos terminais  $a-b$ , e use o resultado para calcular  $i$ .



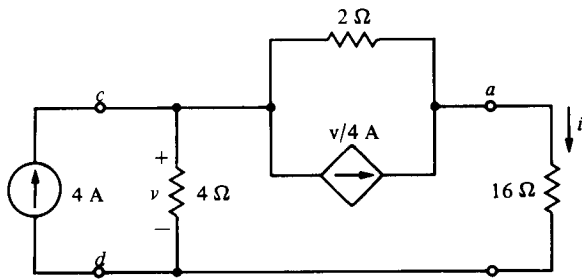
**PROBLEMA 5.19**

- 5.20 Calcule o equivalente de Norton, do circuito à esquerda dos terminais  $a-b$ , e use o resultado para calcular  $v$ .



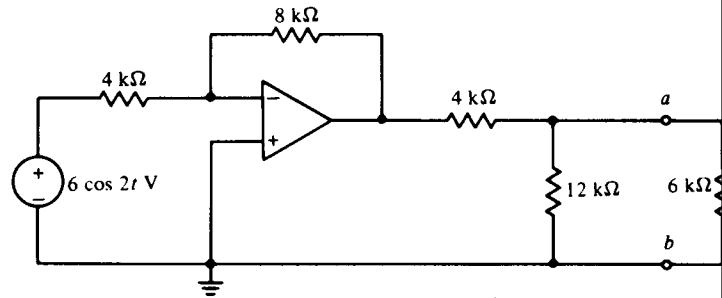
**PROBLEMA 5.20**

5.21 Calcule  $i$  substituindo a rede à esquerda dos terminais  $a-b$  pelo seu equivalente de Norton.



PROBLEMA 5.21

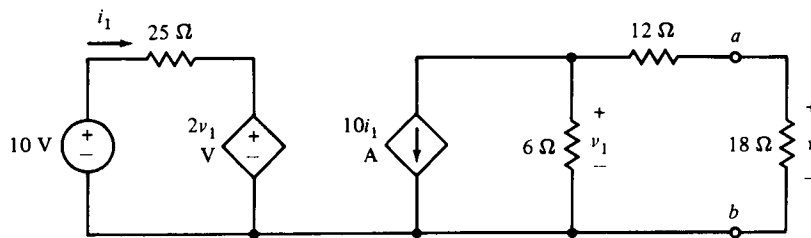
5.26 Calcule o equivalente de Norton do circuito à esquerda dos terminais  $a-b$  e use o resultado para calcular a potência entregue ao resistor de  $6\text{ k}\Omega$ .



PROBLEMA 5.26

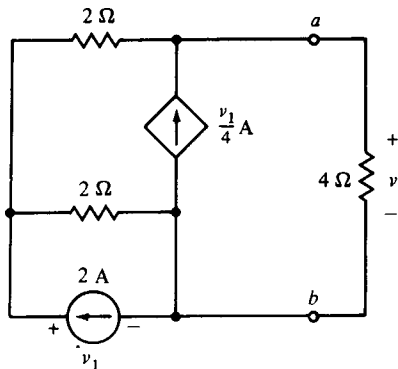
5.22 No Prob. 5.21, substitua a rede à direita dos terminais  $c-d$  pelo seu equivalente de Thévenin e use o resultado para calcular  $v$ .

5.23 Substitua o circuito à esquerda dos terminais  $a-b$  pelo seu equivalente de Thévenin e use o resultado para calcular  $v$ .



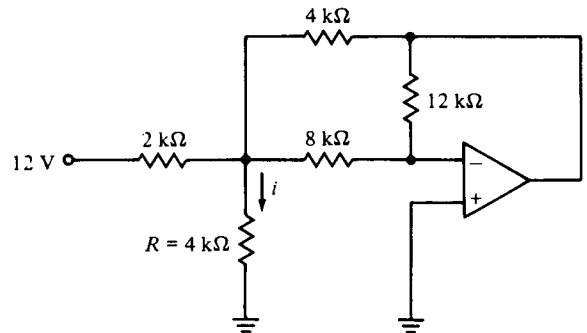
PROBLEMA 5.23

5.24 Substitua o circuito à esquerda dos terminais  $a-b$  pelo seu equivalente de Thévenin, e use o resultado para calcular  $v$ .



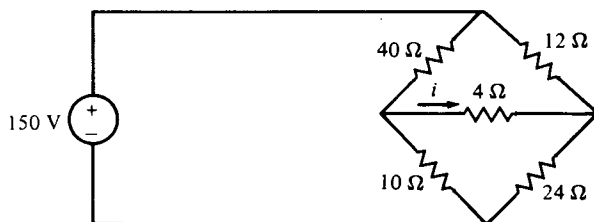
PROBLEMA 5.24

5.27 Substitua tudo menos o resistor  $R = 4\text{ k}\Omega$  pelo seu equivalente de Thévenin, e use o resultado para calcular  $i$ .



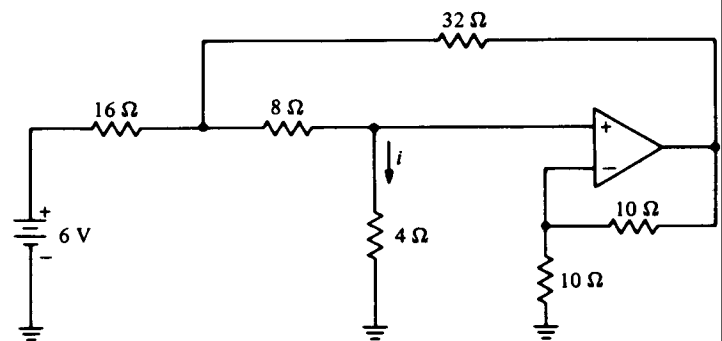
PROBLEMA 5.27

5.25 Calcule o equivalente de Thévenin do circuito externo ao resistor de  $4\text{ }\Omega$  e use o resultado para encontrar  $i$ .



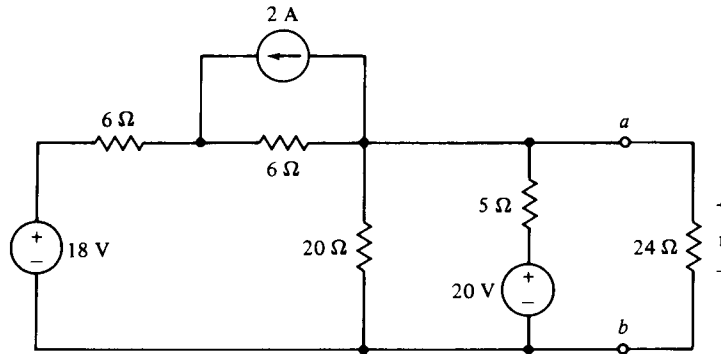
PROBLEMA 5.25

5.28 Substitua tudo, exceto o resistor de  $4\text{ }\Omega$  pelo seu circuito equivalente de Thévenin e use o resultado para calcular  $i$ .



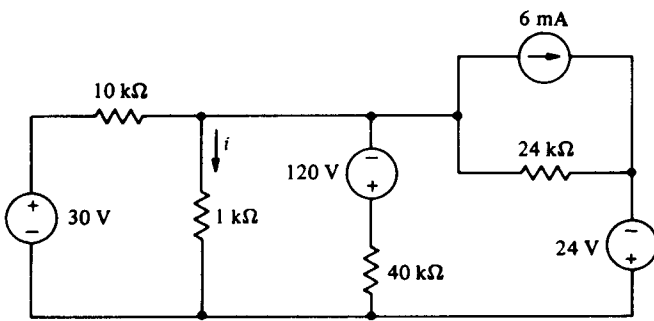
PROBLEMA 5.28

- 5.29 No circuito do Prob. 5.16, calcule a potência entregue ao resistor de  $4\ \Omega$  através do uso de transformações sucessivas de fontes para obter o equivalente de Thévenin de tudo, exceto o resistor de  $4\ \Omega$ .
- 5.30 Use transformações sucessivas de fontes para obter o equivalente de Thévenin do circuito à esquerda dos terminais  $a$ - $b$ . Do resultado, calcule  $v$ .



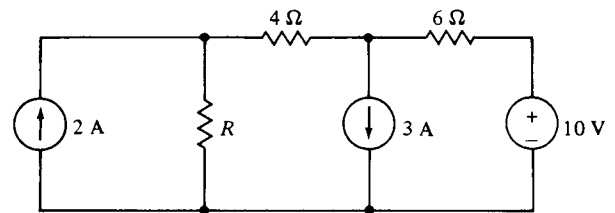
PROBLEMA 5.30

- 5.31 Calcule  $i$  usando transformações de fontes para obter o circuito equivalente no que se relaciona ao resistor de  $1\ \text{k}\Omega$ , contendo uma fonte e um resistor, além do resistor de  $1\ \text{k}\Omega$ .



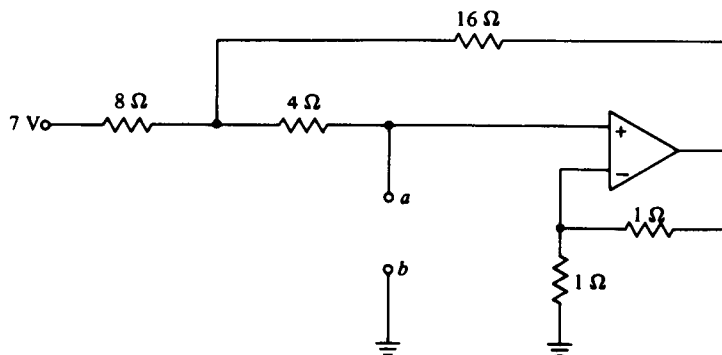
PROBLEMA 5.31

- 5.32 Resolva o Prob. 5.16, usando transformações de fontes.
- 5.33 Resolva o Prob. 5.17, usando transformações de fontes.
- 5.34 Calcule a potência máxima que pode ser entregue ao resistor  $R$  no circuito do Prob. 5.12.
- 5.35 Calcule a potência máxima que pode ser entregue ao resistor  $R$  e o valor de  $R$  para a potência máxima no circuito do Prob. 5.27.



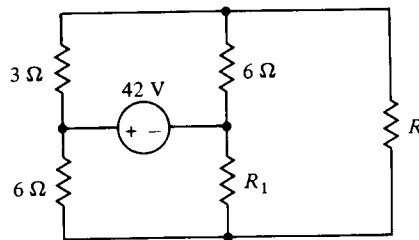
PROBLEMA 5.36

- 5.37 Calcule a resistência  $R$  a ser colocada entre os terminais  $a$ - $b$  para retirar a potência máxima. Calcule também o valor da potência máxima.



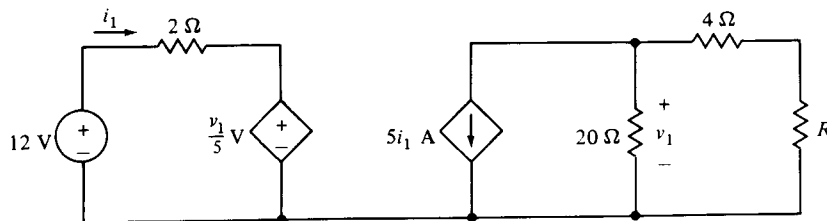
PROBLEMA 5.37

- 5.38 Calcule a potência máxima que pode ser entregue a  $R$  se (a)  $R = 12 \Omega$  e (b)  $R = 30 \Omega$ .



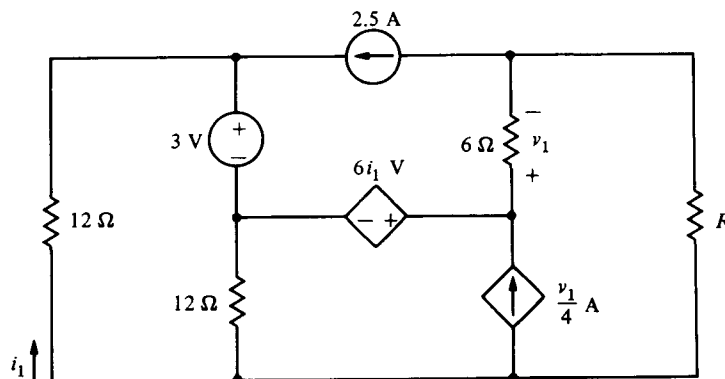
PROBLEMA 5.38

- 5.39 Calcule o valor de  $R$  que irá retirar a potência máxima do restante do circuito. Calcule também a potência máxima.



PROBLEMA 5.39

- 5.40 Calcule o valor de  $R$  que irá consumir a potência máxima do resto do circuito. Calcule também a potência máxima consumida por  $R$ .



PROBLEMA 5.40

## PROBLEMAS DE APLICAÇÃO DE COMPUTADORES

- 5.41 Aplique SPICE ao Prob. 5.24.  
 5.42 Aplique SPICE ao Prob. 5.37.  
 5.43 Aplique SPICE ao Prob. 5.40.



## Independência das Equações

---

*Euler calculava sem esforço aparente, tal qual os homens respiram ou as águias se sustentam ao vento.*

*Dominique Arago*

---

A aplicação das leis de Kirchhoff a um circuito com vários nós e laços pode ser extremamente difícil, a menos que usemos um ramo da matemática conhecido como *teoria dos gráficos*, que introduziremos neste capítulo. (Um circuito com apenas 10 nós e sem elementos em paralelo, por exemplo, pode ter até  $10^8$  laços.) O pai da teoria dos gráficos foi o grande matemático suíço Leonhard Euler, cuja famosa publicação de 1736, *As Sete Pontes de Königsberg*, foi o primeiro tratado desta matéria. Ele também realizou importantes contribuições originais em todos os ramos da matemática de seu tempo, e a fórmula de Euler é a base do método de fasores para resolução de circuitos ca, discutidos no Cap. 10.

Euler nasceu em Basel, na Suíça, filho de um sacerdote. Graduou-se na Universidade de Basel em 1724 e trabalhou na Academia Russa de Ciências, em São Petersburgo, em 1727, convidado por Catarina I. Serviu num cargo semelhante na Academia Germânica de Ciências, requisitado por Frederico o Grande, em 1741. Foi talvez o mais profícuo matemático de todos os tempos, continuando a editar livros e textos mesmo após ficar cego, em 1766. Ainda encontrou tempo para 13 filhos e duas esposas, a segunda aos 69 anos de idade. Matemáticos suíços ainda estão publicando trabalhos inéditos de Euler, sendo estimado que seus trabalhos eventualmente preencherão entre 60 e 80 grandes volumes. ■



Uma rede elétrica é determinada pelo tipo de elementos que contém e pela maneira como tais elementos são conectados. Empregamos um tempo considerável nos capítulos anteriores considerando os elementos propriamente ditos e suas características volt-ampère. Neste capítulo, consideraremos como os elementos de rede são conectados, ou, como algumas vezes é chamada, a *topologia* da rede. Como veremos, um estudo de topologia de redes nos dá um caminho sistemático para determinar quantas equações são necessárias na análise, quantas delas são independentes, e a escolha do melhor conjunto de equações para a análise mais direta.

## 6.1

### Gráfico de uma Rede

Para ilustrar os problemas que envolvem a análise de uma rede mais complicada, vamos considerar o circuito da Fig. 6.1. Os resistores são numerados 1, 2, ..., 9, com valores de resistência  $R_1, R_2, \dots, R_9$ . Suponha que desejamos realizar uma análise de laços; neste caso, precisamos escrever um conjunto de equações independentes a partir de LKT. (Notamos que o circuito é não-planar, então não podemos desenvolver uma análise de malhas. Quem duvidar disto está convidado a tentar desenhar o circuito de forma planar.)

Existem 15 laços no circuito, o que pode ser verificado de inúmeras maneiras, uma das quais é a de tentativa e erro (muita tentativa e mais erro). Para o leitor curioso, os 15 laços são (1, 3, 4, 5), (1, 3, 7, 9), (2, 3, 5, 6), (1, 2, 8, 9), (1, 2, 4, 6), (4, 5, 7, 9), (2, 3, 4, 5, 8, 9), (1, 2, 5, 6, 7, 9), (1, 3, 5, 6, 8, 9), (2, 3, 7, 8), (2, 3, 4, 6, 7, 9), (4, 6, 8, 9), (5, 6, 7, 8), (1, 3, 4, 6, 7, 8) e (1, 2, 4, 5, 7, 8). Isto é, os resistores 1, 3, 4 e 5 formam um laço; 1, 3, 7 e 9 (com a fonte  $v_s$ ) formam outro laço etc.

Para aplicar uma análise de laços à Fig. 6.1, precisamos saber quais destes laços são independentes e quantos são requeridos. Para responder estas questões, precisamos saber somente como os elementos

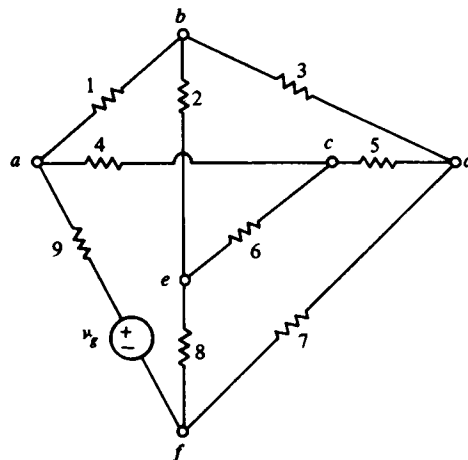


FIGURA 6.1 Circuito não-planar

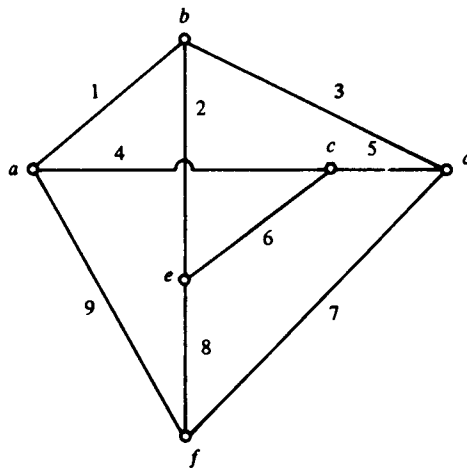


FIGURA 6.2 Gráfico de uma rede

são conectados; não é importante saber que tipo de elemento está envolvido. Para facilitar, podemos manter os nós da rede e substituir os elementos por linhas. A topologia da rede é então preservada numa configuração mais simples.

A configuração de nós e linhas obtidas pela substituição dos elementos de uma rede por uma linha é chamada de *gráfico* de uma rede. As linhas de um gráfico são chamadas de seus *ramos*, e os *nós* do gráfico são, sem dúvida, os nós da rede. Como um exemplo, o gráfico da rede da Fig. 6.1 é mostrado na Fig. 6.2. Ele tem nove ramos e seis nós. (Poderíamos considerar um nó entre o resistor 9 e  $v_g$ , mas visto que isto não irá alterar o número de laços, optamos por considerar estes dois elementos em série como um único elemento, isto é, uma fonte de tensão não-ideal.)

Diremos que um gráfico é *conexo* se existe um percurso de um ou mais ramos entre quaisquer dois nós. O gráfico da Fig. 6.2 é evidentemente conexo. Um exemplo de gráfico não conexo é mostrado na Fig. 6.3. Por exemplo, não há ramos entre os nós  $a$  e  $d$ . No momento, consideraremos somente os gráficos conexos.

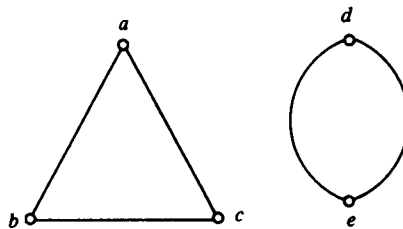
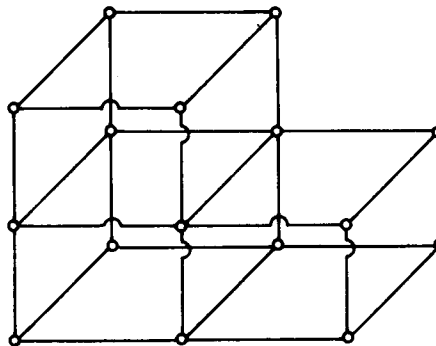


FIGURA 6.3 Gráfico não-conexo

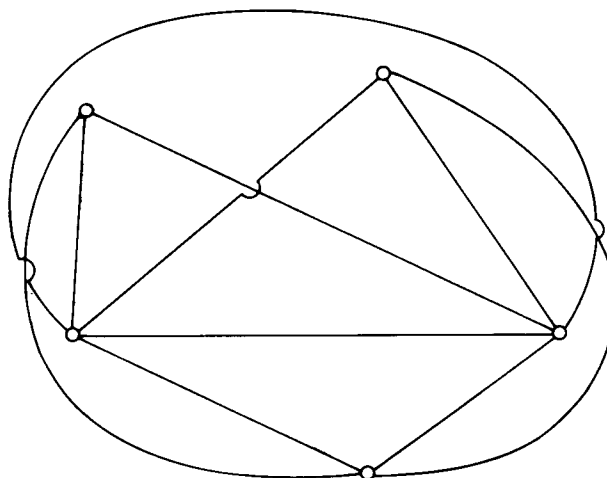
## EXERCÍCIOS

6.1.1 Mostre que o gráfico é planar



EXERCÍCIO 6.1.1

6.1.2 Mostre que o gráfico é planar



EXERCÍCIO 6.1.2

6.2

Árvore e Co-Árvore

Definimos uma *árvore* de um gráfico como uma porção conexa, ou *subgráfico* de um gráfico que contém todos os nós mas nenhum laço. Como exemplo, a Fig. 6.4 (b) é uma árvore do gráfico da Fig. 6.4 (a). A árvore é conexa, não tem laços, e contém todos os nós do gráfico.

No caso geral, um gráfico tem várias árvores. A configuração da Fig. 6.4(c) é, evidentemente, outra árvore do gráfico da Fig. 6.4(a), visto de que ela satisfaz todos os requisitos. Este gráfico em particular tem 24 árvores, que o leitor pode tentar descobrir. Ajudará, na enumeração das árvores, notar que cada uma tem exatamente três ramos, pois são necessárias pelo menos três linhas para conectar os quatro nós e mais que três linhas formam um laço. Existem 35 maneiras para selecionar sete ramos, três ramos de cada vez, mais 11 destas combinações não são árvores.

Os ramos do gráfico que não estão na árvore escolhida são denominados *enlaces* e juntos com seus nós formam a *co-árvore* correspondente à árvore. Então, a *árvore* da Fig. 6.4 (b) tem a *co-árvore* dos enlaces 4, 5, 6 e 7.

No caso geral, considere  $B$  como o número de ramos e  $N$  como o de nós em um dado gráfico. Então, qualquer árvore de gráfico contém  $N$  nós e  $N-1$  ramos. O número de nós surge da definição de uma árvore, e o número de ramos da árvore pode ser obtido pelo seguinte argumento de construção. Vamos construir uma árvore começando com um ramo e os dois nós aos quais ele está conectado. Cada ramo adicional conectado à árvore acrescenta um nó adicional. O número de nós é, portanto, um a mais que o número de ramos, e visto que existem  $N$  nós, precisam existir  $N - 1$  ramos. O número de enlaces em uma *co-árvore* qualquer é, portanto,  $B - (N - 1)$  ou  $B - N + 1$ .

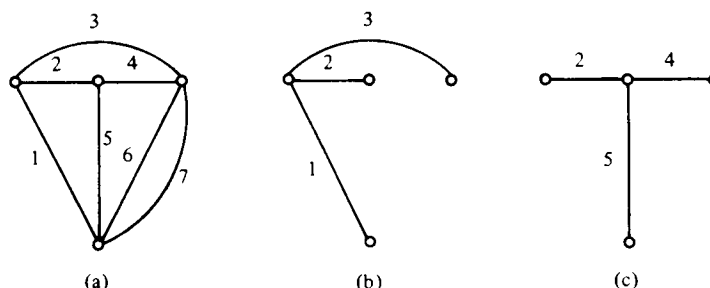


FIGURA 6.4 Gráfico e duas de suas árvores

EXEMPLO 6.1

Como exemplo, o gráfico da Fig. 6.4(a) tem  $N = 4$ , e então o número de ramos da árvore das Figs. 6.4(b) e (c) é  $N - 1 = 3$ . A seleção da árvore, sem dúvida, determina a *co-árvore*. A árvore da Fig. 6.4 (b) é redesenhada na Fig. 6.5, com os três ramos mostrados como linhas cheias e os enlaces de

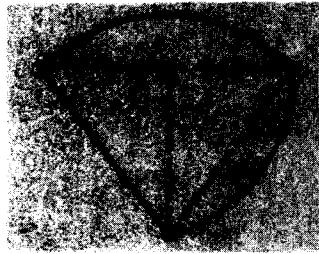


FIGURA 6.5 Três ramos e enlaces de um gráfico

co-árvore como linhas tracejadas. O número de enlaces deste caso, visto que  $B = 7$ , é  $7 - 4 + 1 = 4$ .

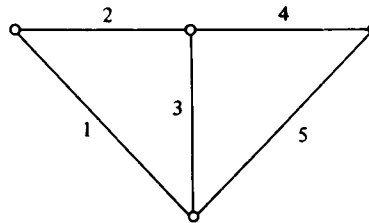
## EXERCÍCIOS

- 6.2.1 Calcule o número de ramos de árvores e de enlaces no gráfico da Fig. 6.2.

*Resposta:* 5, 4

- 6.2.2 Calcule todas as árvores do gráfico mostrado.

*Resposta:* (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 5)



EXERCÍCIO 6.2.2

- 6.2.3 Na Figura do Ex. 6.2.2, considere  $i_2$  e  $i_4$  como sendo correntes de enlace nos elementos 2 e 4, fluindo para a direita. Considere  $i_1$ ,  $i_3$  e  $i_5$  como três correntes que descem. Calcule as três correntes em termos das correntes de enlace.

*Resposta:*  $i_2$ ,  $i_2 - i_4$ ,  $i_4$

- 6.2.4 Se um elemento 6 é adicionado em paralelo com o elemento 5 no Ex. 6.2.2, calcule todas as árvores do gráfico resultante.

*Resposta:* (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (1, 4, 6), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (2, 4, 6)

## 6.3

### Equações Independentes de Tensões

Nesta seção, consideraremos a análise nodal de um circuito cujo gráfico tem  $N$  nós e  $B$  ramos. A árvore do gráfico tem então  $N - 1$  ramos e, é claro,  $N - 1$  tensões de ramo da árvore. Também existem  $B - N + 1$  tensões de enlace no circuito.

Vamos imaginar que todas as tensões dos ramos de uma árvore qualquer são reduzidas a zero, por se curto-circuitar os ramos (isto é, os ramos são substituídos por curto-circuitos). Então, todos os nós do circuito, existentes na árvore, estão em um mesmo potencial, e logo todas as tensões de enlace também serão zero. Portanto, as tensões de enlace dependem das tensões de ramo da árvore, se uma tensão de enlace fosse independente das tensões da árvore, ela não poderia ser forçada a zero por curto-circuito no ramo da árvore. Por outro lado, se um ramo da árvore não fosse curto-circuitado, existiria um nó num potencial diferente e então uma tensão de ramo da árvore não dependeria das outras. Podemos concluir, portanto, que as  $N - 1$  tensões de ramo de uma árvore qualquer são independentes e podem ser usadas para encontrar as tensões de enlace.

Uma outra forma de ver que qualquer tensão de enlace pode ser expressa em termos de tensões da árvore é notar que adicionar o enlace à árvore completa o circuito, cujos outros elementos são ramos da árvore. Então, pela LKT, a tensão de enlace é a soma algébrica das tensões de ramo da árvore.

### EXEMPLO 6.2

Como um exemplo, o gráfico da Fig. 6.6 tem tensões de ramo da árvore  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  indicadas por linhas cheias. As linhas tracejadas são enlaces cujas tensões são  $v_4$ ,  $v_5$  e  $v_6$ . Se o enlace chamado de  $v_4$  é adicionado à árvore, o circuito de  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $v_4$  fica formado. Pela LKT ao redor deste circuito, podemos obter

$$v_4 = v_3 - v_2$$

Da mesma forma, adicionando  $v_5$ , a árvore fica

$$v_5 = v_1 - v_2$$

e adicionando o enlace  $v_6$  a árvore fica

$$v_6 = v_1 - v_3$$

Então, as tensões de enlace podem ser encontradas a partir das tensões de ramo da árvore.

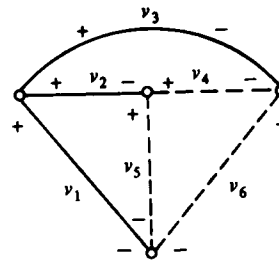


FIGURA 6.6 Árvore e tensões de enlace

Um caminho sistemático para se escrever equações envolvendo as tensões de ramo da árvore é imaginar aberto um ramo da árvore, notando que isto separa a árvore em duas partes. Correntes fluem entre as duas partes através do ramo da árvore imaginado aberto e através dos enlaces. Então, pela LKC, a soma algébrica destas correntes em um dado sentido é zero. Este procedimento pode ser então repetido para os outros ramos da árvore.

### EXEMPLO 6.3

Para ilustrar o uso de tensões de ramos da árvore, vamos considerar o circuito da Fig. 6.7(a). Um gráfico do circuito é mostrado na Fig. 6.7(b) com os ramos da árvore mostrados como linhas cheias e os enlaces como linhas tracejadas. Visto que as tensões de ramo da árvore são independentes, incluímos na árvore a fonte de 20 V. Logo, o número de incógnitas é reduzido de uma. Pela LKT podemos calcular as tensões de enlace em função das tensões da árvore, com os resultados mostrados na Fig. 6.7 (b)

Se imaginarmos o ramo da árvore  $(a, b)$  denominado  $v_1$ , como aberto, então a árvore é dividida em duas partes. Estas duas partes são conectadas pelo ramo  $(a, b)$  e os enlaces  $(a, b)$ ,  $(b, d)$  e  $(d, c)$  como indicado pela linha marcada com I. Somando as correntes através da linha no sentido da seta

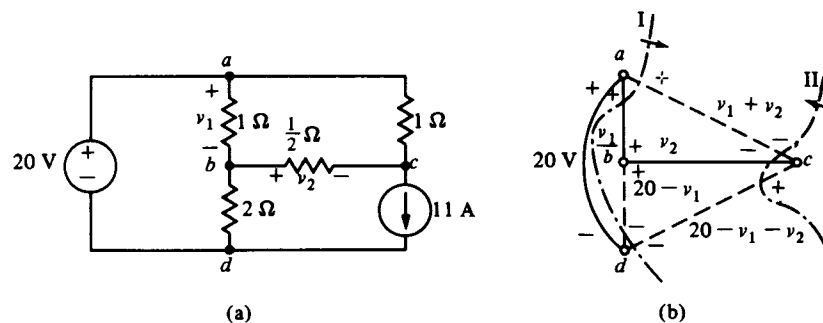


FIGURA 6.7 Circuito e seu gráfico

temos

$$v_1 + v_2 + v_1 - \frac{20 - v_1}{2} - 11 = 0$$

A repetição do procedimento para o ramo da árvore (*b, c*) denominado de  $v_2$ , leva à linha II e à equação

$$-(v_1 + v_2) - 2v_2 + 11 = 0$$

Resolvendo esta equação, temos  $v_1 = 8 \text{ V}$  e  $v_2 = 1 \text{ V}$ . Todas as tensões de enlace *e*, conseqüentemente, todas as correntes dos enlaces e das árvores podem ser encontradas.

Um *conjunto de corte* do gráfico é o conjunto mínimo de elementos que, quando *cortado* ou removido, separa o gráfico em duas partes. O conjunto de elementos que estamos discutindo — um ramo de árvore que, quando cortado, separa a árvore em duas partes, e os enlaces entre estas duas partes — é um exemplo de conjunto de corte. As duas partes de um gráfico determinadas pelo corte serão ou um nó ou um supernó *e*, então, pela LKC, a soma algébrica das correntes que deixam qualquer parte é zero. Isto é, a soma algébrica das correntes num conjunto de corte é zero.

### EXEMPLO 6.4

Como um exemplo, vamos supor que o gráfico da Fig. 6.8(a) tem as correntes das setas mostradas em cada elemento. Selecionando a árvore  $i_1, i_4, i_6, i_7$ , mostrada por linhas cheias na Fig. 6.8(b) temos os enlaces  $i_2, i_3, i_5$  mostrados em tracejado. O corte do ramo  $i_7$  da árvore do gráfico corta a árvore em duas partes (o ramo  $i_6$  é uma parte e  $i_1, i_4$  é a outra parte). Portanto, o ramo  $i_7$  e os enlaces  $i_2, i_3, i_5$  (entre as duas partes da árvore) constituem o conjunto de corte CS, como mostrado. A LKC para este conjunto dá

$$i_2 - i_3 + i_5 + i_7 = 0$$

que é também a LKC para o supernó contendo  $i_6$ . Os conjuntos de corte correspondentes aos ramos da árvore  $i_1, i_4$  e  $i_6$  são mostrados na Fig. 6.8(c), com LKC dada por

$$i_1 - i_2 = 0$$

$$i_4 + i_5 - i_3 + i_2 = 0$$

$$i_2 - i_3 + i_6 = 0$$

respectivamente. Um conjunto de corte não baseado na árvore dada é  $i_1, i_3, i_5, i_4$ , consistindo nos elementos conectados ao, ou *incidentes* ao, nó *a* na Fig. 6.8(a). Tal conjunto de corte é chamado de *conjunto de corte incidente* (elementos incidentes a um nó), e sua equação, pela LKC,

$$i_1 - i_3 + i_5 + i_4 = 0$$

é simplesmente a equação nodal no nó *a*.

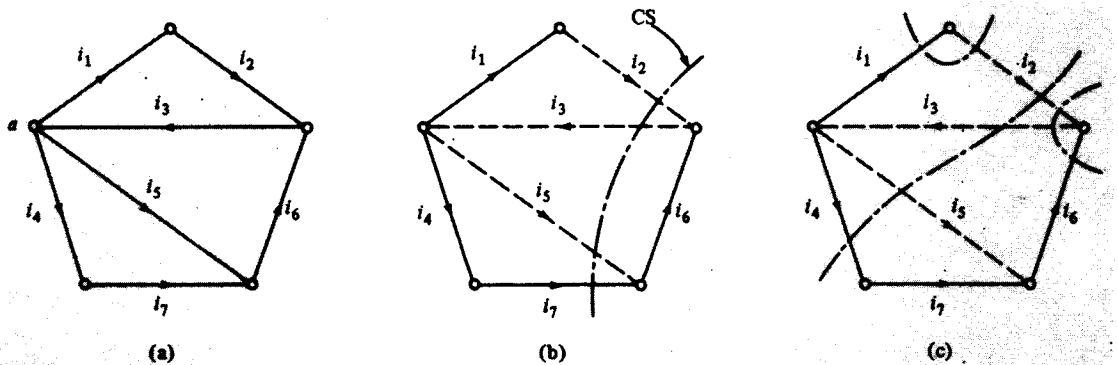


FIGURA. 6.8 (a) Gráfico de um circuito, (b) um de seus conjuntos de corte, e (c) outro conjunto de corte

Em qualquer procedimento de análise de circuito onde as incógnitas são tensões, precisamos encontrar somente  $N - 1$  tensões de ramos de árvore que constituem um conjunto independente. Isso significa que só  $N - 1$  equações independentes de tensão são necessárias na análise. Como *qualquer* conjunto de equações independentes será suficiente, então *qualquer* conjunto independente de  $N - 1$  tensões constitui uma solução.

Outro conjunto independente de  $N - 1$  tensões, que não as tensões de ramo da árvore, é o conjunto de tensões de nós de não-referência, considerado no método nodal do Cap. 4. Para ver isto, notamos que qualquer nó de não-referência está na árvore e é conectado ao nó de referência através de um ramo da árvore. Então, cada tensão de nó de não-referência é uma soma algébrica das tensões de ramo da árvore (os ramos da árvore entre os nós de referência e de não-referência). Por outro lado, cada tensão de ramo da árvore é a diferença entre suas duas tensões de nó. Em resumo, as tensões de nó podem ser determinadas das tensões da árvore e vice-versa. Então, o conjunto de tensões de nó de não-referência também é um conjunto independente. (Sem dúvida, escrever a LKC em um nó é o mesmo que igualar a zero a soma algébrica das correntes em um conjunto incidente de corte neste nó.)

### EXEMPLO 6.5

No exemplo da Fig. 6.7, vemos que, se  $d$  é o nó de referência, então as tensões dos nós de não-referência  $v_a$ ,  $v_b$ , e  $v_c$  são relacionadas às tensões da árvore  $v_1$ ,  $v_2$  e 20 por

$$v_a = 20$$

$$v_b = 20 - v_1$$

$$v_c = 20 - v_1 - v_2$$

Inversamente, temos

$$v_1 = v_a - v_b$$

$$v_2 = v_b - v_c$$

$$20 = v_a$$

O método nodal, em muitos casos, é mais fácil de ser aplicado do que o método de laços, porque os nós são mais fáceis de encontrar. No método de laços, exemplificado aqui pelo exemplo da Fig. 6.1, os laços apropriados podem ser difíceis de identificar. Na próxima seção, consideraremos um método baseado na teoria de gráficos para encontrar conjuntos de equações independentes de laços.

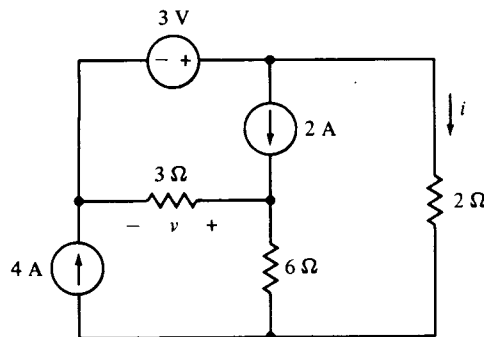
### EXERCÍCIOS

- 6.3.1** No gráfico do circuito do Prob. 4.8, selecione a árvore das fontes de tensão e o resistor de  $12 \Omega$ . Empregando o método desta seção, escreva uma equação da LKC e calcule  $v$ .

Resposta: 6 V

- 6.3.2** Selecione a árvore da fonte de tensão e os resistores de  $3 \Omega$  e  $6 \Omega$ , e use o método desta seção para calcular  $v$ .

Resposta: 3 V



EXERCÍCIO 6.3.2

- 6.3.3** Usando uma árvore apropriada e o método desta seção, calcule  $v$  no Prob. 4.27. (Nota: a árvore deve conter a tensão  $v$  e as três fontes, bem como um outro ramo.)

Resposta: 8 V

## Equações Independentes de Corrente

Como já vimos no exemplo da Fig. 6.1, nem sempre é fácil identificar laços independentes para a análise de laços de um circuito. Para desenvolver uma forma sistemática de escrever as equações de laços, vamos considerar uma rede genérica com  $B$  ramos e  $N$  nós. Correspondendo a uma dada árvore existem  $B - N + 1$  enlases.

Suponha que todas as correntes de enlace sejam zero, fazendo dos enlases circuitos-abertos (trocando os enlases por circuitos abertos). Visto que a árvore não contém laços, então todas as correntes da árvore dependem então das correntes de enlace, isto é, elas podem ser expressas em termos das correntes de enlace, pois, se uma corrente da árvore for independente das correntes de enlace, ela não pode ser igualada a zero ao se abrir os enlases. Além disto, se um enlace não for tornado um circuito aberto, existe um laço, no gráfico, e uma corrente irá fluir no enlace. Então, uma corrente de enlace não é dependente das outras correntes de enlace. Em resumo as  $B - N + 1$  correntes de enlace são um conjunto independente e a análise de laços do circuito necessita  $B - N + 1$  equações independentes.

Um caminho sistematizado para calcular  $B - N + 1$  laços independentes é partir da árvore e adicionar um dos enlases. Isto determina o laço que contém aquele enlace, uma vez que, acrescentando-se um enlace na árvore, fecha-se um laço. Remova este enlace e adicione outro à árvore, determinando um segundo enlace. Continue o processo até que  $B - N + 1$  laços sejam encontrados. O conjunto é independente porque cada laço contém um enlace diferente.

### EXEMPLO 6.6.

Como um exemplo, vamos reconsiderar o circuito da Fig. 6.1. Uma árvore é constituída pelos ramos 1, 5, 7, 8 e 9, com os enlases correspondentes 2, 3, 4 e 6, como mostrado na Fig. 6.9. O fechamento dos enlases, um a cada vez, resulta nos quatro laços independentes I, II, III e IV indicados. O laço I contém o enlace 2 e os ramos 8, 9 e 1; o laço II contém 3, 7, 9 e 1; o laço III contém 4, 5, 7, e 9 e o laço IV contém 6, 5, 7 e 8. Estes quatro laços são suficientes para desenvolver uma análise de laços.

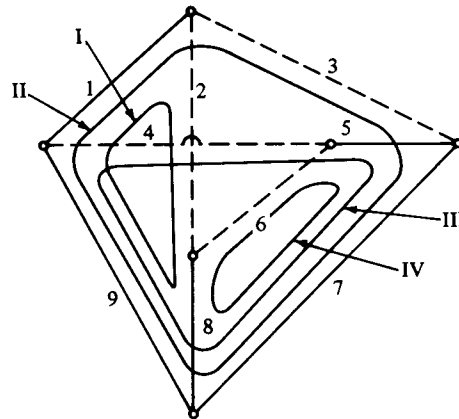


FIGURA 6.9 Laços da Fig. 6.1

### EXEMPLO 6.7

Para ilustrar o uso de correntes de enlace na análise de circuito, vamos retornar ao exemplo da Fig. 6.7(a). O gráfico é redesenhado na Fig. 6.10, mostrando as correntes de enlace  $i_1$ ,  $i_2$  e 11 A. Escolhemos a fonte de corrente como um enlace porque as correntes de enlace são um conjunto independente. Isto reduz o número de incógnitas a um. Geralmente, por esta razão, deve-se colocar fontes de tensão na árvore e as fontes de corrente nos enlases.

As correntes de ramo da árvore, no caso geral, podem ser calculadas pelas correntes de enlace, como mostrado na Fig. 6.10. Fechando os enlases  $i_1$  e  $i_2$  formam-se os laços 1 e 2, como indicado. A aplicação da LKT a estes laços fornece, das Figs. 6.7 (a) e 6.10,

$$2i_1 - 20 + i_1 - i_2 + 11 = 0$$

$$i_2 - \frac{11 - i_2}{2} - i_1 + i_2 - 11 = 0$$

cuja solução é  $i_1 = 6$  A e  $i_2 = 9$  A.



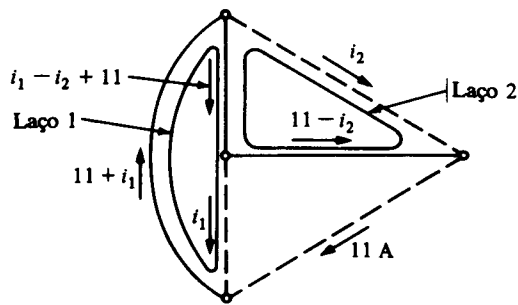


FIGURA 6.10 Gráfico da Fig. 6.7(a)

Visto que a corrente de enlace de 11 A é conhecida, necessitamos somente de dois laços envolvendo as correntes  $i_1$  e  $i_2$ . Incidentalmente, neste exemplo simples, os enlaces foram escolhidos de forma que as correntes de enlace são também as correntes de malha. Isto, é claro, não é caso geral.

Os resultados obtidos até este ponto do capítulo são válidos para redes gerais, podendo ser planares ou não. No caso especial de redes planares, como vimos no Capítulo 4, uma análise de malhas é possível. Nos circuitos daquele capítulo, as correntes de malha foram independentes e em número suficiente para desenvolver a análise. Agora, mostraremos que este é o caso geral para as redes planares.

Vamos iniciar por separar o circuito planar com  $M$  malhas, e reconstruí-lo uma malha de cada vez. A primeira malha na reconstrução tem o mesmo número,  $k_1$ , de nós e ramos, porque para o primeiro ramo existem dois nós, a cada ramo adicional soma mais um novo nó e o último ramo não adiciona nós, visto que ele está ligado ao nó do primeiro ramo. Isto é ilustrado pelo gráfico de quatro malhas na Fig. 6.11(a). A primeira malha construída, mostrada na Fig. 6.11(b), tem o mesmo número de ramos e de nós, a saber, quatro, neste caso.

Após a primeira malha, cada malha subsequente é formada pela conexão de ramos e nós às malhas anteriores. Cada vez que o número de nós adicionado é menor em uma unidade que o número de ramos, cada ramo adicionado acrescenta um nó, exceto para o último ramo, que é conectado a um nó de uma malha que foi previamente adicionada. Este processo é ilustrado nas Figs. 6.11(c), (d) e (e).

Desta forma, se a segunda malha acrescenta  $k_2$  ramos, então ela adiciona somente  $k_2 - 1$  nós. Similarmente, a terceira malha soma  $k_3$  ramos e  $k_3 - 1$  nós, e assim por diante. A última malha, a  $M$ -ésima, adiciona  $k_M$  ramos e  $k_M - 1$  nós. Se no gráfico inteiro o número de ramos é  $B$  e o número de nós é  $N$ , temos

$$k_1 + k_2 + \dots + k_M = B \quad (6.1)$$

e

$$k_1 + (k_2 - 1) + \dots + (k_M - 1) = N \quad (6.2)$$

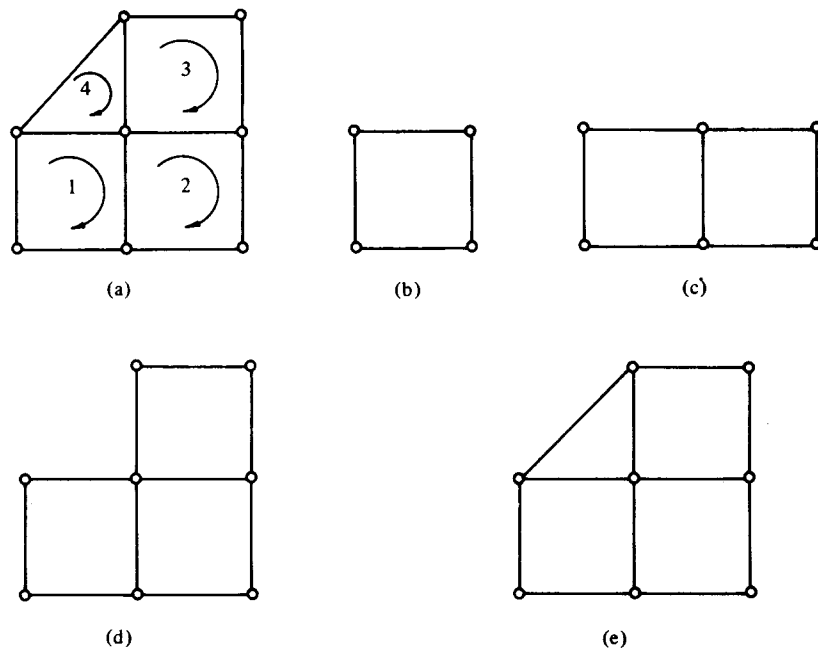


FIGURA 6.11 Circuito planar e suas malhas

A última equação pode ser escrita

$$k_1 + k_2 + \dots + k_M - (M - 1) = N$$

que, por (6.1) torna-se

$$B - (M - 1) = N$$

Resolvendo para o número de malhas, temos

$$M = B - N + 1 \quad (6.3)$$

que é também o número de enlances no gráfico.

As correntes de malha, portanto, constituem um conjunto apropriado de correntes para descrever completamente uma rede planar. Elas são de mesmo número que o conjunto independente de correntes de enlace, e são independentes, visto que cada nova malha contém pelo menos um ramo inexistente na malha anterior.

---

## EXERCÍCIOS

- 6.4.1** Mostre que (6.3) é válida nos circuitos do Prob. 4.26, 4.28 e 4.33.  
**6.4.2** Selecione uma árvore apropriada e use o método desta seção para calcular  $i$  no circuito do Ex. 6.3.2.  
*Resposta: 3 A*
- 

## 6.5

### Aplicação em um Circuito

---

#### EXEMPLO 6.8

Como um exemplo final vamos analisar um circuito moderadamente complicado, mostrado na Fig. 6.12 (a). Seu gráfico está indicado na Fig. 6.12(b), onde selecionamos uma árvore em linhas cheias. Note que a fonte de tensão independente e a fonte de tensão excitada por outra tensão foram colocadas na árvore e as fontes de corrente na co-árvore. Fontes de correntes excitadas por outra corrente devem ser colocadas na co-árvore, se possível.

Do gráfico vemos que existem quatro ramos de árvore, denominados  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $3v_2$  e 10. Então, se o método de tensão de ramos da árvore é usado, existirão somente duas incógnitas  $v_1$  e  $v_2$ , requerendo duas equações. Existem cinco correntes de enlace no gráfico, uma das quais é indicada (a fonte de 6 A) e a outra, a fonte de  $2v_1$ , que pode ser expressa em termos da corrente de ramo da árvore  $i_{bc}$ , e, subsequentemente, em termos das outras correntes de enlances. Então, se o método de corrente de enlace é usado, necessitamos de três equações. Conseqüentemente, analisaremos o circuito usando as tensões de ramos.

As duas equações necessárias são a aplicação de LKC aos conjuntos de corte I e II mostrados na Fig. 6.12(b), baseados, respectivamente, nos ramos (b, e) e (a, d). Estas são

$$\frac{v_1}{2} + \frac{v_{bc}}{2} + 2v_{dc} + 6 + 3v_{ae} = 0 \quad (6.4)$$

e

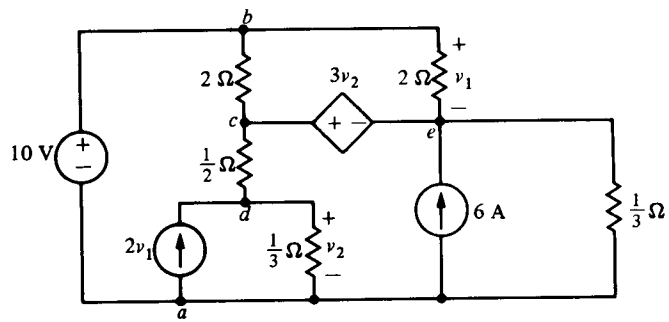
$$2v_{dc} - 2v_1 + 3v_2 = 0 \quad (6.5)$$

A inspeção do gráfico mostra que

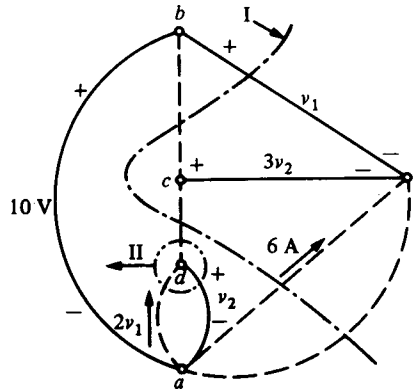
$$v_{bc} = v_1 - 3v_2$$

$$v_{dc} = v_1 - 2v_2 - 10$$

$$v_{ae} = v_1 - 10$$



(a)



(b)

FIGURA 6.12 Rede e seu gráfico

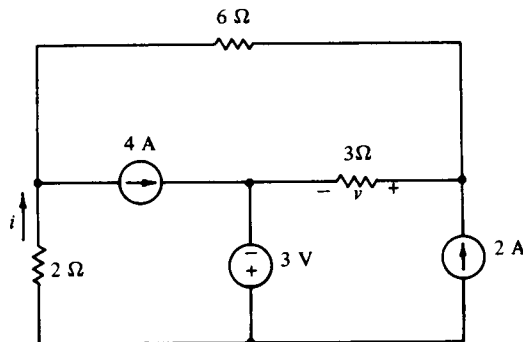
Substituindo estes valores em (6.4) e (6.5) e resolvendo pela tensão de ramos da árvore, temos

$$v_1 = -11 \text{ V}, \quad v_2 = -20 \text{ V}$$

Podemos notar que a análise nodal é igualmente fácil de ser aplicada. As tensões de nó podem ser escritas em termos de duas incógnitas  $v_1$  e  $v_2$ , e então são necessárias somente duas equações nodais. Deixaremos os detalhes para os problemas (Prob. 6.4)

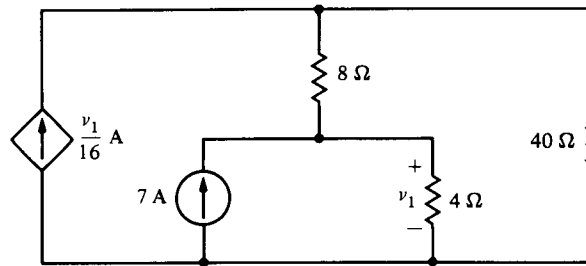
## EXERCÍCIOS

- 6.5.1 Aplicando a LKT escreva uma equação e encontrei  $i$ , usando o método da Seção 6.4.  
Resposta: 3 A



EXERCÍCIO 6.5.1

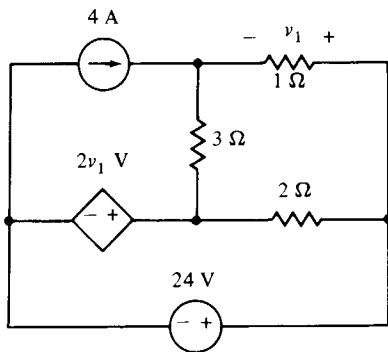
- 6.5.2** Usando uma árvore apropriada para o gráfico do Prob. 4.26, calcule a corrente  $i$  fluindo para a direita no resistor de  $4\ \Omega$ . (Uma árvore apropriada *não* pode conter fontes de corrente ou a corrente  $i$ . Então, usando os métodos da Seção 6.4, somente uma equação da LKT é necessária.)  
*Resposta:* 6, 5A
- 6.5.3** Usando o método da Seção 6.4, encontre a potência entregue ao resistor de  $8\ \Omega$ .  
*Resposta:* 8 W



EXERCÍCIO 6.5.3

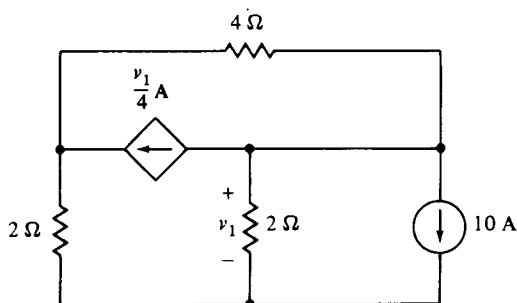
## PROBLEMAS

- 6.1** Encontre, se for possível, a árvore que contenha todas as fontes de tensão e os ramos cujas tensões controlam fontes dependentes, mas não contenham fontes de corrente ou ramos cujas correntes controlam fontes dependentes. Use essa árvore em conjunto com um método da teoria de gráficos apropriado para calcular  $v_1$ .

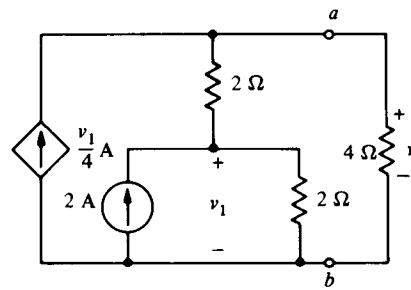


PROBLEMA 6.1

- 6.2** Selecione uma árvore como descrito no Prob. 6.1 e use um método da teoria dos gráficos apropriado para calcular  $v_1$ .
- 6.3** Resolva o Prob. 4.16, selecionando uma árvore apropriada e usando métodos da teoria de gráficos.
- 6.4** Calcule  $v_1$  e  $v_2$  na Fig. 6.12, usando análise nodal.
- 6.5** Selecione a árvore do resistor de  $4\ \Omega$  e do resistor de  $2\ \Omega$  com a tensão  $v_1$  e use o método de conjunto de corte para calcular  $v$ .
- 6.6** Use o método de conjunto de corte para resolver  $i$  no Prob. 4.14.

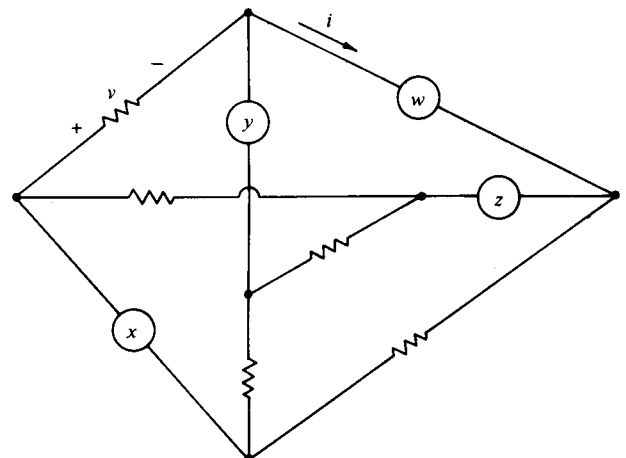


PROBLEMA 6.2



PROBLEMA 6.5

- 6.7** Resolva o Prob. 4.15 usando o conjunto de corte.
- 6.8** Todas as resistências são de  $1\ \Omega$ , o elemento  $w$  também é um resistor de  $1\ \Omega$ , os elementos  $x$  e  $y$  são fontes de corrente independentes de  $1\ \text{A}$  fluindo para cima e o elemento  $z$  é uma fonte independente de corrente de  $3\ \text{A}$  fluindo para a esquerda. Selecionando uma árvore apropriada e usando os métodos da teoria dos gráficos, calcule  $i$ . (Note que o circuito é similar ao da Fig. 6.1, e é, então, um circuito não-planar. Entretanto, apenas uma equação de laço é necessária neste caso.)

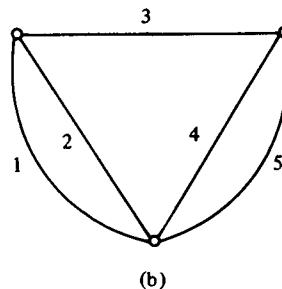
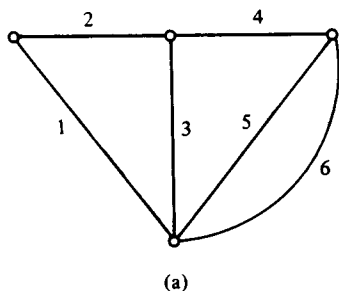


PROBLEMA 6.8

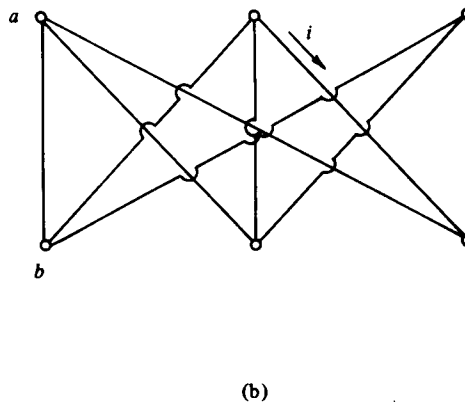
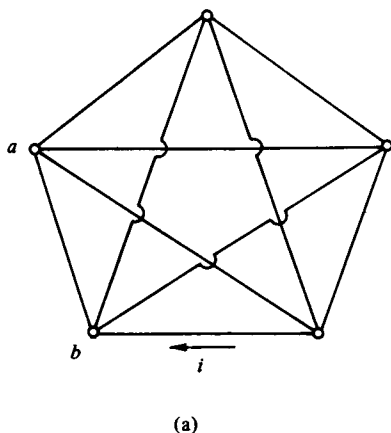
- 6.9 Calcule  $v$  no Prob. 6.8 usando os métodos da teoria de gráficos, se o elemento  $x$  é uma fonte de 4 V com o terminal positivo na parte superior,  $y$  é uma fonte de 2 V com o terminal positivo na parte de baixo,  $z$  é uma fonte de 6 V com o terminal positivo à esquerda, e  $w$  é uma fonte de 4 V com o terminal positivo à esquerda.
- 6.10 A figura do Ex. 6.2.2 e as figuras (a) e (b) mostradas aqui são exemplos de um gráfico de rede escada. Existe um teorema que estabelece que o número de árvores num gráfico de escada de  $n$  ramos é o número de Fibonacci  $a_n$ , definido por  $a_0 = a_1 = 1$ ,  $a_2 = a_0 + a_1 = 2$ ,  $a_3 = a_1 + a_2 = 3$ ,  $a_4 = a_2 + a_3 = 5$  etc. Isto é, exceto  $a_0$  e  $a_1$ , cada número de Fibonacci é obtido da soma dos dois anteriores. Demonstre que o teorema se verifica para os gráficos de escada mostrados e também para o gráfico da figura do Ex. 6.2.2.
- 6.11 Os gráficos mostrados em (a) e (b) são dois gráficos básicos não-planares [o (b) é o da figura do Prob. 6.8 redesenhado]. O ramo

$a-b$  em (a) é uma fonte de tensão ideal de 6 V com o terminal positivo na parte superior e em (b) é uma fonte de corrente ideal de 4 A fluindo para cima. Todos os outros ramos nas duas figuras são resistores de  $1 \Omega$ . Calcule  $i$  mostrado em cada figura usando os métodos da teoria de gráficos.

- 6.12 Resolva o Prob. 4.25 usando o método de conjunto de corte.
- 6.13 Calcule  $v$  no circuito do Prob. 4.17, usando o método de corrente de enlace.
- 6.14 Calcule  $v_1$  e  $v_2$  na Fig. 6.12 (a) usando as correntes de enlace como incógnitas.
- 6.15 Calcule  $v$  e  $v_1$  no Prob. 4.15 usando o método de correntes de enlace.
- 6.16 Resolva o Prob. 4.25 usando o método de corrente de enlace.
- 6.17 Resolva o Prob. 4.26 usando métodos da teoria de gráficos.
- 6.18 Resolva o Prob. 4.29 usando métodos da teoria de gráficos.
- 6.19 Resolva o Prob. 4.2, usando métodos da teoria de gráficos.
- 6.20 Resolva o Prob. 4.3, usando métodos da teoria de gráficos.



PROBLEMA 6.10



PROBLEMA 6.11



# 7

## Elementos Armazenadores de Energia

---

*Minha maior descoberta foi Michael Faraday.*

*Sir Humphry Davy*

---

Em 29 de agosto de 1831, Michael Faraday, grande químico e físico inglês, descobriu a indução eletromagnética, ao constatar que o movimento de um ímã através de uma bobina de fio de cobre causava o fluxo de uma corrente elétrica no fio. Como o motor e o gerador elétrico são baseados neste princípio, a descoberta de Faraday provocou mudanças no curso da história mundial. Quando perguntado mais tarde, pelo primeiro-ministro britânico, que uso poderia ter sua descoberta, Faraday ironizou: "Algum dia será possível taxá-la."

Faraday, um dos 10 filhos de um ferreiro, nasceu próximo a Londres. Seu primeiro aprendizado foi o de encadernador, mas aos 22 anos de idade realizou seu grande sonho da juventude, tornando-se assistente, na Instituição Real, de seu ídolo, o grande químico Sir Humphry Davy. Ele permaneceu na Instituição por 54 anos, substituindo Davy quando este se aposentou. Faraday foi talvez o maior experimentalista de todos os tempos, com realizações creditadas em quase todas as áreas da física conhecidas em seu tempo. Para descrever o fenômeno que investigava, ele e um amigo, filósofo e cientista, inventaram novas palavras como eletrólise, eletrólito, íon, ânodo e catodo. Em sua honra, a unidade de capacitância é denominada *farad*. ■

Até agora, temos considerado somente circuitos resistivos, isto é, circuitos contendo resistências e fontes. As curvas características destes elementos são simples equações algébricas que levam a equações de circuito também algébricas. Neste capítulo introduziremos dois importantes elementos dinâmicos de circuitos, o capacitor e o indutor, cujas equações são diferenciais ao invés de algébricas. Esses elementos são referidos como *dinâmicos* porque, no caso ideal, armazenam energia que pode ser recuperada algum tempo depois. Outro termo que é usado por esta razão é elementos *armazenadores*.

Primeiro descreveremos as propriedades da capacitância e discutiremos o modelo matemático de um dispositivo ideal. As características dos terminais e de energia serão então dadas, seguidas de equações para conexões em paralelo e em série de dois ou mais capacitores. Repetiremos, então, este procedimento para o indutor.

O capítulo será concluído com uma discussão sobre capacitores e indutores práticos e seus circuitos equivalentes.

## 7.1

### Capacitores

Um *capacitor* é um dispositivo de dois terminais constituído por dois corpos condutores separados por um material não-condutor. Este material não-condutor é conhecido como isolador ou *dielétrico*. Por causa do dielétrico, as cargas não podem se mover de um corpo condutor a outro, por dentro do dispositivo. Devem, portanto, ser transportadas entre os dois corpos condutores, através de um circuito externo conectado aos terminais do capacitor. Um tipo muito simples, chamado de capacitor de placas paralelas, é mostrado na Fig. 7.1. Os corpos condutores são condutores retangulares planos separados por um material dielétrico.

Para descrever a relação carga-tensão do dispositivo, vamos transferir uma carga de uma placa a outra. Suponha, por exemplo, que, por meio de um circuito externo, levemos uma pequena carga, dita  $\Delta q$ , da placa inferior para a superior. Isto, certamente, deposita uma carga de  $+\Delta q$  na placa superior e deixa na placa inferior uma carga de  $-\Delta q$ . Visto que mover estas cargas requer a separação de cargas diferentes (lembre-se que cargas diferentes se atraem), uma pequena quantidade de trabalho é desenvolvida, e a placa superior é elevada a um potencial de, digamos,  $\Delta v$ , em relação à placa inferior.

Cada incremento de carga  $\Delta q$  que transferimos aumenta a diferença de potencial entre as placas de  $\Delta v$ . Portanto, a diferença de potencial entre as placas é proporcional à carga transferida. Isto sugere que uma mudança na tensão do terminal de  $\Delta v$  provoca uma alteração correspondente na carga da placa superior de uma quantidade  $\Delta q$ . Então, a carga é proporcional à diferença de potencial. Isto é, se uma tensão  $v$  corresponde a uma carga  $q$  no capacitor ( $+q$  na placa superior e  $-q$  na inferior) então o capacitor

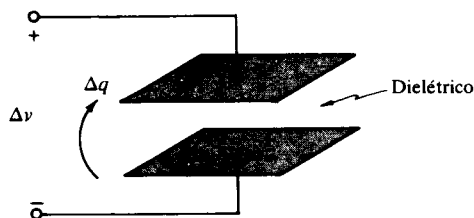


FIGURA 7.1 Capacitor de placas paralelas

estará *carregado* a uma tensão  $v$ , que é proporcional à carga  $q$ . Podemos então escrever:

$$q = Cv \quad (7.1)$$

onde  $C$  é uma constante de proporcionalidade, conhecida como *capacitância* do dispositivo, em coulombs por volt. A unidade de capacitância é conhecida como *farad* (F), em homenagem ao famoso físico britânico Michael Faraday (1791-1867). Os capacitores que satisfazem (7.1) são chamados de *capacitores lineares*, pois sua característica carga x tensão é a equação de uma linha reta de inclinação  $C$ .

É interessante notar no exemplo acima que a carga total dentro do capacitor é sempre zero. As cargas removidas de uma placa aparecem na outra, de forma que a carga total é sempre zero. Podemos ainda observar que as cargas que deixam um terminal entram no outro. Este fato concorda com a exigência de que a corrente que entra em um terminal precisa sair pelo outro, em um dispositivo de dois terminais (*bipolo*).

Uma vez que a corrente é definida como a razão de variação das cargas, diferenciando (7.1), encontramos

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (7.2)$$

que é a relação corrente-tensão em um capacitor.

O símbolo de capacitor para um circuito e a convenção tensão-corrente que satisfaz (7.2) são mostrados na Fig. 7.2. É evidente que movendo uma carga  $\Delta q$ , na Fig. 7.1, do condutor inferior para o superior representa a corrente entrando do terminal superior. O movimento desta carga no terminal superior torna-o mais positivo que o inferior por uma quantidade  $\Delta v$ . Portanto, a convenção corrente-tensão da Fig. 7.2 é satisfeita. Se a polaridade da tensão ou o sentido da corrente forem invertidas, então a corrente que entra no terminal positivo é  $-i$  e (7.2) torna-se

$$i = -C \frac{dv}{dt}$$

Lembramos que, neste caso, um sinal negativo também foi exigido na lei de Ohm.

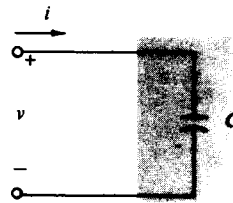


FIGURA 7.2 Símbolo de capacitor para um circuito

### EXEMPLO 7.1

Por exemplo, suponha que a tensão num capacitor de  $1\text{-}\mu\text{F}$  é

$$v = 6 \cos 2000t \text{ V}$$

Então, a corrente é

$$\begin{aligned} i &= C \frac{dv}{dt} = 10^{-6} (-12.000 \text{ sen } 2000t) \text{ A} \\ &= -12 \text{ sen } 2000t \text{ mA} \end{aligned}$$

Em (7.2), vemos que, se  $v$  é constante, então a corrente  $i$  é zero. Portanto, o capacitor atua como um circuito aberto para a corrente contínua. Por outro lado, quanto mais rápido  $v$  se altera, maior é a corrente que flui em seus terminais. Considere, por exemplo, uma tensão que cresce linearmente de 0 a 1 V em  $a^{-1}$ s, dado por

$$\begin{aligned} v &= 0, & t &\leq 0 \\ &= at, & 0 &\leq t \leq a^{-1} \\ &= 1, & t &\geq a^{-1} \end{aligned}$$



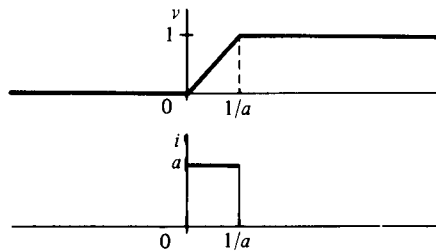


FIGURA 7.3 Formas de onda de corrente e de tensão para um capacitor de 1-F

Se esta tensão é aplicada aos terminais de um capacitor de 1-F (valor imenso, não usual, que serve apenas como ilustração) a corrente resultante é

$$\begin{aligned} i &= 0, & t < 0 \\ &= a, & 0 < t < a^{-1} \\ &= 0, & t > a^{-1} \end{aligned}$$

Gráficos de  $v$  e de  $i$  são mostrados na Fig. 7.3. Vemos que  $i$  é zero quando  $v$  é constante e que é igual a  $a$  quando  $v$  cresce linearmente. Se  $a$  cresce, então  $v$  muda mais rapidamente e  $i$  cresce. É evidente que se  $a^{-1} = 0$  ( $a$  é infinito),  $v$  muda abruptamente (num tempo nulo), de 0 para 1 V.

Em geral, qualquer mudança abrupta ou instantânea na tensão, tal como no exemplo, exige que uma corrente infinita flua pelo capacitor. Uma corrente infinita, entretanto, requer que exista uma potência infinita nos terminais do capacitor, o que é *fisicamente* impossível. Então, mudanças abruptas ou instantâneas da tensão nos terminais de um capacitor são *impossíveis*, e a tensão é constante enquanto a corrente pode ser descontínua. (É possível, é claro, desenhar no papel circuitos que contradizem esta afirmativa. Esses circuitos são modelos matemáticos que não são suficientes para descrever um modelo real, como veremos na Sec. 7.10.) Uma afirmação alternativa, com relação a mudanças bruscas na tensão em circuitos contendo mais de um capacitor, é *que a carga total não pode variar instantaneamente* (conservação de carga).

Agora, vamos encontrar  $v(t)$  em função de  $i(t)$  integrando ambos os lados de (7.2) entre os intervalos de tempo  $t_0$  e  $t$ . O resultado é

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt + v(t_0) \quad (7.3)$$

onde  $v(t_0) = q(t_0)/C$  é a tensão no capacitor  $C$  no tempo  $t_0$ . Nesta equação, a integral representa a tensão acumulada no capacitor no intervalo entre  $t_0$  e  $t$ , enquanto  $v(t_0)$  é a tensão acumulada no intervalo entre  $-\infty$  e  $t_0$ . A tensão  $v(-\infty)$ , é claro, é considerada zero. Logo, uma forma alternativa de (7.3) é

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt$$

## EXEMPLO 7.2

Na aplicação deste resultado obteremos, obviamente, a área associada com o gráfico de  $i$  de  $-\infty$  até  $t$ . Na Fig. 7.3, por exemplo, desde que  $v(-\infty) = 0$  e  $C = 1$  F, temos

$$v = \frac{1}{1} \int_{-\infty}^t (0) dt + v(-\infty) = 0, \quad t \leq 0$$

Portanto,  $v(0) = 0$ , e

$$v = \frac{1}{1} \int_0^t a dt + v(0) = at, \quad 0 \leq t \leq a^{-1}$$

Portanto,  $v(1/a) = 1$ , tal que

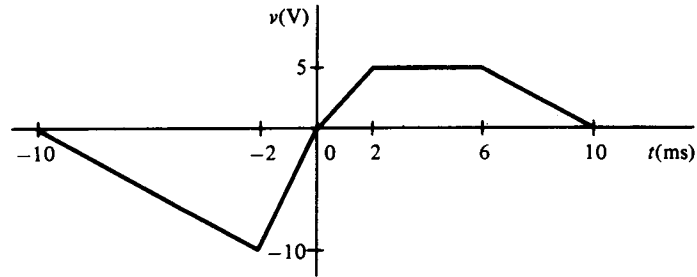
$$v = \frac{1}{1} \int_{1/a}^t (0) dt + v\left(\frac{1}{a}\right) = 1, \quad t \geq a^{-1}$$

que está de acordo com  $v$  na Fig. 7.3.

Neste exemplo, vemos que  $v$  e  $i$  não têm necessariamente a mesma forma. Especificamente, os valores máximos e mínimos de  $v$  e  $i$  não ocorrem necessariamente no mesmo instante, diferentemente do caso do resistor. De fato, uma inspeção da Fig. 7.3 revela que a corrente pode ser descontínua mesmo quando a tensão é contínua, como anteriormente demonstrado.

## EXERCÍCIOS

- 7.1.1 Um capacitor de 1-nF tem uma tensão de  $v = 10 \text{ sen } 1000t$  V. Calcule sua corrente.  
*Resposta:*  $10 \cos 1000t \mu\text{A}$
- 7.1.2 Um capacitor de  $0,4 \mu\text{F}$  tem uma tensão  $v$  como mostrado. Calcule a corrente em  $t = -4, -1, 1, 5$  e  $8$  ms.  
*Resposta:*  $-0,5, 2, 1,0, -0,5$  mA



EXERCÍCIO 7.1.2

- 7.1.3 Uma corrente de 10 mA está carregando um capacitor de  $10 \mu\text{F}$  (entrando em seu terminal de tensão positivo). Se o capacitor estava inicialmente carregado com 5 V, calcule a carga e a tensão sobre ele após 20 ms.  
*Resposta:*  $0,25$  mC,  $25$  V
- 7.1.4 Considere o gráfico do Ex. 7.1.2 como sendo o gráfico de  $i(\text{A})$  versus  $t(\text{ms})$  em um capacitor de  $1/4\text{-F}$ . Calcule a tensão em  $t = -4, -1, 1, 5$  e  $8$  ms.  
*Resposta:*  $-90, -190, -195, -120, -70$  mV

## 7.2

### Energia Armazenada em Capacitores

A tensão através dos terminais de um capacitor é acompanhada pela separação das cargas elétricas entre as placas do capacitor. Estas cargas têm forças elétricas atuando sobre elas. Um *campo elétrico*, uma grandeza básica na teoria do eletromagnetismo, é definido como a força atuando sobre uma unidade de carga positiva. Então, as forças que atuam nas cargas dentro do capacitor podem ser consideradas como resultantes de um campo elétrico. Por esta razão, a energia armazenada ou acumulada em um capacitor é dita armazenada em um campo elétrico.

A energia armazenada em um capacitor, de (1.6) e (7.2), é dada por

$$\begin{aligned} w_C(t) &= \int_{-\infty}^t vi \, dt = \int_{-\infty}^t v \left( C \frac{dv}{dt} \right) dt \\ &= C \int_{-\infty}^t v \, dv = \frac{1}{2} C v^2(t) \Big|_{-\infty}^t \end{aligned}$$

Visto que  $v(-\infty) = 0$ , podemos escrever

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) \text{ J} \quad (7.4)$$

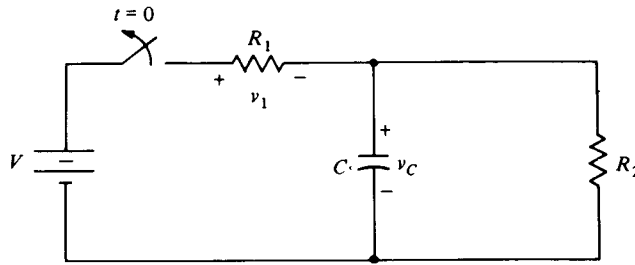


FIGURA 7.4 Circuito ilustrando a continuidade da tensão em um capacitor

Deste resultado, vemos que  $w_C(t) \geq 0$ . Portanto, de (1.7), o capacitor é um elemento passivo do circuito. Em termos da carga no dispositivo, (7.1) e (7.4) geram

$$w_C(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} \text{ J} \quad (7.5)$$

O capacitor ideal, diferente do resistor, *não pode* dissipar nenhuma energia. A energia que é armazenada no dispositivo pode então ser recuperada.

Considere, por exemplo, que um capacitor de 1-F tem uma tensão de 10 V. A energia armazenada é

$$w_C = \frac{1}{2} C v^2 = 50 \text{ J}$$

Suponha que o capacitor não esteja conectado em um circuito; logo, nenhuma corrente pode fluir, e a carga, a tensão e a energia permanecem constantes. Se agora conectarmos um resistor aos terminais do capacitor, uma corrente irá fluir até que toda a energia (50 J) seja absorvida como calor pelo resistor, e a tensão através da associação torna-se zero. A análise de uma rede como esta é encontrada no próximo capítulo.

Como havíamos exposto anteriormente, a tensão em um capacitor é uma função contínua. Então, de (7.4) vemos que a energia armazenada em um capacitor é também contínua. Isto não é surpresa, pois, de outra forma, a energia teria que ser transportada de uma placa a outra em um tempo zero, o que é uma impossibilidade.

Para ilustrar a continuidade da tensão em um capacitor, vamos considerar a Fig. 7.4, que contém uma chave que está aberta em  $t = 0$ , como indicado. (Idealmente, uma chave transforma um par de terminais de circuito aberto em um curto-circuito, ou vice-versa, em um tempo nulo). Para discutir o efeito da ação de um chaveamento, precisamos, primeiro, considerar dois diferentes tipos de tempo  $t = 0$ . Chamaremos  $t = 0^-$  como o tempo imediatamente anterior a ação de chaveamento e  $t = 0^+$  como o tempo imediatamente após a ação de chaveamento. Teoricamente, é claro, não há tempo envolvido entre  $0^-$  e  $0^+$ , mas os dois tempos representam estados totalmente diferentes do circuito. Então  $v_C(0^-)$  é a tensão no capacitor imediatamente antes da chave ser acionada e  $v_C(0^+)$  é a tensão imediatamente após o chaveamento. Matematicamente,  $v_C(0^-)$  é o limite de  $v_C(t)$  quando  $t$  se aproxima de zero a partir de valores negativos ( $t < 0$ ) e  $v_C(0^+)$  é o limite de  $t$  quando este se aproxima de zero por valores positivos ( $t > 0$ ). A mesma notação se aplica a  $v_1$  através do resistor  $R_1$ .

### EXEMPLO 7.3

Suponha que na Fig. 7.4 temos  $V = 6 \text{ V}$  e  $v_C(0^-) = 4 \text{ V}$ . Imediatamente antes do chaveamento ( $t = 0^-$ ) temos  $v_1(0^-) = V - v_C(0^-) = 2 \text{ V}$ . Imediatamente após a chave ser aberta, temos  $v_1(0^+) = 0$ . Visto que nenhuma corrente flui para  $R_1$ . Entretanto, como o  $v_C$  continua, temos

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 4 \text{ V}$$

Então a tensão no resistor  $R_1$  muda abruptamente, mas não no capacitor. A tensão em  $R_2$  é a mesma que a no capacitor, logo, também não muda.

Obviamente pode-se considerar, em circuitos teóricos, que as tensões no capacitor são forçadas a se alterar abruptamente. Por exemplo, se dois capacitores tendo tensões diferentes são repentinamente conectados em paralelo por um chaveamento, sua tensão comum resultante não pode ser a mesma que as suas tensões diferentes anteriores. Consideraremos tais circuitos *singulares* na Seção 7.10, onde veremos que a energia armazenada parece mudar abruptamente. A mudança aparente não pode ser considerada para os modelos concentrados que estamos empregando, mas deve ser ressaltado que os modelos concentrados empregados são válidos antes e depois (embora não durante) da ação de chaveamento. Circuitos reais, entretanto, têm resistências associadas ao capacitor (tais como a dos fios e a do dielétrico) que

impedem as correntes infinitas que precisam acompanhar as descontinuidades na tensão do capacitor. Estes são o tipo de circuitos que serão abordados, no caso geral.

## EXERCÍCIOS

- 7.2.1** Um capacitor de  $0,2\text{-}\mu\text{F}$  tem uma carga de  $20\ \mu\text{C}$ . Calcule a tensão e a energia.  
*Resposta:* 100 V, 1 mJ
- 7.2.2** Se a energia armazenada em um capacitor de  $0,5\text{-F}$  é 25 J, calcule a tensão e a carga.  
*Resposta:* 10 V, 5 C
- 7.2.3** Na Fig. 7.4, considere que  $C = 1/4\ \text{F}$ ,  $R_1 = R_2 = 4\ \Omega$  e  $V = 20\ \text{V}$ . Se a corrente em  $R_2$  em  $t = 0^-$  é 2 A no sentido para baixo, calcule em  $t = 0^-$  e em  $t = 0^+$  (a) a carga no capacitor, (b) a corrente em  $R_1$  que flui para a direita, (c) a corrente no capacitor  $C$  que flui para baixo e (d)  $dv_C/dt$ .  
*Resposta:* (a) 2, 2 C; (b) 3, 0 A; (c) 1, -2 A; 4, -8 V/s

## 7.3

### Capacitores em Série e em Paralelo

Nesta seção, determinaremos capacitância equivalente para associações em séries e em paralelo de capacitores. Como veremos, capacitância equivalente é análoga a condutância equivalente.

Vamos primeiro considerar a conexão em série de  $N$  capacitores, como mostrado na Fig. 7.5(a). Aplicando a LKT, encontramos

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_N \quad (7.6)$$

De (7.3), esta equação pode ser escrita

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{C_1} \int_{t_0}^t i\ dt + v_1(t_0) + \frac{1}{C_2} \int_{t_0}^t i\ dt + v_2(t_0) + \dots + \frac{1}{C_N} \int_{t_0}^t i\ dt + v_N(t_0) \\ &= \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} \right) \int_{t_0}^t i\ dt + v_1(t_0) + v_2(t_0) + \dots + v_N(t_0) \end{aligned}$$

ou, por (7.6),

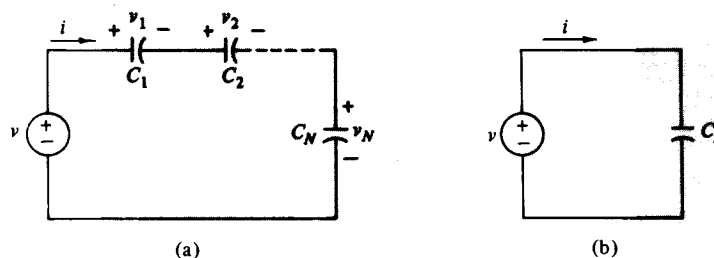
$$v(t) = \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n} \right) \int_{t_0}^t i\ dt + v(t_0)$$

Na Fig. 7.5(b), vemos que

$$v(t) = \frac{1}{C_s} \int_{t_0}^t i\ dt + v(t_0)$$

onde  $v(t_0)$  é a tensão em  $C_s$  quando  $t = t_0$ .

Suponha que queiramos que o circuito da Fig. 7.5(b) seja equivalente ao da Fig. 7.5(a). Comparando



**FIGURA 7.5.** (a) Associação de  $N$  capacitores em série; (b) circuito equivalente

as duas últimas equações, vemos que

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n} \quad (7.7)$$

da qual podemos calcular a capacitância equivalente  $C_s$ .

No caso de dois capacitores em série  $C_1$  e  $C_2$ , (7.7) pode ser simplificado para

$$C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Em outras palavras, a capacitância equivalente é o produto sobre a soma das duas capacitâncias individuais. Isto é análogo a duas resistências em *paralelo*.

### EXEMPLO 7.4

Como um exemplo da utilidade de (7.6) e (7.7), considere a associação em série de capacitores de 1- e 1/3-F, tendo tensões iniciais de 4 a 6 V, respectivamente. Então,

$$\frac{1}{C_s} = 1 + 3$$

ou

$$C_s = 0,25 \text{ F}$$

e

$$v(t_0) = 4 + 6 = 10 \text{ V}$$

Consideraremos agora a associação em paralelo de  $N$  capacitores, como mostrado na Fig. 7.6(a). A aplicação da LKT dá

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_N$$

Da substituição de (7.2), temos

$$\begin{aligned} i &= C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + \dots + C_N \frac{dv}{dt} \\ &= \left( C_1 + C_2 + \dots + C_N \right) \frac{dv}{dt} = \left( \sum_{n=1}^N C_n \right) \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

No circuito da Fig. 7.6(b), a corrente é

$$i = C_p \frac{dv}{dt}$$

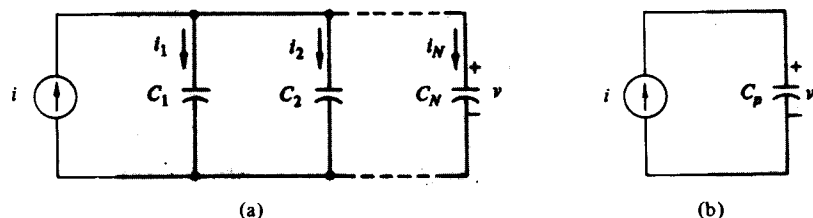


FIGURA 7.6 (a) Associação em paralelo de  $N$  capacitores; (b) circuito equivalente

Agora, se quisermos que este circuito seja equivalente ao da Fig. 7.6(a), a equação acima dá

$$C_p = C_1 + C_2 + \dots + C_N = \sum_{n=1}^N C_n \quad (7.8)$$

Então, a capacitância equivalente de  $N$  capacitores em paralelo é a simples soma das capacitâncias individuais. Naturalmente, uma tensão inicial deve ser igual à que está presente nos terminais da associação em paralelo.

É interessante notar que a capacitância equivalente de associações em série e em paralelo de capacitores é análoga à condutância equivalente de condutâncias em série e em paralelo.

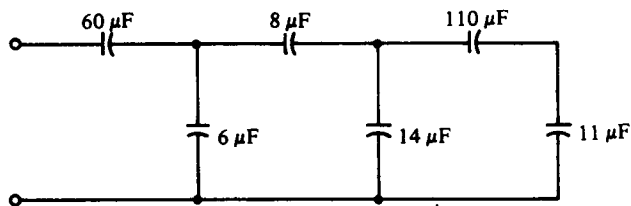
## EXERCÍCIOS

**7.3.1** Calcule os valores máximo e mínimo da capacitância que pode ser obtida de 10 capacitores de  $1\text{-}\mu\text{F}$ .

*Resposta:*  $10\ \mu\text{F}$ ,  $0,1\ \mu\text{F}$

**7.3.2** Calcule a capacitância equivalente.

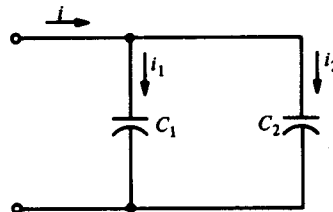
*Resposta:*  $10\ \mu\text{F}$



EXERCÍCIO 7.3.2

**7.3.3** Deduza uma equação para a divisão da corrente entre dois capacitores em paralelo, calculando os valores de  $i_1$  e  $i_2$ .

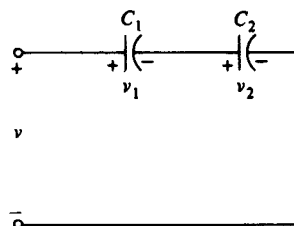
*Resposta:*  $\frac{C_1}{C_1 + C_2} i$ ,  $\frac{C_2}{C_1 + C_2} i$



EXERCÍCIO 7.3.3

**7.3.4** Deduza uma equação para a divisão de tensão entre dois capacitores em série descarregados, calculando os valores de  $v_1$  e  $v_2$ .

*Resposta:*  $\frac{C_2}{C_1 + C_2} v$ ,  $\frac{C_1}{C_1 + C_2} v$



EXERCÍCIO 7.3.4

## Indutores

Nas seções anteriores, vimos que as características elétricas do capacitor são resultado de forças que existem entre cargas elétricas. Assim como cargas estáticas exercem forças uma sobre a outra, foi descoberto que cargas em movimento, ou correntes, também influenciam uma a outra. A força que é experimentada por dois fios vizinhos conduzindo corrente foi experimentalmente determinada por Ampère no início do século XIX. Estas forças podem ser caracterizadas pela existência de um *campo magnético*. O campo magnético, por sua vez, pode ser expresso em termos do *fluxo magnético* que forma laços fechados em volta da corrente. A origem do fluxo é, sem dúvida, a corrente elétrica. O estudo de campos magnéticos, bem como o de campos elétricos, é visto no curso de teoria eletromagnética.

Um indutor é um dispositivo de dois terminais composto de um fio condutor enrolado em espiral. A corrente fluindo através do dispositivo produz um fluxo magnético  $\phi$  que forma laços fechados envolvendo a bobina e gerando o indutor, como mostrado pelo modelo simplificado na Fig. 7.7. Suponha que a bobina tenha  $N$  espirais e que o fluxo  $\phi$  passe através de cada uma. Neste caso, o fluxo total enlaçado pelas  $N$  espirais de uma bobina, denotado por  $\lambda$ , é

$$\lambda = N\phi$$

Este fluxo total é comumente referido como *enlace de fluxo*. A unidade de fluxo magnético é o *weber* (Wb), em homenagem ao físico alemão Wilhelm Weber (1804-1891).

Em um indutor linear, o enlace de fluxo é diretamente proporcional à corrente que flui pelo dispositivo. Portanto, podemos escrever

$$\lambda = Li \quad (7.9)$$

onde  $L$ , a constante de proporcionalidade, é a *indutância* em webers por ampère. A unidade de 1 Wb/A é conhecida como *henry* (H), em homenagem ao físico americano Joseph Henry (1797-1878).

Em (7.9), vemos que um incremento em  $i$  provoca um incremento correspondente em  $\lambda$ . Este incremento em  $\lambda$  produz uma tensão na bobina de  $N$  espirais. O fato de que a tensão ocorre com a variação do fluxo magnético foi primeiro descoberto por Henry, o qual, entretanto, repetindo o erro de Cavendish com o resistor, não divulgou suas descobertas. Como resultado, é creditada a Faraday a descoberta da lei de indução eletromagnética. Esta lei estabelece que a tensão é igual à taxa de variação no tempo do fluxo magnético total. Em forma matemática, a lei é

$$v = \frac{d\lambda}{dt}$$

que com (7.9), fica

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (7.10)$$

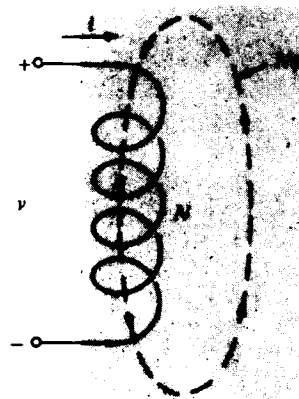


FIGURA 7.7 Modelo simplificado de um indutor

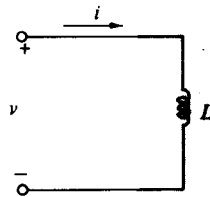


FIGURA 7.8 Símbolo de indutor para um circuito

É claro que, com o aumento de  $i$ , uma tensão é gerada através dos terminais do indutor; a polaridade é a mostrada na Fig. 7.7. Esta tensão se opõe ao crescimento de  $i$ , pois se não fosse este o caso, ou seja, se a polaridade fosse invertida, a tensão induzida iria “ajudar” a corrente. Isto não pode ser verdade fisicamente, pois a corrente cresceria indefinidamente.

O símbolo de circuito e a convenção tensão-corrente para um indutor são mostrados na Fig. 7.8. Assim como no caso do resistor e do capacitor, se a corrente ou a tensão atribuída, mas não ambas, é invertida, então o sinal negativo deve ser usado no lado direito de (7.10).

De (7.10), se  $i$  é constante, então a tensão  $v$  é zero. Portanto, um indutor atua como um curto-circuito para uma corrente contínua. Por outro lado, quanto maior a velocidade de variação de  $i$ , maior será a tensão que aparecerá nos seus terminais.

### EXEMPLO 7.5

Considere, por exemplo, uma corrente que decresce linearmente de 1 para 0 A em  $b^{-1}$ s, definida por

$$\begin{aligned} i &= 1, & t &\leq 0 \\ &= 1 - bt, & 0 &\leq t \leq b^{-1} \\ &= 0, & t &\geq b^{-1} \end{aligned}$$

Um indutor de 1-H sob esta corrente tem uma tensão em seus terminais dada por

$$\begin{aligned} v &= 0, & t &< 0 \\ &= -b, & 0 &< t < b^{-1} \\ &= 0, & t &> b^{-1} \end{aligned}$$

Um gráfico para  $v$  e  $i$  para este caso é mostrado na Fig. 7.9. Vemos que  $v$  é zero quando  $i$  é constante, e é igual a  $-b$  quando  $i$  decresce linearmente. Se  $b$  cresce,  $i$  muda mais rapidamente e  $v$  se torna mais negativo. Finalizando, se  $b^{-1} = 0$  ( $b =$  infinito), então  $i$  varia abruptamente de 1 para 0 A e  $v$  se torna infinito.

Geralmente, mudanças abruptas na corrente, como no exemplo acima, requerem que uma tensão infinita apareça nos terminais do indutor. Como descrito no caso do capacitor, isto requer uma fonte de potência infinita conectada aos terminais do indutor, o que é fisicamente impossível. Então, mudanças instantâneas na corrente que atravessa um indutor *não* são possíveis. Observamos que a corrente é contínua apesar da tensão poder ser descontínua.

Uma afirmativa alternativa sobre variações abruptas na corrente em um circuito que contém mais de um indutor é que o enlace de *fluxo total não pode mudar instantaneamente*. Isto é, para um circuito contendo os indutores  $L_1, L_2, \dots, L_N$  a soma de  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N$  não pode mudar instantaneamente.

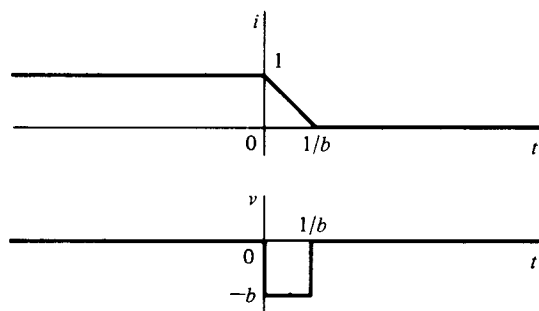


FIGURA 7.9 Formas de onda de corrente e tensão para um indutor de 1-H



Se compararmos (7.1) e (7.9), veremos que o enlace de fluxo em um indutor é análogo à carga no capacitor. Então, a soma dos enlaces de fluxo dados acima (conservação do enlace do fluxo) é análoga à conservação de cargas. Um exemplo empregando a conservação do enlace de fluxo é dado na Seç. 7.10.

Vamos agora calcular a corrente  $i(t)$  em função da tensão  $v(t)$ . Integrando (7.10) no intervalo de tempo de  $t_0$  até  $t$  e resolvendo para  $i(t)$ , temos

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt + i(t_0) \quad (7.11)$$

Nesta equação, a integral representa o crescimento da corrente do tempo  $t_0$  até  $t$ , enquanto  $i(t_0)$  é a corrente em  $t_0$ . Obviamente,  $i(t_0)$  é a corrente acumulada de  $t = -\infty$  até  $t_0$ , onde  $i(-\infty) = 0$ . Então, uma expressão alternativa é

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(t) dt$$

### EXEMPLO 7.6

Na aplicação de (7.11), obtemos no gráfico a área total sob a curva de  $v$  de  $-\infty$  até  $t$ . Visto que  $i(t_0)$  representa a área de  $-\infty$  até  $t_0$ . Na Fig. 7.9, por exemplo, como  $i(0) = 1$  H,

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t (-b) dt + i(0) = -bt + 1, \quad 0 \leq t \leq b^{-1}$$

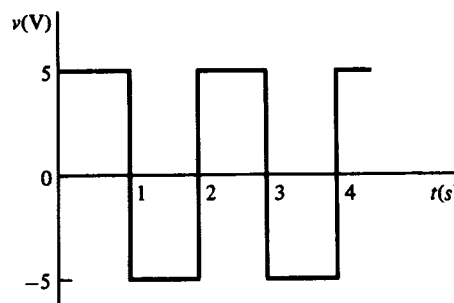
Então,  $i(1/b) = 0$ , e

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{1/b}^t (0) dt + i\left(\frac{1}{b}\right) = 0, \quad b^{-1} \leq t$$

No exemplo acima, vemos que  $v$  e  $i$ , assim como no caso do capacitor, não têm necessariamente a mesma variação no tempo. Uma inspeção da Fig. 7.9, por exemplo, mostra que a tensão pode ser descontínua, mesmo sendo a corrente contínua, como previamente mencionado.

### EXERCÍCIOS

- 7.4.1 Um indutor de 10-mH tem uma corrente de  $50 \cos 1000 t$  mA. Calcule sua tensão e seu enlace de fluxo.  
*Resposta:*  $-0,5 \sin 1000 t$  V,  $0,5 \cos 1000 t$  mWb
- 7.4.2 Calcule a corrente  $i(t)$  para  $t > 0$  num indutor de 20-mH sob uma tensão de  $-5 \sin 50 t$  V, se  $i(0) = 5$  A.  
*Resposta:*  $5 \cos 50 t$  A.
- 7.4.3 Calcule a corrente em um indutor de 0,5-H, para  $0 \leq t \leq 2$  s, se  $i(0) = 0$  e a tensão é como indicada.  
*Resposta:*  $10 t$  A,  $0 \leq t \leq 1$   
 $10 (2 - t)$  A,  $1 \leq t \leq 2$



EXERCÍCIO 7.4.3

## Energia Armazenada em Indutores

Uma corrente  $i$  fluindo através de um indutor produz um enlace de fluxo total  $\lambda$  que passa pelas espirais da bobina que constitui o dispositivo. Assim como um trabalho foi desenvolvido pelo movimento das cargas em um capacitor, um trabalho similar é necessário para estabelecer o fluxo  $\phi$  no indutor. O trabalho ou energia necessário neste caso é dito armazenado no campo magnético.

A energia armazenada em um indutor, empregando (1.6) e (7.10) é dada por

$$\begin{aligned} w_L(t) &= \int_{-\infty}^t vi \, dt = \int_{-\infty}^t \left( L \frac{di}{dt} \right) i \, dt \\ &= L \int_{-\infty}^t i \, di = \frac{1}{2} Li^2(t) \Big|_{t=-\infty}^t \end{aligned}$$

Lembrando que  $i(-\infty) = 0$ , temos

$$w_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) \text{ J} \quad (7.12)$$

O exame desta equação revela que  $w_L(t) \geq 0$ . Portanto, de (1.7) vemos que o indutor é um elemento passivo.

Num indutor ideal, como no caso do capacitor ideal, nenhuma potência é dissipada. Portanto, a energia armazenada em um indutor pode ser recuperada. Considere, por exemplo, um indutor de 2-H que está conduzindo uma corrente de 5 A. A energia armazenada é

$$w_L = \frac{1}{2} Li^2 = 25 \text{ J}$$

Suponha que o indutor, por meio de um circuito externo, esteja conectado em paralelo com um resistor. Neste caso, a corrente flui pela associação até que toda a energia armazenada previamente pelo indutor (25 J) seja absorvida pelo resistor e a corrente seja zero. Soluções de circuitos deste tipo são encontradas no próximo capítulo.

### EXEMPLO 7.7

Uma vez que as correntes em indutores são contínuas, isto implica que a energia armazenada no indutor, como a armazenada no capacitor, também seja contínua. Para ilustrar isto, vamos considerar o circuito da Fig. 7.10, que contém uma chave, a qual é fechada em  $t = 0$ , como indicado. Suponha que  $i_L(0^-) = 2 \text{ A}$  e  $I = 3 \text{ A}$ . Então, pela LKT,  $i_1(0^-) = 3 - 2 = 1 \text{ A}$ . Após o fechamento da chave ( $t = 0^+$ ), temos  $i_1(0^+) = 0$ , visto que um curto-circuito é colocado sobre  $R_1$ . Contudo, temos

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2 \text{ A}$$

Então, a corrente no resistor mudou abruptamente, mas não a corrente no indutor.

Um exemplo de circuito *singular*, no qual a corrente no indutor *parece* ser descontínua é dado na Seç. 7.10. Como no caso de circuitos singulares capacitivos, a aparente descontinuidade na energia armazenada em indutores não pode ser considerada para os modelos concentrados. Entretanto, a teoria de circuitos

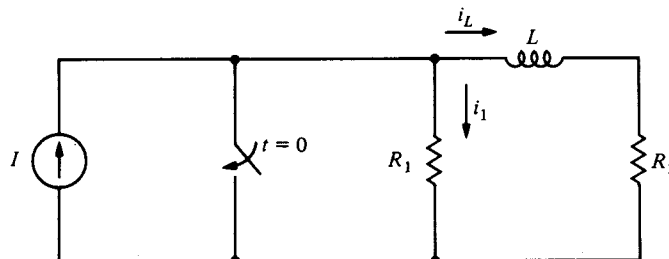


FIGURA 7.10 Circuito ilustrando a continuidade da corrente em um indutor

concentrados é válida antes e depois (não durante) do fechamento da chave. Circuitos práticos contendo indutores têm uma resistência associada que não permite uma tensão infinita no indutor que acompanharia uma mudança abrupta de corrente no indutor. Nos interessaremos inicialmente por circuitos desse tipo.

## EXERCÍCIOS

- 7.5.1 Deduza uma expressão para a energia armazenada em um indutor em termos do enlace de fluxo  $\lambda$  e a da indutância  $L$ .  
*Resposta:*  $\lambda^2/2L$
- 7.5.2 Um indutor de 40-mH tem uma corrente  $i = 100 \cos 10 \pi t$  mA. Calcule o enlace de fluxo e a energia em  $t = 1/30$  s.  
*Resposta:* 2 mWb, 50  $\mu$ J
- 7.5.3 Um indutor de 2-mH tem uma tensão  $v = 2 \cos 1000 t$  V com  $i(0) = 1,5$  A. Calcule a energia armazenada no indutor em  $t = \pi/6$  ms.  
*Resposta:* 4 m J
- 7.5.4 Na Fig. 7.10, seja  $I = 5$  A,  $R_1 = 6 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$ ,  $L = 2$  H, e  $i_1(0^-) = 2$  A. Se a chave é aberta em  $t = 0^-$ , encontre  $i_L(0^-)$ ,  $i_L(0^+)$ ,  $i_1(0^+)$  e  $di_L(0^+)/dt$ .  
*Resposta:* 3 A, 3 A, 0, -6 A/s

## 7.6

### Indutores em Série e em Paralelo

Nesta seção, determinaremos a indutância equivalente para associações em série e em paralelo de indutores. Primeiro, consideraremos uma associação de  $N$  indutores em série, como mostrado na Fig. 7.11(a). Aplicando a LKT vemos que

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_N$$

da qual podemos escrever

$$\begin{aligned} v &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \dots + L_N \frac{di}{dt} \\ &= (L_1 + L_2 + \dots + L_N) \frac{di}{dt} \\ &= \left( \sum_{n=1}^N L_n \right) \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

Para o circuito da Fig. 7.11(b), a tensão é

$$v = L_s \frac{di}{dt}$$

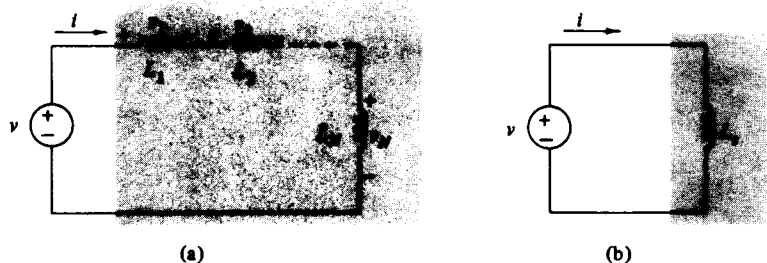


FIGURA 7.11 (a) Associação de  $N$  indutores em série, (b) circuito equivalente

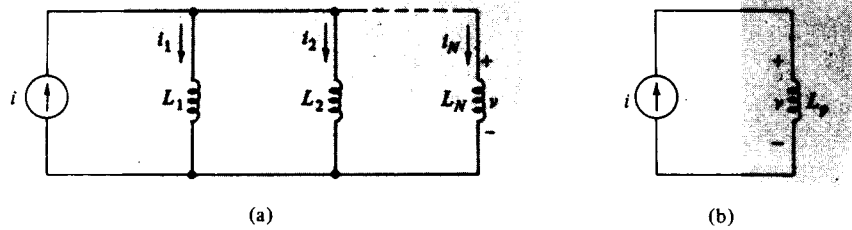


FIGURA 7.12 (a) Associação em paralelo de  $N$  indutores; (b) circuito equivalente

Se agora queremos que este circuito seja um circuito equivalente a uma associação em série, então a equação acima dá

$$L_s = L_1 + L_2 + \dots + L_N = \sum_{n=1}^N L_n \quad (7.13)$$

Portanto, a indutância equivalente de  $N$  indutores em série é simplesmente a soma das indutâncias individuais. Ainda, a corrente inicial será igual à que flui na associação em série.

Vamos agora considerar a associação paralela de  $N$  indutores, como mostrado na Fig. 7.12(a). A aplicação da LKC dá

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_N \quad (7.14)$$

Substituindo de (7.11), temos

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L_1} \int_{t_0}^t v \, dt + i_1(t_0) + \frac{1}{L_2} \int_{t_0}^t v \, dt + i_2(t_0) + \dots + \frac{1}{L_N} \int_{t_0}^t v \, dt + i_N(t_0) \\ &= \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N} \right) \int_{t_0}^t v \, dt + i_1(t_0) + i_2(t_0) + \dots + i_N(t_0) \end{aligned}$$

ou, por (7.14),

$$i(t) = \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{L_n} \right) \int_{t_0}^t v \, dt + i(t_0)$$

Na Fig. 7.12(b), vemos que

$$i(t) = \frac{1}{L_p} \int_{t_0}^t v \, dt + i(t_0)$$

onde  $i(t_0)$  é a corrente em  $L_p$  em  $t = t_0$ . Se este circuito é uma rede equivalente a associação em paralelo, então as equações acima exigem que a indutância paralela equivalente seja dada por

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{L_n} \quad (7.15)$$

No caso de dois indutores  $L_1$  e  $L_2$  em paralelo, (7.15) pode ser simplificada para

$$L_p = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

que é análogo à equivalência de duas resistências em paralelo.

### EXEMPLO 7.8

Como um exemplo, suponha que tenhamos dois indutores em paralelo de 6 e de 3 H conduzindo correntes iniciais de 2 e 1 A, respectivamente. A associação em paralelo pode ser trocada por uma indutância

única

$$L_p = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2 \text{ H}$$

conduzindo uma corrente inicial de

$$i(t_0) = 2 + 1 = 3 \text{ A}$$

No caso de indutores, é interessante observar que o valor da indutância equivalente para associações em série e em paralelo é análogo à resistência equivalente de resistores em série e em paralelo.

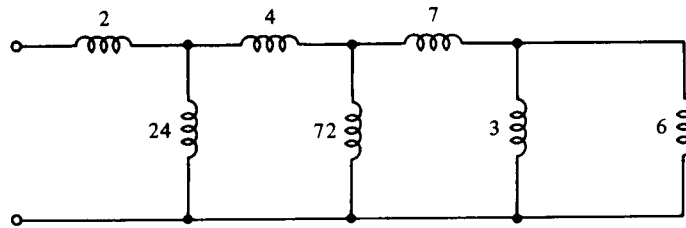
## EXERCÍCIOS

- 7.6.1** Calcule os valores máximo e mínimo da indutância que pode ser obtida usando-se 10 indutores de 10-mH.

*Resposta:* 100 mH, 1 mH

- 7.6.2** Calcule a indutância equivalente. (Os valores dos indutores são dados em mH.)

*Resposta:* 10 mH

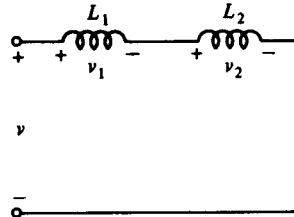


EXERCÍCIO 7.6.2

- 7.6.3** Deduza uma equação para a divisão da tensão entre os dois indutores em série, por meio de  $v_1$  e  $v_2$ .

*Resposta:*

$$\frac{L_1}{L_1 + L_2} v, \frac{L_2}{L_1 + L_2} v$$

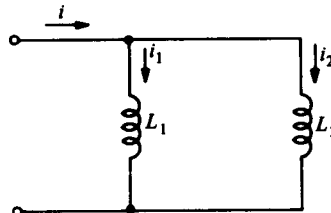


EXERCÍCIO 7.6.3

- 7.6.4** Deduza uma equação para a divisão de corrente entre dois indutores em paralelo, sem corrente inicial, por meio de  $i_1$  e  $i_2$ .

*Resposta:*

$$\frac{L_2}{L_1 + L_2} i, \frac{L_1}{L_1 + L_2} i$$



EXERCÍCIO 7.6.4

## Regime Permanente em Corrente Contínua

Se as únicas fontes independentes em um circuito são de cc, tais como baterias ou fontes de correntes constante, então, transcorrido um tempo, todas as correntes e tensões estabilizam em valores constantes. Isto é porque fontes constantes, contínua e inexoravelmente, exercem influências de estabilização no circuito em que, na ausência de outras forças, venham predominar. Quando todas as tensões e correntes atingem valores constantes, dizemos que o circuito está num *regime permanente cc*. Na Seq. 8.4, veremos como o regime permanente em corrente contínua é estabelecido, quando uma chave foi aberta ou fechada por muito tempo na presença de fontes cc e veremos ainda que, na prática, um “longo tempo” é questão de poucos segundos.

Evidentemente, num regime permanente cc, os capacitores são como circuitos abertos (suas correntes são iguais a zero), e indutores, como curto-circuitos (suas tensões são nulas). Então, o problema de encontrar as correntes e as tensões em regime permanente cc é o de resolver circuitos resistivos com fontes constantes. Para analisar um circuito para  $t > 0$ , como veremos no Cap. 8, precisaremos de certas *condições iniciais* (valores de certas correntes e tensões, bem como de suas derivadas em  $t = 0^+$ ), que podem ser encontradas das condições de regime permanente cc.

### EXEMPLO 7.9

Como um exemplo, consideremos o circuito *RLC* da Fig. 7.13(a), que está em regime permanente cc quando a chave é aberta em  $t = 0$ . Em  $t = 0^-$ , imediatamente antes da ação de chaveamento, o circuito é mostrado na Fig. 7.13(b), onde a chave está fechada, o capacitor é um circuito aberto, e o indutor é um curto-circuito. Deste circuito, temos  $i(0^-) = 10/5 = 2 \text{ A}$  e  $v(0^-) = 3i(0^-) = 6 \text{ V}$ . O circuito em  $t = 0^+$  (pouco depois da chave ser aberta) é mostrado na Fig. 7.13(c), onde

$$v(0^+) = v(0^-) = 6 \text{ V}$$

$$i(0^+) = i(0^-) = 2 \text{ A}$$

Se necessitamos das derivadas da corrente no indutor e da tensão no capacitor em  $t = 0^+$ , podemos encontrá-las na Fig. 7.13(c) da equação de laço.

$$2 \frac{di(0^+)}{dt} + 3i(0^+) - v(0^+) = 0$$

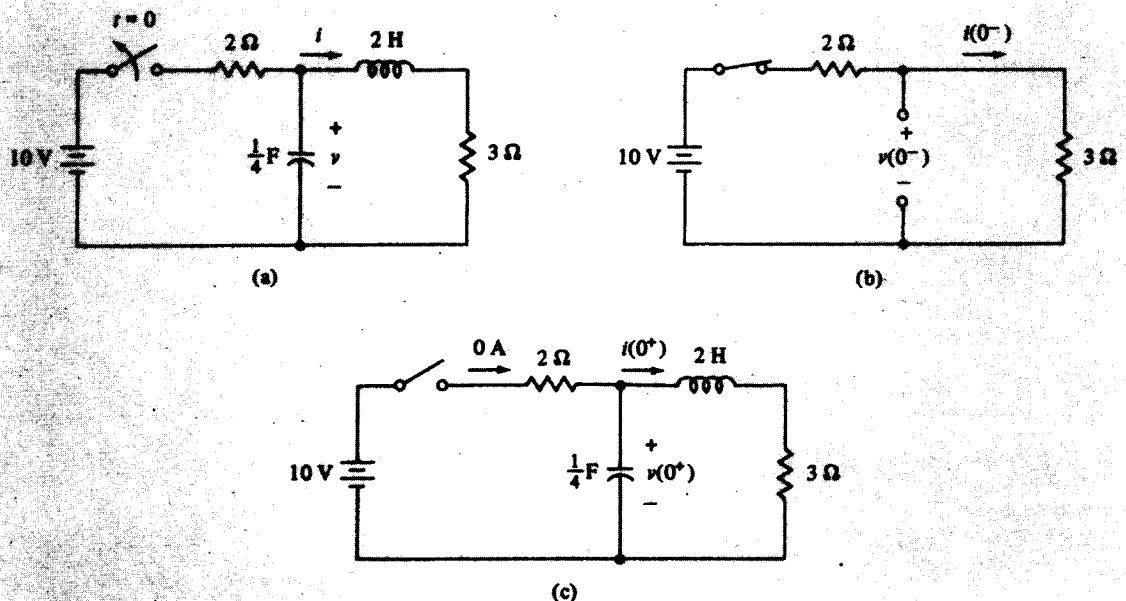


FIGURA 7.13 (a) Circuito *RLC*; (b) circuito em  $t = 0^-$ ; (c) circuito em  $t = 0^+$

e a equação nodal

$$\frac{1}{4} \frac{dv(0^+)}{dt} + i(0^+) - 0 = 0$$

Que fornecem, respectivamente,

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{1}{2}[-3(2) + 6] = 0$$

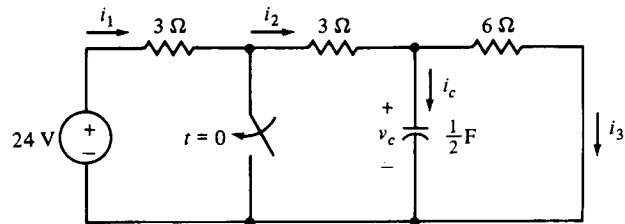
e

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = -4(2) = -8 \text{ V/s}$$

## EXERCÍCIOS

**7.7.1** O circuito está em regime permanente cc em  $t = 0^-$ . Calcule (a)  $i_1$ , (b)  $i_2$ , (c)  $i_3$ , (d)  $i_C$ ; e (e)  $v_C$  em  $t = 0^-$  e em  $t = 0^+$ .

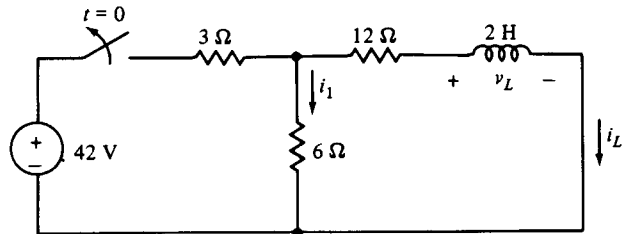
Resposta: (a) 2, 8 A; (b) 2, -4 A; (c) 2, 2 A; (d) 0, -6 A; (e) 12, 12V



EXERCÍCIO 7.7.1

**7.7.2** Se o circuito está em estado permanente cc em  $t = 0^-$ , calcule (a)  $i_1$ , (b)  $i_L$ , e (c)  $v_L$  em  $t = 0^-$  e em  $t = 0^+$ .

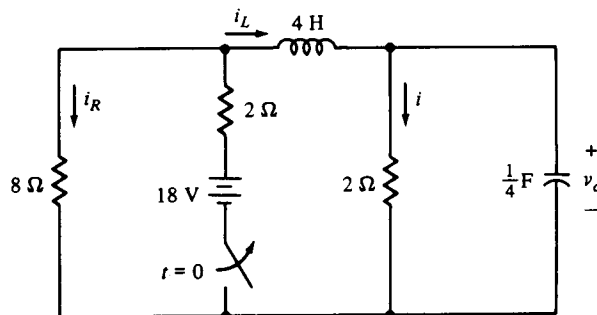
Resposta: (a) 4, -2 A; (b) 2, 2 A; (c) 0, -36 V



EXERCÍCIO 7.7.2

**7.7.3** O circuito está em estado permanente cc em  $t = 0^-$ . Calcule (a)  $v_C$ , (b)  $i_L$ , (c)  $i$  e (d)  $i_R$  em  $t = 0^-$  e em  $t = 0^+$ .

Resposta: (a) 8, 8 V; (b) 4, 4 A; (c) 4, 4 A; (d) 1, -4 A



EXERCÍCIO 7.7.3

## Capacitores e Indutores Práticos

Os capacitores disponíveis comercialmente são fabricados em uma grande variedade de tipos, valores e tensões nominais. O tipo de capacitor é geralmente classificado pelo dielétrico empregado, e sua capacitância é determinada pelo tipo de dielétrico e a geometria física do dispositivo. A tensão nominal, ou *tensão de trabalho*, é a máxima tensão que pode ser aplicada com segurança ao capacitor. Tensões superiores a este valor podem provocar danos permanentes ao dispositivo por destruição ou ruptura do dielétrico.

Capacitores simples são frequentemente construídos com o emprego de duas lâminas metálicas que são separadas por um material dielétrico. As lâminas e o dielétrico são pressionados em uma forma laminar e então enrolados ou dobrados em um encapsulamento compacto. Condutores elétricos são conectados às lâminas constituindo os terminais do capacitor.

Capacitores práticos ou reais, diferentemente dos ideais, geralmente dissipam uma pequena quantidade de potência. Isto é devido primeiramente a correntes de *fuga* que ocorrem dentro do material dielétrico do dispositivo. Dielétricos reais têm uma condutância não-nula pela qual flui uma corrente *ôhmica* entre as placas do capacitor. Esta corrente é facilmente incluída no circuito equivalente do dispositivo pela colocação de uma resistência em paralelo com uma capacitância ideal, como mostrado na Fig. 7.14. Nesta figura  $R_C$  representa as perdas ôhmicas do dielétrico e  $C$ , a capacitância. A resistência de fuga  $R_C$  é inversamente proporcional à capacitância  $C$ . Portanto, o produto da resistência de fuga e a capacitância  $R_C C$ , uma grandeza frequentemente dada pelo fabricante é usada na especificação das perdas do capacitor.

Entre os tipos comuns de capacitores estão o cerâmico (bário titânio), Mylar, Teflon e poliestireno. Estes tipos são disponíveis numa faixa de valores de capacitância típico de 100 pF a 1  $\mu$ F, com tolerâncias de 3, 10 e 20%. Os produtos resistência-capacitância para estes tipos estão numa faixa de  $10^3 \Omega \cdot F$  (cerâmico) a  $2 \times 10^6 \Omega \cdot F$  (Teflon).

Outro tipo de capacitor com valores maiores de  $C$  é o capacitor eletrolítico. Este capacitor é constituído de camadas polarizadas de óxido de alumínio ou óxido de tântalo e tem valores de 1 a 100.000  $\mu$ F. Os produtos resistência-capacitância, entretanto, situam-se entre 10 e  $10^3 \Omega \cdot F$ , o que indica que os eletrolíticos têm *perdas* maiores que os de tipo não-eletrolíticos. Além disto, visto que os capacitores eletrolíticos são polarizados, eles devem ser conectados a um circuito com a polaridade correta. Se a polaridade incorreta é usada, o óxido será reduzido e ocorrerá uma condução elevada entre as placas.

Indutores práticos, assim como os capacitores práticos, normalmente dissipam uma pequena quantidade de potência. Esta dissipação resulta da perda ôhmica associada ao fio que é empregado na construção do indutor e *perdas* no núcleo devido a correntes induzidas que surgem no núcleo em torno do qual a bobina é enrolada. Um circuito equivalente de um indutor pode ser obtido colocando-se uma resistência em série com um indutor ideal, como mostrado na Fig. 7.15, onde  $R_L$  representa a perda ôhmica e  $L$ , a indutância.

Indutores são disponíveis em uma faixa de valores entre 1  $\mu$ H a 100 H. Valores elevados de indutância são obtidos empregando-se várias espirais e núcleos de materiais ferrosos; ao mesmo tempo que o valor da indutância cresce, o da resistência em série geralmente também cresce.

Como o resistor e o amplificador operacional, o capacitor pode ser fabricado na forma de circuito integrado. Entretanto, tentativas de construção de indutores em circuitos integrados não foram bem-sucedidas devido a restrições da geometria e porque os semicondutores não exibem as propriedades magnéticas necessárias. Por esta razão, em várias aplicações, circuitos são projetados usando somente resistores, capacitores e dispositivos eletrônicos, tais como amplificadores operacionais.

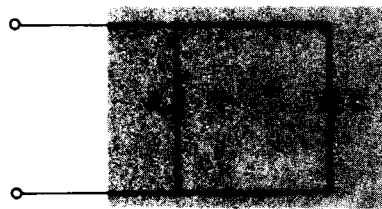


FIGURA 7.14 Circuito equivalente simplificado para um capacitor prático



FIGURA 7.15 Circuito equivalente simplificado para um indutor prático



## EXERCÍCIO

- 7.8.1 Capacitores de Mylar têm um produto resistência-capacitância de  $10^5 \Omega \cdot F$ . Calcule o resistor equivalente em paralelo na Fig. 7.14 para os seguintes capacitores: (a) 100 pF, (b)  $0,1 \mu F$ , e (c)  $1 \mu F$ .  
Resposta: (a)  $10^{15} \Omega$ ; (b)  $10^{12} \Omega$ ; (c)  $10^{11} \Omega$

## 7.9

### Dualidade e Linearidade

Vamos agora determinar as relações duais para o capacitor e o indutor. Isto é uma tarefa simples, considerando-se as relações corrente-tensão de (7.2) e (7.10) para os elementos individuais. Repetindo essas equações por conveniência, temos

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (7.16)$$

e

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (7.17)$$

Comparando as equações, vemos que a troca de  $i$  por  $v$ ,  $v$  por  $i$  e  $C$  por  $L$  na primeira equação resulta na segunda equação. Portanto, fica claro que o capacitor e o indutor são elementos duais e que  $C$  e  $L$  são quantidades duais. Uma comparação similar das equações para carga e fluxo, dadas por (7.1) e (7.9), mostra que estas também são quantidades duais. Um resumo das quantidades duais que vamos considerar neste livro é dado na Tabela 7.1.

**TABELA 7.1** Quantidades duais

Tensão	Corrente
Carga	Fluxo
Resistência	Condutância
Indutância	Capacitância
Curto-circuito	Circuito aberto
Impedância	Admitância*
Nó de não-referência	Malha
Nó de referência	Malha externa
Ramo de árvore	Enlace*
Série	Paralelo
LKT	LKC

\*Ramos de árvore e enlances foram considerados no Cap. 6, que o leitor pode ter omitido, e impedância e admitância serão consideradas no Cap. 11.

### EXEMPLO 7.10

Agora estamos prontos a construir circuitos duais para redes contendo as quantidades duais listadas na Tabela 7.1. Considere, por exemplo, a rede de duas malhas da Fig. 7.16(a). Usando o método geométrico da Seç. 4.7, os circuitos duais são mostrados tracejados na Fig. 7.16(a) e são redesenhados na Fig. 7.16(b). As soluções para correntes e tensões em redes constituídas de resistores, indutores e capacitores serão consideradas nos capítulos a seguir.

Vamos agora considerar a propriedade de linearidade para capacitores e indutores. Comparando suas relações (7.16) e (7.17), respectivamente, com (5.2), vemos que estes elementos satisfazem a propriedade de proporcionalidade e que eles são, portanto, elementos lineares. Então, circuitos contendo qualquer combinação de fontes independentes e fontes dependentes lineares, resistores, capacitores e indutores são lineares, e os teoremas da superposição e de Norton ou de Thévenin, são aplicáveis. Estes tópicos serão abordados nos capítulos a seguir.

## EXERCÍCIO

- 7.9.1 Construa circuitos duais para as redes de (a) Fig. 7.4, (b) Fig. 7.10, (c) Fig. 7.12 e (d) Fig. 7.15.

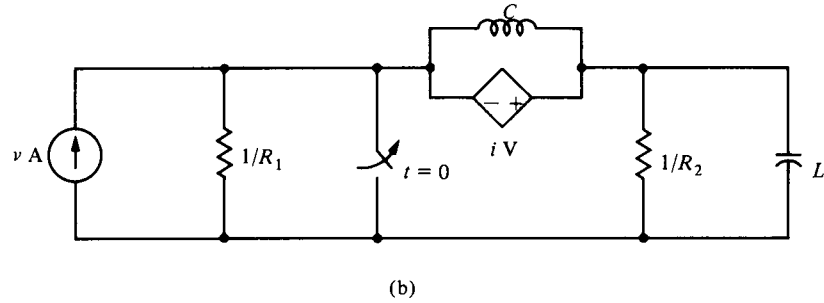
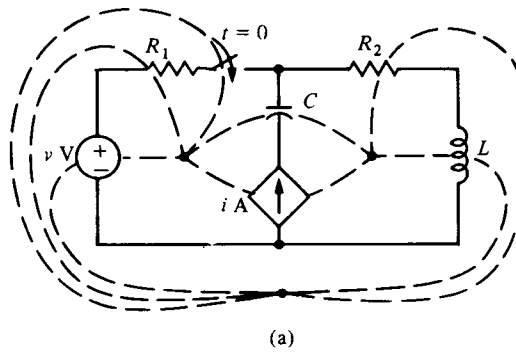


FIGURA 7.16 (a) Rede de duas malhas; (b) rede dual

## 7.10

### Circuitos Singulares

Um circuito no qual a ação de uma chave *parece* ter a função de produzir uma descontinuidade nas tensões de capacitores ou correntes de indutores é algumas vezes chamado de *circuito singular*. Nesta seção consideraremos dois circuitos deste tipo, um contendo capacitores e outro indutores.

#### EXEMPLO 7.11

Vamos considerar primeiro a Fig. 7.17, onde os capacitores  $C_1$  e  $C_2$  de 1-F têm tensões de 1 e 0 V, respectivamente, antes do fechamento da chave. Isto é,  $v_1(0^-) = 1$  V e  $v_2(0^-) = 0$  V. Agora vamos calcular  $w_1(0^+)$  e  $w_2(0^+)$ , as energias armazenadas em  $C_1$  e  $C_2$  em  $t = 0^+$ .

A energia armazenada antes do fechamento da chave é

$$w_1(0^-) = \frac{1}{2} C_1 v_1^2(0^-) = \frac{1}{2} \text{ J}$$

e

$$w_2(0^-) = \frac{1}{2} C_2 v_2^2(0^-) = 0 \text{ J}$$

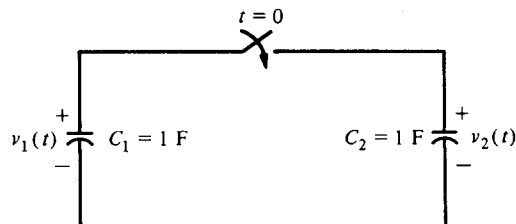


FIGURA 7.17 Circuito contendo dois capacitores com o chaveamento ocorrendo em  $t = 0$

de forma que a energia total armazenada no circuito é

$$w(0^-) = w_1(0^-) + w_2(0^-) = \frac{1}{2} \text{ J} \quad (7.18)$$

A expressão da corrente no nó generalizado acima envolvendo a chave é dada por

$$C_1 \frac{dv_1}{dt} + C_2 \frac{dv_2}{dt} = 0$$

que, integrando de  $t = 0^-$  até  $t = 0^+$  dá

$$\int_{0^-}^{0^+} (C_1 dv_1 + C_2 dv_2) = C_1[v_1(0^+) - v_1(0^-)] + C_2[v_2(0^+) - v_2(0^-)] = 0 \quad (7.19)$$

Substituindo por  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $v_1(0^-)$ , e  $v_2(0^-)$ , temos

$$v_1(0^+) + v_2(0^+) = 1 \quad (7.20)$$

Para  $t > 0$ , vemos que  $v_1 = v_2$ , e então

$$v_1(0^+) = v_2(0^+)$$

que, com (7.20), dá

$$v_1(0^+) = v_2(0^+) = \frac{1}{2} \text{ V}$$

Portanto, a energia total armazenada em  $t = 0^+$  é

$$w(0^+) = \frac{1}{2} C_1 v_1^2(0^+) + \frac{1}{2} C_2 v_2^2(0^+) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \text{ J}$$

que por (7.18) compara-se com 1/2 J armazenado em  $t = 0^-$ .

Sabemos que capacitores não dissipam potência. O que, então, ocorreu com 1/4 J de  $t = 0^-$  até  $t = 0^+$ ? Revendo nosso trabalho, vemos que  $v_1$  muda abruptamente de 1 para 1/2 V em  $t = 0$ . Como abordado na Seç. 7.1, mudanças instantâneas na tensão não são possíveis. Portanto, durante um intervalo de tempo infinitesimal entre  $t = 0^-$  e  $t = 0^+$  nosso modelo matemático não é válido. Na realidade, o que ocorre é o seguinte: quando a chave é fechada no tempo  $t = 0$ , uma corrente elevada é produzida, pois ocorre uma transferência de cargas de  $C_1$  para  $C_2$ . Esta mudança rapidíssima na corrente gera uma onda eletromagnética que *irradia* 1/4 J de energia. A tensão  $v_1$  muda em um pequeno, porém não nulo, intervalo de tempo, de 1 para 1/2 V. Nossa rede durante este intervalo não se comporta como um circuito de parâmetros concentrados, e conceitos da teoria do eletromagnetismo (em outro curso) são necessários para a solução descrita.

Embora nosso modelo de circuito não seja válido no instante de fechamento da chave, as soluções para as tensões e energias antes e depois do fechamento da chave *são corretas*. Isto é devido inteiramente ao fato de que a carga total não muda durante este intervalo de tempo. Isto pode ser visto de (7.19), escrito na forma

$$C_1 v_1(0^-) + C_2 v_2(0^-) = C_1 v_1(0^+) + C_2 v_2(0^+)$$

ou, equivalentemente,

$$q_1(0^-) + q_2(0^-) = q_1(0^+) + q_2(0^+)$$

Isto, sem dúvida, é o postulado da conservação de cargas. (A carga total permanece constante no instante do chaveamento.)

Como exposto anteriormente, a maioria dos modelos de circuitos não permite uma corrente infinita no capacitor. Circuitos reais normalmente têm valores finitos de resistência e indutância que limitam tais correntes. Como resultado, as tensões e as energias do capacitor são funções contínuas. Se, por exemplo, um resistor em série é incluído no circuito da Fig. 7.17, a tensão em cada capacitor é contínua, isto é,

$$v_1(0^-) = v_1(0^+)$$

e

$$v_2(0^-) = v_2(0^+)$$

Análises para circuitos deste tipo serão dadas no Cap. 8.

### EXEMPLO 7.12

Para um segundo exemplo, considere o circuito da Fig. 7.18. Os indutores  $L_1$  e  $L_2$  de 1-H e 2-H têm correntes de 1 e 0 A, respectivamente, antes de  $t = 0$ , instante em que é fechada a chave. (Estamos supondo que o circuito externo que provoca a corrente inicial é desligado em  $t = 0$ .) Portanto,  $i_1(0^-) = 1$  A e  $i_2(0^-) = 0$  A. Agora vamos determinar  $w_1(0^+)$  e  $w_2(0^+)$ , a energia armazenada nos indutores em  $t = 0^+$ .

A energia armazenada antes do fechamento da chave é

$$w_1(0^-) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2(0^-) = 1 \text{ J}$$

e

$$w_2(0^-) = \frac{1}{2}L_2 i_2^2(0^-) = 0 \text{ J}$$

de forma que a energia total é

$$w(0^-) = w_1(0^-) + w_2(0^-) = 1 \text{ J}$$

O enlace de fluxo de cada indutor neste instante é

$$\lambda_1(0^-) = L_1 i_1(0^-) = 2 \text{ Wb}$$

e

$$\lambda_2(0^-) = L_2 i_2(0^-) = 0 \text{ Wb}$$

então o enlace de fluxo total é

$$\lambda(0^-) = L_1 i_1(0^-) + L_2 i_2(0^-) = 2 \text{ Wb}$$

(Visto que o enlace de fluxo  $Li$  é a integral da tensão  $L(di/dt)$ , os sinais dos termos no enlace de fluxo total são os mesmos que os das tensões usados na LKT ao redor dos laços.)

Depois que a chave é fechada, por dualidade com a conservação de carga para um capacitor, vemos pela LKC que

$$i_1(0^+) = i_2(0^+)$$

Ainda, quando a chave é fechada, a conservação do enlace de fluxo requer que o fluxo total permaneça constante; por isto

$$\begin{aligned} L_1 i_1(0^-) + L_2 i_2(0^-) &= L_1 i_1(0^+) + L_2 i_2(0^+) \\ &= (L_1 + L_2) i_1(0^+) \end{aligned}$$

ou

$$2(1) + 1(0) = 3i_1(0^+)$$

Portanto,

$$i_1(0^+) = i_2(0^+) = \frac{2}{3} \text{ A}$$

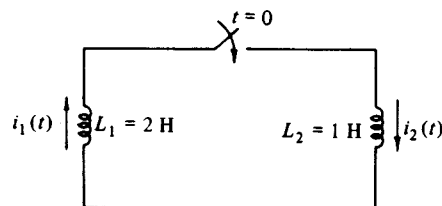


FIGURA 7.18 Circuito contendo indutores que são chaveados no tempo  $t = 0$

Então, a energia armazenada em cada indutor em  $t = 0^+$  é

$$w_1(0^+) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(0^+) = \frac{4}{9} \text{ J}$$

e

$$w_2(0^+) = \frac{1}{2} L_2 i_2^2(0^+) = \frac{2}{9} \text{ J}$$

Se agora compararmos a energia total armazenada na rede, veremos, em  $t = 0^-$ , que

$$w_1(0^-) + w_2(0^-) = 1 \text{ J}$$

e em  $t = 0^+$  que

$$w_1(0^+) + w_2(0^+) = \frac{2}{3} \text{ J}$$

que indica que  $1/3 \text{ J}$  foi perdido no circuito mesmo considerando que um indutor ideal não possa dissipar potência.

Revendo o problema, vemos que  $i_1(t)$  muda abruptamente de 1 para  $2/3 \text{ A}$  em  $t = 0$ . Sabemos, contudo, que mudanças abruptas nas correntes não são possíveis. Portanto, durante o intervalo de tempo infinitesimal de  $t = 0^-$  até  $t = 0^+$ , nosso modelo matemático não é válido novamente. Como abordado anteriormente, uma mudança rápida da corrente dá origem a uma onda eletromagnética que irradia energia. Neste caso,  $1/3 \text{ J}$  da energia é irradiado, e a corrente muda de 1 para  $2/3 \text{ A}$  num intervalo de tempo pequeno, porém diferente de zero. Nosso circuito, é claro, não se comporta como um circuito de concentrados neste intervalo de tempo.

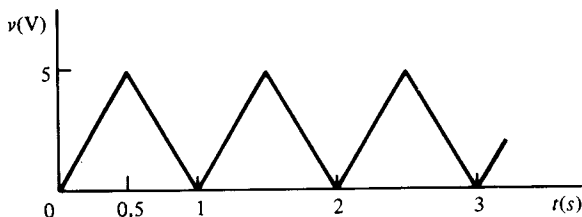
Como no caso de um circuito capacitivo tendo correntes infinitas, a maioria dos modelos de circuito indutivos não permite que ocorram tensões infinitas sobre um indutor como um efeito de correntes abruptas. Como discutido no caso do capacitor, circuitos reais com indutores contêm valores finitos de resistência e de capacitância que limitam tais tensões. As correntes e energias em tais circuitos são funções contínuas. Se, por exemplo, uma resistência é incluída em paralelo na Fig. 7.18, as correntes são contínuas em  $t = 0$ . Circuitos deste tipo serão estudados no Cap. 8.

## EXERCÍCIOS

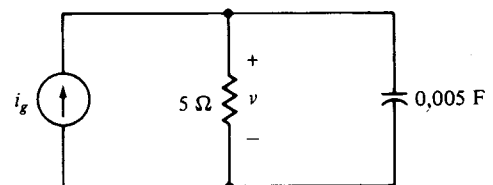
- 7.10.1** Na Fig. 7.17, considere  $C_1 = 1/2 \text{ F}$ ,  $C_2 = 1 \text{ F}$ ,  $v_1(0^-) = 10 \text{ V}$ ,  $v_2(0^-) = 4 \text{ V}$ , e calcule  $v_1(0^+)$ ,  $v_2(0^+)$ , e a energia total armazenada no circuito em  $t = 0^-$  e em  $t = 0^+$ .  
*Resposta:* 6 V, 6 V, 33 J, 27 J
- 7.10.2** Na Fig. 7.18, considere  $L_1 = 4 \text{ H}$ ,  $L_2 = 2 \text{ H}$ ,  $i_1(0^-) = 3 \text{ A}$  e  $i_2(0^-) = 6 \text{ A}$  e calcule  $i_1(0^+)$ ,  $i_2(0^+)$ , e a energia total armazenada no circuito em  $t = 0^-$  e em  $t = 0^+$ .  
*Resposta:* 4 A, 4 A, 54 J, 48 J

## PROBLEMAS

- 7.1** A tensão sobre um capacitor de  $0,2\text{-}\mu\text{F}$  é a onda triangular mostrada. Calcule a corrente e a potência para  $0 < t < 3 \text{ s}$ .
- 7.2** Quanto tempo demora para que uma corrente constante de  $20\text{-mA}$  entregue uma carga de  $80 \mu\text{C}$  para um capacitor de  $1 \mu\text{F}$ ?
- 7.3** Calcule  $i_g$  se  $v = 10e^{-20t} \text{ V}$ .

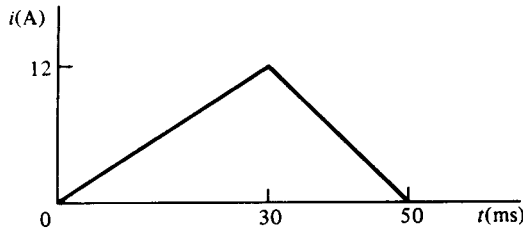


PROBLEMA 7.1



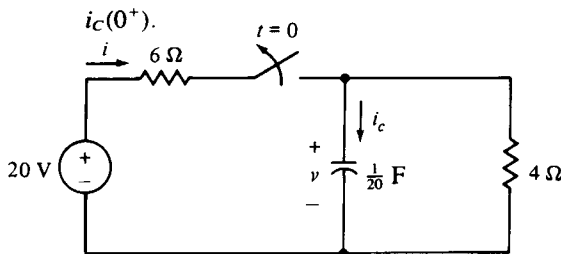
PROBLEMA 7.3

- 7.4 Calcule a carga existente em cada placa de um capacitor de  $10\text{-}\mu\text{F}$  que está carregado com uma tensão de  $10\text{ V}$ .
- 7.5 Determine a tensão  $v$  para  $t > 0$  através de uma associação série de um resistor de  $10\text{-}\Omega$  e um capacitor de  $20\text{-mF}$ , se a tensão no capacitor em  $t = 0$  é  $-25\text{ V}$  e corrente é  $i = 5e^{-10t}\text{ A}$ .
- 7.6 A corrente através de um capacitor de  $0,01\text{-F}$  é como indicado na figura. Calcule a tensão  $v$  e a potência em  $t = 10\text{ ms}$  e em  $t = 40\text{ ms}$ , se  $v(0) = 0$ .



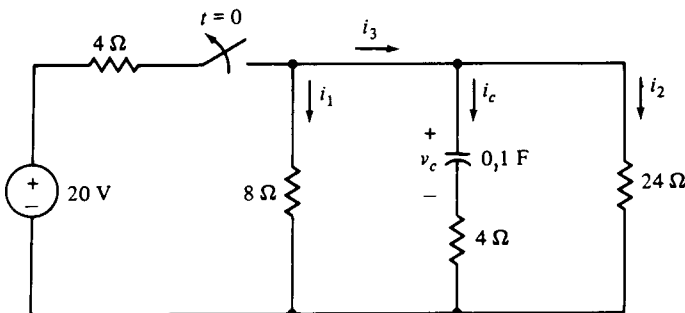
PROBLEMA 7.6

- 7.7 A tensão inicial (em  $t = 0$ ) sobre um capacitor de  $0,25\text{-F}$  é  $5\text{ V}$ . Calcule a tensão no capacitor para  $t > 0$  se a corrente é (a)  $2\text{ A}$ , (b)  $4t\text{ A}$ , (c)  $2e^{-2t}\text{ A}$ , e (d)  $5\cos 4t\text{ A}$ .
- 7.8 Calcule a tensão para  $t > 0$  sobre um resistor de  $2\text{-}\Omega$  e um capacitor de  $1/4\text{-F}$  em série se a corrente é  $10\cos 2t\text{ A}$  e o capacitor está descarregado em  $t = 0$ . Calcule o valor máximo da tensão e o menor valor de  $t$  para o qual ela ocorre.
- 7.9 Uma tensão de  $8e^{-2t}\text{ V}$  é aplicada nos terminais de uma associação paralela de um resistor de  $2\text{-}\Omega$  e um capacitor de  $1/8\text{-F}$ . Calcule a potência absorvida pela associação paralela.
- 7.10 A corrente em um capacitor de  $0,25\text{-F}$  é  $i = 4\sin 2t\text{ A}$ . A tensão inicial é de  $4\text{ V}$ . Calcule os valores máximos e mínimos da energia armazenada e o menor tempo em que isso ocorre.
- 7.11 A corrente em um capacitor de  $0,25\text{-F}$  é  $i = 2t - 4\text{ V}$  e a tensão inicial é  $v(0) = 20\text{ V}$ . (a) Calcule a mínima energia armazenada e o tempo que isto ocorre. (b) Determine a tensão inicial tal que a energia mínima armazenada seja zero.
- 7.12  $i(0^-) = 2\text{ A}$ . Calcule  $w_C(0^-)$ ,  $w_C(0^+)$  e  $i_C(0^+)$ .



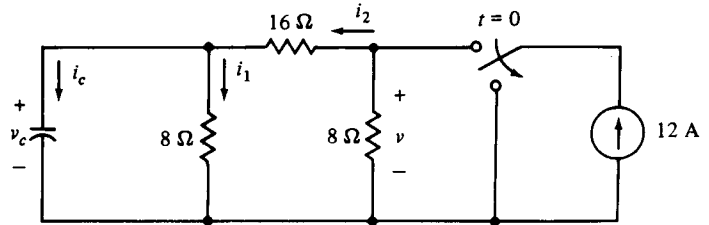
PROBLEMA 7.12

- 7.13 Se  $i_2(0^-) = i_3(0^-) = 1/2\text{ A}$ . Calcule (a)  $i_1$ , (b)  $v_C$ , (c)  $i_C$ , e (d)  $dv/dt$  em  $t = 0^-$  e em  $t = 0^+$



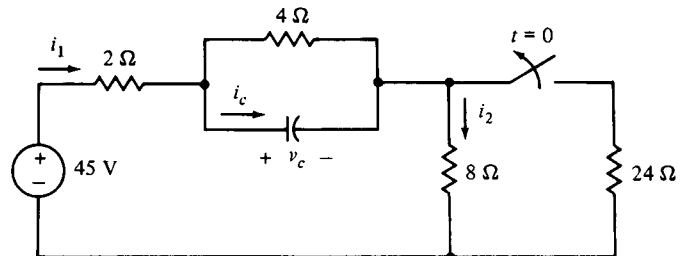
PROBLEMA 7.13

- 7.14 Se  $v(0^-) = 72\text{ V}$ , calcule  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_C$ ,  $v_C$  e  $v$  em  $t = 0^-$  e em  $t = 0^+$ .



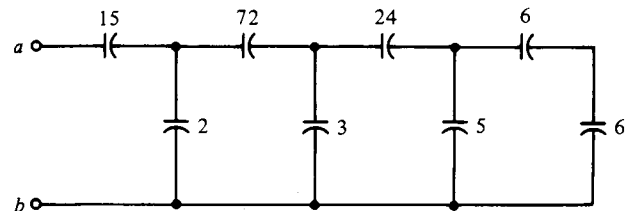
PROBLEMA 7.14

- 7.15 Se  $i_1(0^-) = 15/4\text{ A}$ . Calcule  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_C$  e  $v_C$  em  $t = 0^+$ .



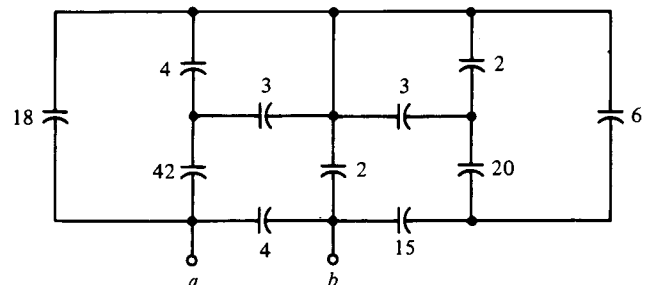
PROBLEMA 7.15

- 7.16 Calcule a capacitância equivalente vista pelos terminais  $a$ - $b$  se todas as capacitâncias são em  $\mu\text{F}$ .



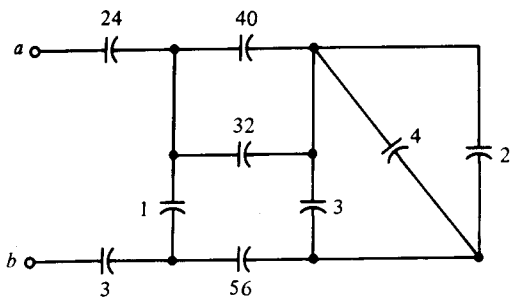
PROBLEMA 7.16

- 7.17 As capacitâncias mostradas são todas em  $\mu\text{F}$ . Calcule a capacitância equivalente vista pelos terminais  $a$ - $b$ .



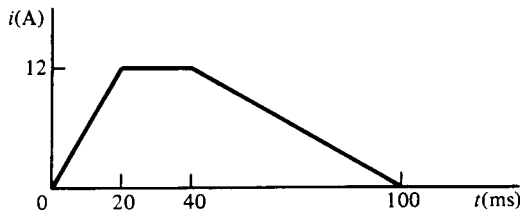
PROBLEMA 7.17

7.18 As capacitâncias mostradas são todas em  $\mu\text{F}$ . Calcule a capacitância equivalente vista pelos terminais  $a$ - $b$ .



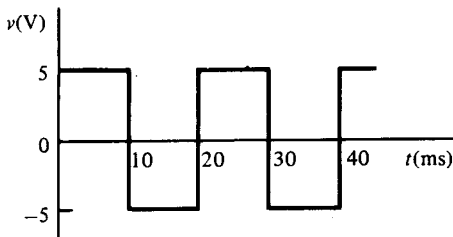
PROBLEMA 7.18

7.19 Calcule a tensão sobre um indutor de 10-mH em  $t = 10$  ms, 30 ms e 60 ms, se a corrente é como a indicada na figura.

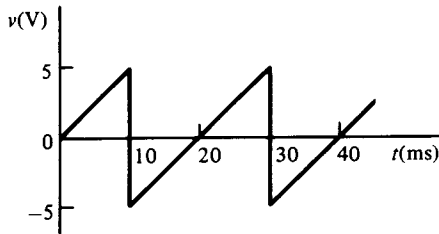


PROBLEMA 7.19

7.20 Se  $i(0) = 0$  for a corrente inicial em um indutor de 1-mH, calcule a corrente para  $t > 0$  para os dois casos de tensão sobre o indutor mostrados.



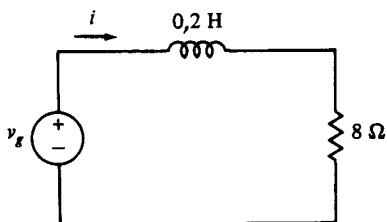
(a)



(b)

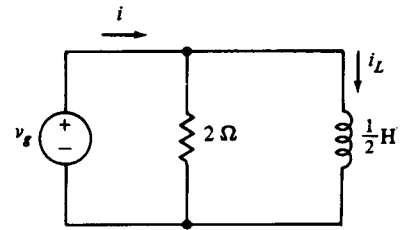
PROBLEMA 7.20

7.21 Calcule a tensão  $v_g$ , se a corrente for  $i = 5e^{-20t}$  A.

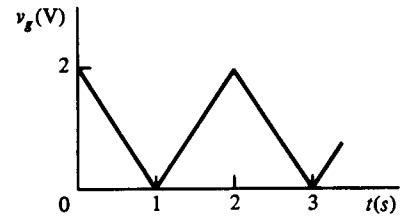


PROBLEMA 7.21

7.22 Para o circuito mostrado em (a), a fonte de tensão é dada em (b). Calcule a corrente  $i$  em  $i_L(0) = -1$  A para (a)  $0 < t < 1$  s e (b)  $1 < t < 2$  s.



(a)

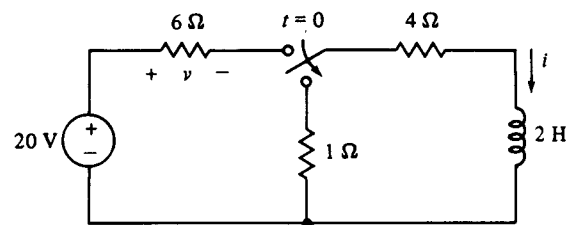


(b)

PROBLEMA 7.22

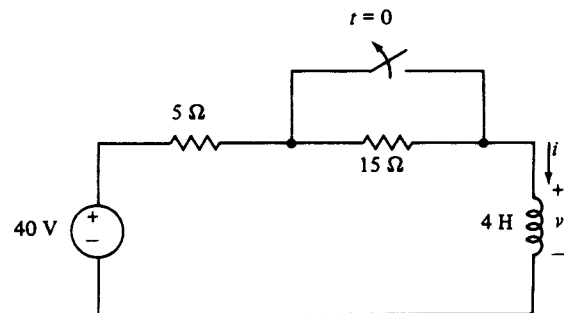
7.23 A corrente através de um indutor de 0,1-H é  $i = 10 \cos 10 t$  mA. Calcule (a) o valor da tensão, (b) a potência, (c) a energia armazenada e (d) o máximo valor de potência absorvida.

7.24 Se  $v(0^-) = 12$  V, calcule  $w_L(0^+)$  e  $di(0^+)/dt$ .



PROBLEMA 7.24

7.25 Se  $v(0^-) = 10$  V, calcule  $w_L(0^+)$  e  $di(0^+)/dt$ .

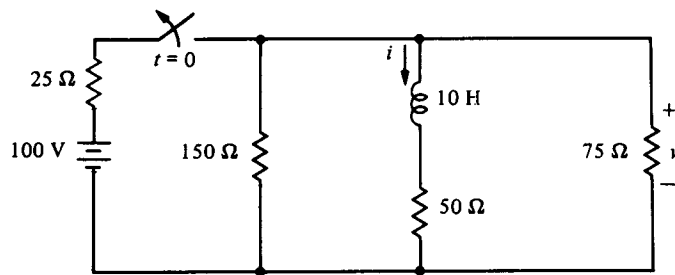


PROBLEMA 7.25

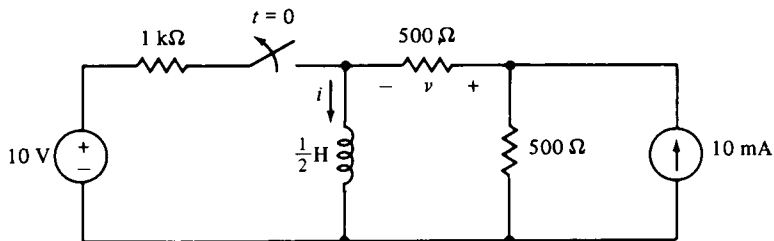
7.26 Se  $v(0^-) = 50$  V, calcule  $i(0^+)$  e  $v(0^+)$ .

7.27 Se  $v(0^-) = 2,5$  V, calcule  $i(0^+)$  e  $di(0^+)/dt$ .

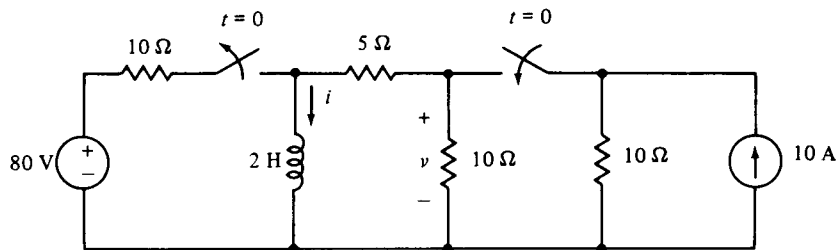
7.28 Se  $v(0^-) = 0$ , calcule  $i(0^+)$  e  $v(0^+)$ .



PROBLEMA 7.26

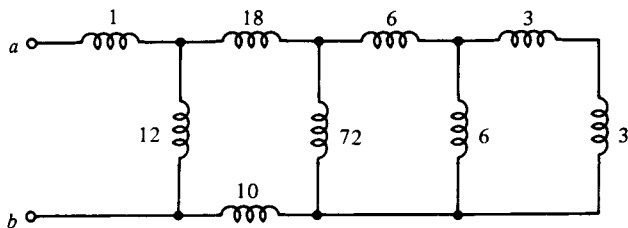


PROBLEMA 7.27



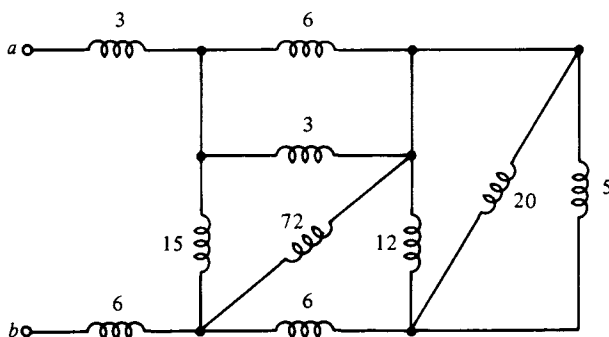
PROBLEMA 7.28

7.29 As indutâncias mostradas são todas em mH. Calcule a indutância equivalente vista pelos terminais *a-b*.



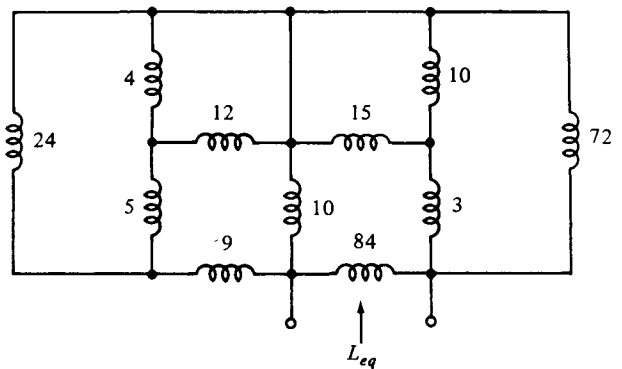
PROBLEMA 7.29

7.30 Se as indutâncias mostradas são todas em mH, calcule a indutância equivalente vista pelos terminais *a-b*.



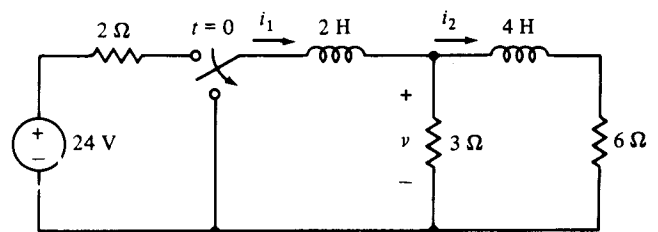
PROBLEMA 7.30

7.31 Calcule  $L_{eq}$  se todas as indutâncias são dadas em mH.



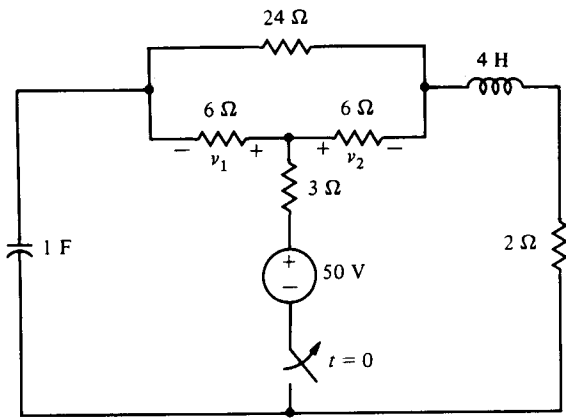
PROBLEMA 7.31

7.32 O circuito está em regime permanente cc em  $t = 0^-$ . Calcule  $v$ ,  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $di_1/dt$  e  $di_2/dt$  em  $t = 0^+$ .



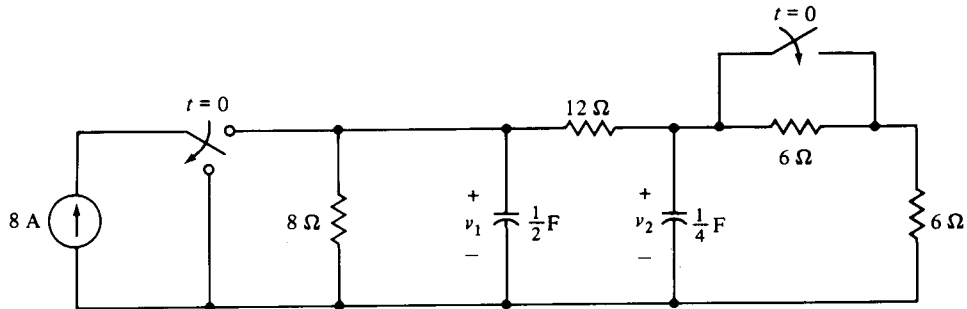
PROBLEMA 7.32



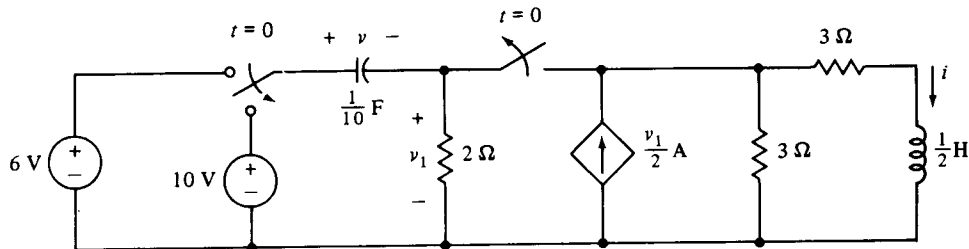


**PROBLEMA 7.33**

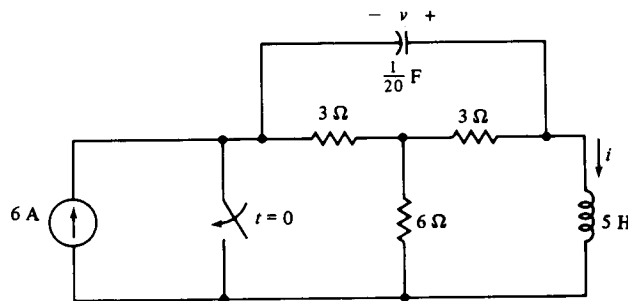
- 7.33 Se o circuito está em regime permanente cc em  $t = 0^-$ , calcule  $v_1$  e  $v_2$  em  $t = 0^-$  e em  $t = 0^+$ .
- 7.34 Se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ , calcule  $dv_1/dt$  e  $dv_2/dt$  em  $t = 0^+$ .
- 7.35 Se o circuito está em regime permanente, em  $t = 0^-$ , calcule  $dv/dt$  e  $di/dt$  em  $t = 0^+$ .
- 7.36 Se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$  calcule  $dv/dt$  e  $di/dt$  em  $t = 0^+$ .
- 7.37 Um capacitor de 400-pF e outro de 600-pF, ambos de cerâmica, são conectados em paralelo. O produto resistência-capacitância para o capacitor de cerâmica é  $10^3 \Omega \cdot \text{F}$ . Qual a capacitância equivalente e a resistência paralela para a associação?
- 7.38 Determine o circuito dual para a rede de (a) Fig. 7.14, (b) figura do Prob. 7.17, e (c) figura do Prob. 7.30.
- 7.39 No circuito da Fig. 7.17, se  $v_1(0^-) = 6 \text{ V}$  e 4 J de energia são irradiados pela ação de chaveamento, calcule  $v_2(0^-)$ .
- 7.40 Se, na Fig. 7.18,  $i_2$  tiver um sentido invertido, calcule  $i_1(0^+)$  e  $i_2(0^+)$  se  $i_1(0^-) = 9 \text{ A}$ ,  $i_2(0^-) = 3 \text{ A}$ ,  $L_1 = 2 \text{ H}$  e  $L_2 = 4 \text{ H}$ . Calcule também a energia irradiada pela ação do chaveamento.



**PROBLEMA 7.34**



**PROBLEMA 7.35**



**PROBLEMA 7.36**



## Circuitos Simplificados *RC e RL*

---

*Apaguem-se estes dois nomes [Joseph Henry e Michael Faraday] e a civilização atual tornar-se-ia impossível.*

*H. S. Carhart*

---

A grande descoberta de Michael Faraday da indução eletromagnética em 1831 foi repetida, na mesma época, pelo físico americano Joseph Henry, mas a descoberta foi creditada a Faraday porque seus resultados foram publicados primeiro. Henry, entretanto, tornou-se famoso como descobridor da indutância (chamada de auto-indutância) de uma bobina e por desenvolver um possante eletroímã capaz de levantar milhares de libras de peso. Ele também foi o físico americano mais famoso do séc. XIX e o primeiro secretário do recém-criado Smithsonian Institution.

Henry nasceu próximo a Albany, Nova York, EUA, e passou seus primeiros anos na pobreza. Sua ambição era tornar-se ator, até que aos 16 anos encontrou, por acaso, um livro de ciência, que o fez devotar a vida à aquisição de conhecimentos. Matriculou-se na Academia de Albany e após sua graduação tornou-se professor desta instituição. Em 1832 ele se associou à faculdade College de New Jersey, hoje Princeton e, em 1846, foi para o Smithsonian Institution. Em sua honra foi dado o nome de *henry* à unidade de indutância, 12 anos após sua morte. ■

Neste capítulo iremos considerar circuitos simplificados contendo resistores e capacitores ou resistores e indutores, que iremos denominar, abreviadamente, como circuitos *RC* ou *RL*, respectivamente. A aplicação das leis de Kirchhoff a estes circuitos resulta em *equações diferenciais* que, em geral, são de mais difícil solução que as equações algébricas encontradas nos capítulos anteriores. Vários métodos para a solução destas equações serão apresentados.

Primeiro estudaremos os circuitos *RL* e *RC* livres de fontes, assim chamados, pois neles não existem fontes independentes. Como veremos, as respostas sem fontes resultam das energias armazenadas nos elementos dinâmicos do circuito e são caracterizadas pela natureza do circuito propriamente dito. Por esta razão, esta resposta é conhecida como resposta natural do circuito.

Seguindo o nosso estudo de circuitos sem fontes, vamos considerar circuitos excitados *RL* e *RC* nos quais as funções de alimentação ou de excitação são fontes independentes constantes que são aplicadas repentinamente na rede. Iremos encontrar que as respostas nestas redes constituem-se de duas partes, uma resposta natural de forma similar ao caso sem fontes, e a resposta forçada, caracterizada pela função de excitação.

## 8.1

### Circuitos *RC* sem Fontes

Vamos iniciar nosso estudo de uma rede sem fontes considerando uma associação em série de um resistor e um capacitor, como mostrado na Fig. 8.1. Vamos assumir que o capacitor está carregado com uma tensão  $V_0$  no tempo inicial, que iremos considerar como  $t = 0$ . Visto que não existem fontes de corrente ou tensão na rede, a resposta do circuito ( $v$  ou  $i$ ) é inteiramente devida à energia que está armazenada inicialmente no capacitor. Que neste caso, em  $t = 0$ , é

$$w(0) = \frac{1}{2}CV_0^2 \quad (8.1)$$

Vamos agora determinar  $v(t)$  e  $i(t)$  para  $t \geq 0$ . Aplicando a LKC no nó superior, encontramos que

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

ou

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = 0 \quad (8.2)$$

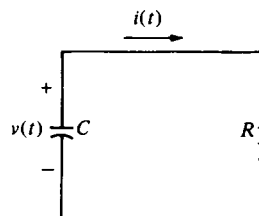


FIGURA 8.1 Circuito *RC* sem fontes

que é uma equação diferencial de *primeira ordem*. (A *ordem* de uma equação diferencial é a ordem da derivada de mais alta ordem.)

Numerosos métodos estão disponíveis para a solução de equações diferenciais da forma de (8.2). Uma forma direta é a de rearranjar os termos na equação de modo a *separar* as variáveis  $v$  e  $t$ . Então, integrando simplesmente o resultado resulta na solução. Em (8.2) as variáveis podem ser separadas escrevendo primeiramente

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{RC}v$$

da qual obtemos

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC} dt \quad (8.3)$$

Calculando a integral indefinida de cada lado, temos

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC} \int dt$$

ou

$$\ln v = -\frac{t}{RC} + K$$

onde  $K$  é uma constante de integração.

Para que a solução seja válida em  $t \geq 0$ ,  $K$  deve ser escolhido tal que a condição inicial de  $v(0) = V_0$  seja satisfeita. Portanto, em  $t = 0$ , temos

$$\ln v(0) = \ln V_0 = K$$

Substituindo este valor de  $K$  na solução, fica

$$\ln v - \ln V_0 = \ln \frac{v}{V_0} = -\frac{t}{RC}$$

Se agora lembrarmos a relação

$$e^{\ln x} = x$$

vemos que

$$v(t) = V_0 e^{-t/RC} \quad (8.4)$$

Na Fig. 8.1 vemos que esta é a tensão sobre  $R$ ; portanto, a corrente é

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

Outro método de solucionar a equação (8.3) é integrar cada lado da equação entre limites apropriados. No nosso caso,  $v$  tem um valor  $V_0$  no tempo 0 e então

$$\int_{V_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \quad (8.5)$$

onde as integrais são integrais *definidas*. Efetuando as integrações, temos

$$\ln v - \ln V_0 = -\frac{t}{RC}$$

que é equivalente a (8.4).

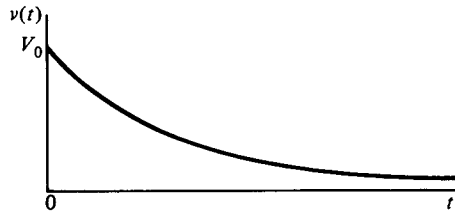


FIGURA 8.2 Gráfico da resposta de tensão em um circuito RC simplificado da Fig. 8.1

Um gráfico de (8.4) é mostrado na Fig. 8.2. Vemos que a tensão é inicialmente  $V_0$  e que decai exponencialmente, tendendo a zero quando o tempo  $t$  cresce. A velocidade pela qual a tensão decai é determinada somente pelo produto dos valores da resistência e da capacitância da rede. Visto que a resposta é caracterizada pelos elementos do circuito e não pela aplicação de uma fonte externa de tensão ou corrente, a resposta é chamada de *resposta natural* do circuito.

A energia armazenada na rede em  $t = 0$  é dada em (8.1). Com o aumento do tempo, a tensão sobre o capacitor, e portanto, a energia armazenada no capacitor, diminui. Do ponto de vista físico, toda a energia armazenada no capacitor em  $t = 0$  deve ser dissipada pelo resistor quando o tempo se tornar infinito. A potência instantânea absorvida pelo resistor é

$$p_R(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC} \text{ W}$$

Portanto, a energia absorvida pelo resistor quando o tempo se torna infinito é

$$\begin{aligned} w_R(\infty) &= \int_0^{\infty} p_R(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC} dt \\ &= -\frac{1}{2} CV_0^2 e^{-2t/RC} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} CV_0^2 \end{aligned}$$

que é, certamente, igual à energia inicial armazenada na rede.

### EXEMPLO 8.1

Como um exemplo, vamos calcular a tensão  $v$  para  $t > 0$ , no circuito da Fig. 8.1, se  $R = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 0,01 \mu\text{F}$ , e  $v(0) = 6 \text{ V}$ . Notamos neste caso que  $RC = (10^5)(10^{-8}) = 10^{-3}$ . Portanto, temos

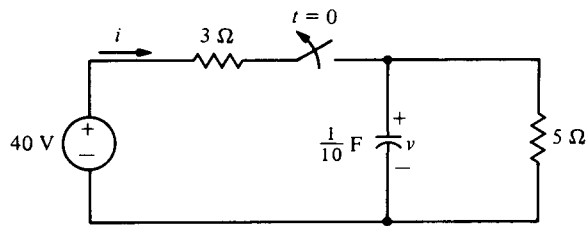
$$v = 6e^{-t/10^{-3}} = 6e^{-1.000t} \text{ V}$$

Como uma observação final nessa seção de circuitos RC, observamos que se o tempo inicial é  $t = t_0$  e não  $t = 0$  — isto é,  $v(t_0) = V_0$  — então o limite inferior no lado direito de (8.5) é  $t_0$ . Como o leitor pode verificar, isto leva ao resultado mais geral,

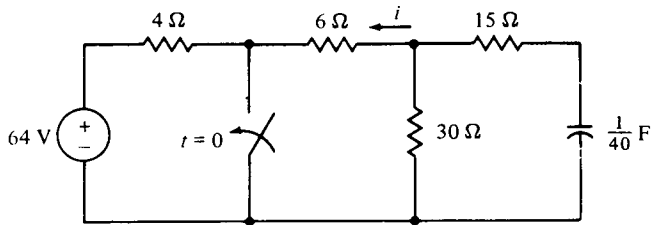
$$v(t) = V_0 e^{-(t-t_0)/RC}, \quad t \geq t_0 \quad (8.6)$$

### EXERCÍCIOS

- 8.1.1** Na Fig. 8.1, assumamos  $t_0 = 0$ ,  $V_0 = 10 \text{ V}$ ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$  e  $C = 1 \mu\text{F}$ . Calcule  $v$ ,  $i$  e  $w_c$  em  $t = \text{ms}$ .  
Resposta: 3,68 V, 3,68 mA, 6,8 μJ
- 8.1.2** Se o circuito está em regime permanente cc em  $t = 0^-$ , calcule  $v$  para  $t > 0$ .  
Resposta:  $25 e^{-2t} \text{ V}$
- 8.1.3** Se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ , calcule  $i$  para  $t > 0$ . (Sugestão: calcule a resistência equivalente vista pelo capacitor.)  
Resposta:  $2e^{-2} \text{ V}$



EXERCÍCIO 8.1.2



EXERCÍCIO 8.1.3

## 8.2

### Constantes de Tempo

Em redes que contêm elementos armazenadores de energia é muito útil caracterizar com um número a rapidez com que a resposta natural decresce. Para descrever tal número, vamos considerar a rede da Fig. 8.1 e a resposta da tensão,

$$v = V_0 e^{-t/RC}$$

onde  $V_0$  é a tensão em  $t = 0$ .

Gráficos de  $v$  para  $RC = k$  = uma constante,  $RC = 2k$  e  $RC = 3k$  são mostrados na Fig. 8.3. Vemos que, quanto menor o produto  $RC$ , mais rapidamente a função exponencial  $v(t)$  decresce. De fato, a tensão para  $RC = k$  decai para um valor específico na metade do tempo requerida para isso pela  $RC = 2k$  e em um terço do tempo requerido para  $RC = 3k$ . Também é claro que a resposta de tensão permanece inalterada se  $R$  aumenta e  $C$  diminui, ou vice-versa, tal que o produto  $RC$  é o mesmo. Por exemplo, se dobrarmos  $R$  e tomarmos a metade de  $C$ , a resposta de tensão não se altera.

A corrente na rede da Fig. 8.1 é

$$i = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

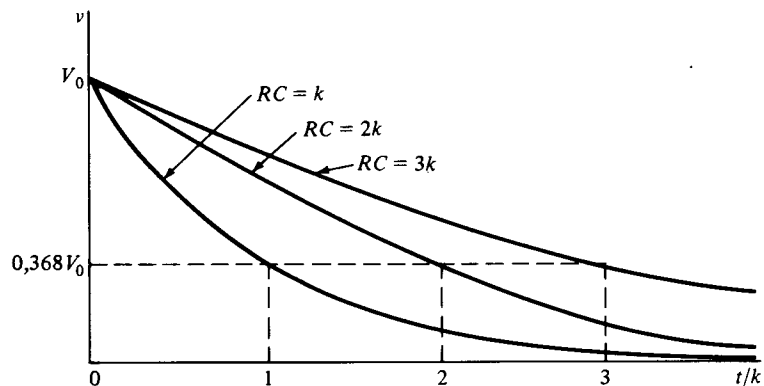


FIGURA 8.3 Gráficos de  $V$  para vários valores de  $RC$

Evidentemente, a corrente decresce da mesma forma que a tensão. Deve ser observado que mudando  $R$  e  $C$  tal que o produto de  $RC$  permaneça constante causa uma mudança na corrente inicial  $V_0/R$ . A resposta de corrente, portanto, ainda decresce na mesma forma, pois  $e^{-t/RC}$  não se altera.

O tempo necessário para que a resposta natural decaia de um fator de  $1/e$  é definido como a *constante de tempo* de um circuito, denominada  $\tau$ . Em nosso caso, isso requer que

$$V_0 e^{-(t+\tau)/RC} = \frac{V_0}{e} e^{-t/RC} = V_0 e^{-(t+RC)/RC}$$

que fica

$$\tau = RC$$

As unidades de  $\tau$  são  $\Omega \cdot F = (V/A)(C/V) = (C/A) = s$ . Em termos da constante de tempo, a resposta de tensão é

$$v = V_0 e^{-t/\tau} \quad (8.7)$$

A resposta ao final de uma constante de tempo é reduzida para  $e^{-1} = 0,368$  do valor inicial. Ao final de duas constantes de tempo ela é igual a  $e^{-2} = 0,135$  de seu valor inicial, e ao final de cinco constantes de tempo ela se torna  $e^{-5} = 0,0067$  de seu valor inicial. Portanto, depois de quatro ou cinco constantes de tempo, a resposta é essencialmente zero.

Uma propriedade interessante das funções exponenciais é mostrada na Fig. 8.4. Uma tangente à curva em  $t = 0$  intercepta o eixo de tempo em  $t = \tau$ . Isto é facilmente verificado considerando a equação da reta tangente à curva, em  $t = 0$ , dada por

$$v_1 = mt + V_0$$

onde  $m$  é inclinação da linha. Diferenciando  $v$ , temos

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{V_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Portanto,

$$m = \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{V_0}{\tau}$$

e

$$v_1 = -\frac{V_0}{\tau} t + V_0$$

A linha intercepta o eixo do tempo em  $v_1 = 0$ , o que requer que  $t = \tau$ . Também pode ser mostrado que uma tangente à curva no tempo  $t_1$  intercepta o eixo do tempo em  $t_1 + \tau$  (ver Prob. 8.9). Este fato é freqüentemente usado para esboçar a função exponencial.

Da Fig. 8.4, vemos que uma definição alternativa para a constante de tempo é o tempo necessário

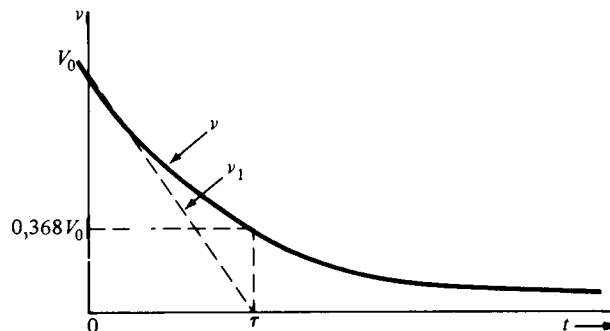


FIGURA 8.4 Gráfico ilustrando a relação entre uma linha tangente a  $V$  em  $t = 0$  e  $\tau$

para que a resposta natural se torne zero se ela decresce com uma velocidade constante igual à razão inicial de decréscimo.

O conhecimento da constante de tempo permite-nos prever a forma geral da resposta (8.7), mas para a solução completa deve-se encontrar a tensão inicial  $v(0^+) = V_0$ . Para um capacitor,  $v(0^+) = v(0^-)$ , então podemos frequentemente calcular  $V_0$ , do circuito para  $t = 0$ . Isso é relativamente fácil se em  $t = 0^-$  o circuito está na condição de regime permanente cc, como veremos no exemplo a seguir.

## EXEMPLO 8.2

Para ilustrar o procedimento, vamos calcular a tensão no capacitor  $v(t)$  na Fig. 8.5(a), dado que o circuito está em regime permanente cc imediatamente antes da abertura da chave. Então, em  $t = 0^-$ , a chave ainda está fechada, o capacitor é um circuito aberto para o regime permanente cc e então o circuito é como indicado na Fig. 8.5 (b). A resistência vista pelo capacitor à esquerda de seus terminais é dada por

$$R_{eq} = 8 + \frac{3(2 + 4)}{3 + (2 + 4)} = 10 \Omega$$

e por divisão de tensão temos, da Fig. 8.5(b)

$$v(0^-) = \left( \frac{10}{10 + 15} \right) \times 100 = 40 \text{ V}$$

Portanto,  $V_0 = v(0^+) = v(0^-) = 40 \text{ V}$ .

Para  $t > 0$  a bateria está desligada do circuito, como mostrado na Fig. 8.5(c), onde os resistores à esquerda do capacitor foram trocados por seu equivalente  $R_{eq}$ . A constante de tempo para a rede é simplesmente produto da capacitância e da resistência equivalente, dada por

$$\tau = R_{eq}C = 10 \text{ s}$$

Portanto, por (8.7) a tensão é

$$v(t) = 40e^{-t/10} \text{ V}$$

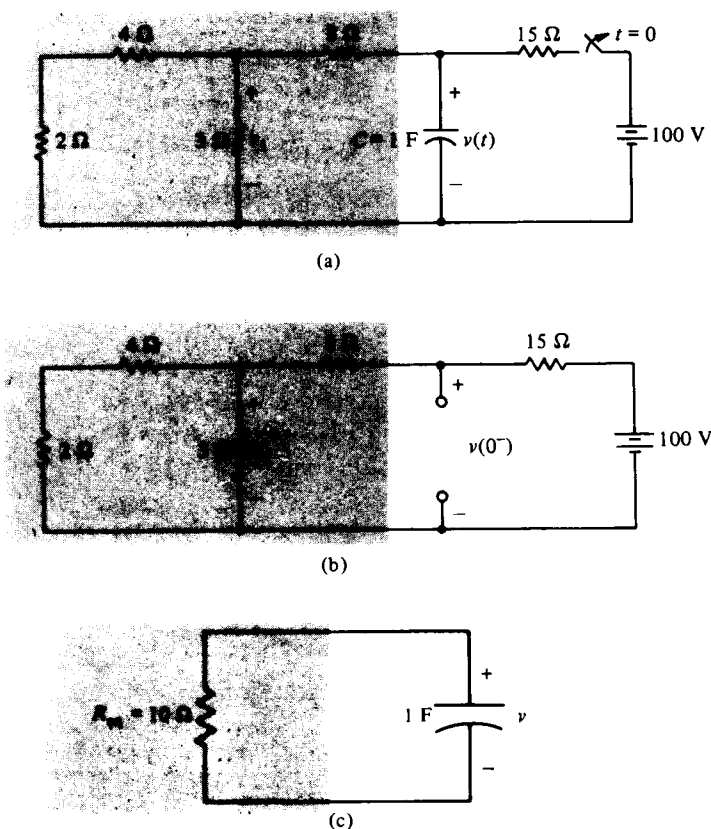


FIGURA 8.5 (a) Circuito RC genérico; (b) seu equivalente em  $t = 0^-$ ; (c) seu equivalente para  $t > 0$

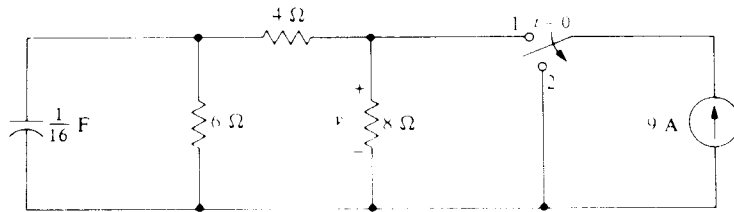


Se queremos  $v_1$  na Fig. 8.5(a), podemos encontrá-la de  $v$  usando divisão de tensão. Visto que  $v_1$  está sobre a resistência equivalente de  $6 \parallel (3 + (6+3)) = 2 \Omega$ , então

$$v_1 = \frac{2}{2+8} v = 8e^{-t/10} \text{ V}$$

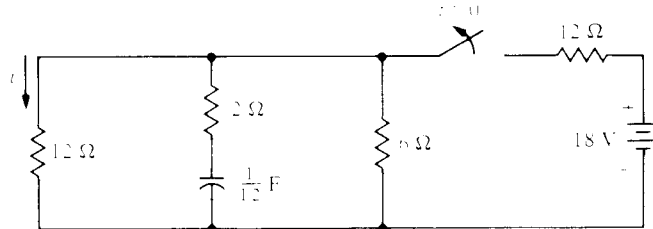
## EXERCÍCIOS

- 8.2.1** Em um circuito  $RC$  em série, determine (a)  $\tau$  para  $R = 2 \text{ k}\Omega$  e  $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$ ; (b)  $C$  para  $R = 10 \text{ k}\Omega$  e  $\tau = 20 \text{ }\mu\text{s}$ , e (c)  $R$  para  $v(t)$  no capacitor de  $2 \text{ }\mu\text{F}$  se reduzindo a metade a cada  $20 \text{ ms}$ .  
*Resposta:* (a)  $20 \text{ ms}$ ; (b)  $2 \text{ nF}$ ; (c)  $14,43 \text{ k}\Omega$ .
- 8.2.2** Um circuito  $RC$  em série consiste de um resistor de  $20\text{-k}\Omega$  e um capacitor de  $0,05\text{-}\mu\text{F}$ . Deseja-se descrever a corrente na rede por um fator de 5 sem mudança na tensão do capacitor. Calcule os valores necessários de  $R$  e  $C$ .  
*Resposta:*  $100 \text{ k}\Omega$ ,  $0,01 \text{ }\mu\text{F}$
- 8.2.3** Um circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$  e a chave é mudada da posição 1 para posição 2 em  $t = 0$ . Calcule  $v$  para  $t \geq 0$ .  
*Resposta:*  $16e^{-4t} \text{ V}$



EXERCÍCIO 8.2.3

- 8.2.4** Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .  
*Resposta:*  $0,25e^{-t/12} \text{ A}$



EXERCÍCIO 8.2.4

## 8.3

### Circuito $RL$ sem Fontes

Nesta seção estudaremos a associação em série de um indutor e um resistor, como mostrado na Fig. 8.6. Assumimos que o indutor está conduzindo uma corrente  $I_0$  no tempo  $t = 0$ . Como no caso do circuito

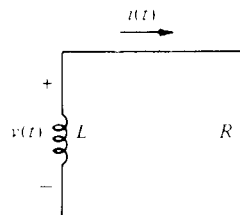


FIGURA 8.6 Circuito  $RL$  sem fontes

RC sem fontes, não existem fontes de corrente ou tensão na rede, e as respostas de corrente e de tensão são devidas somente à energia armazenada no indutor. A energia armazenada em  $t = 0$  é dada por

$$w_L(0) = \frac{1}{2}LI_0^2 \quad (8.8)$$

Somando as tensões ao redor do circuito, temos

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

ou

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \quad (8.9)$$

Esta equação é da mesma forma que (8.2) para p circuito RC. Podemos, portanto, resolvê-lo por separação de variáveis. Ao invés disso, entretanto, vamos introduzir um segundo método muito poderoso, que será generalizado no próximo capítulo. O método consiste em assumir ou supor (uma legítima técnica matemática) uma forma geral de solução baseada numa inspeção da equação a ser resolvida. Em supor uma solução, iremos incluir várias constantes desconhecidas e determinar seus valores tal que nessa solução assumida satisfaça a equação diferencial e as condições iniciais para a rede.

Como visto de (8.9),  $i$  deve ser uma função que não muda sua forma sendo derivada; isto é,  $d(i)/dt$  é um múltiplo de  $i$ . A única função que satisfaz este requisito é uma função exponencial de  $t$ , tal como

$$i(t) = Ae^{st} \quad (8.10)$$

Tomaremos então esta função como a nossa suposição, onde  $A$  e  $s$  são constantes a serem determinadas. Substituindo a solução em (8.9), obtemos

$$\left(s + \frac{R}{L}\right)Ae^{st} = 0$$

da qual vemos que nossa solução é válida se  $Ae^{st} = 0$  ou seja,  $s = R/L$ . O primeiro caso é desprezado, visto que, por (8.10), isto resulta em  $i = 0$  para todo  $t$  e não pode satisfazer  $i(0) = I_0$ . Então, tomamos o caso  $s = -R/L$  e (8.10) torna-se

$$i(t) = Ae^{-Rt/L}$$

A constante  $A$  pode ser determinada pela condição inicial  $i(0) = I_0$ . Esta condição requer que

$$i(0) = I_0 = A$$

Portanto, a solução torna-se

$$i(t) = I_0e^{-Rt/L} \quad (8.11)$$

Visto que a solução é uma função exponencial, como no caso de um circuito RC, ela também tem uma constante de tempo  $\tau$ . Em termos de  $\tau$ , podemos escrever a corrente na forma geral.

$$i(t) = I_0e^{-t/\tau}$$

onde, por comparação com (8.11), vemos que  $\tau = L/R$ . Evidentemente, as unidades de  $\tau$  são  $H/\Omega = (V\cdot s/A)/(V/A) = s$ . Aumentando  $L$  como aumentando  $C$  no circuito RC, aumenta a constante de tempo. Entretanto, um aumento em  $R$ , contrastando com o circuito RC, reduz o valor da constante de tempo. Um gráfico de uma resposta típica de corrente é mostrado na Fig. 8.7.

A potência instantânea entregue a um resistor na Fig. 8.6 é

$$p(t) = Ri^2(t) = RI_0^2e^{-2Rt/L}$$

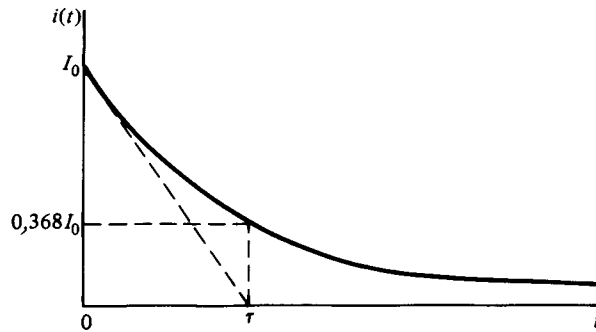


FIGURA 8.7 Resposta de corrente para um circuito simplificado RL

Portanto, a energia absorvida pelo resistor quando o tempo se torna infinito é dada por

$$\begin{aligned} w(\infty) &= \int_0^{\infty} p(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} RI_0^2 e^{-2Rt/L} dt \\ &= \frac{1}{2} LI_0^2 \end{aligned}$$

Comparando este resultado com (8.8), vemos que a energia armazenada inicialmente no indutor é dissipada pelo resistor, como era de se esperar.

Suponha que tivéssemos escolhido calcular a tensão  $v$  no indutor ao invés da corrente  $i$ . Aplicando a LKC encontramos

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v dt + i(0) = 0$$

que é uma equação diferencial. Derivando esta equação em função do tempo, vemos que

$$\frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v = 0$$

ou

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{L} v = 0$$

Esta equação é uma equação diferencial que pode ser resolvida empregando-se um dos métodos discutidos previamente. É também interessante notar que se trocarmos  $v$  por  $iR$ , temos

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$$

que é (8.9), obtida usando a LKT. Destes dois últimos resultados vemos que  $v$  e  $i$  satisfazem a mesma equação e, portanto, têm a mesma forma.

### EXEMPLO 8.3

Vamos agora determinar  $i$  e  $v$  no circuito RL genérico da Fig. 8.8, que assumimos que esteja na condição de regime permanente cc em  $t = 0^-$ . Portanto, lembrando que um indutor é um curto-circuito para cc, temos

$$i(0^-) = \frac{100}{50} = 2 \text{ A}$$

Visto que a corrente no indutor é contínua em  $t = 0$ , temos

$$i(0^+) = i(0^-) = 2 \text{ A}$$

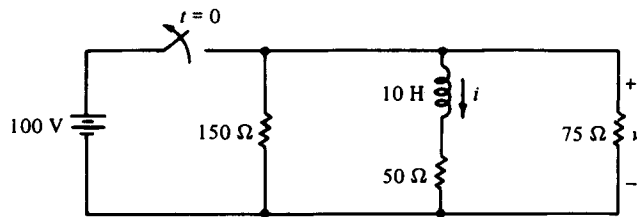


FIGURA 8.8 Circuito RL genérico

A constante de tempo da rede para  $t > 0$  é evidentemente a relação da indutância pela resistência equivalente vista pelos terminais do indutor. A resistência equivalente é

$$R_{\text{eq}} = 50 + \frac{(75)(150)}{75 + 150} = 100 \, \Omega$$

e então a constante de tempo é

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{eq}}} = 0,1 \, \text{s}$$

Portanto, visto que  $I_0 = i(0^+) = 2 \, \text{A}$ , temos

$$i(t) = 2e^{-10t} \, \text{A}$$

Somando as tensões do indutor e do resistor de 50-Ω, a tensão  $v(t)$  é dada por

$$\begin{aligned} v(t) &= 10 \frac{di}{dt} + 50i \\ &= -100e^{-10t} \, \text{V} \end{aligned}$$

### EXEMPLO 8.4

Como exemplo final, considere a rede da Fig. 8.9 que contém uma fonte de tensão dependente. A corrente inicial é  $i(0) = I_0$ . Somando as tensões ao redor do laço, encontramos que

$$L \frac{di}{dt} + Ri + ki = 0$$

ou

$$\frac{di}{dt} + \left( \frac{R + k}{L} \right) i = 0$$

Comparando esta equação a (8.9) vemos que estas equações são idênticas se  $R$  em (8.9) é substituída por  $R + k$ . Então, de (8.11), temos

$$i(t) = I_0 e^{-(R+k)t/L}$$

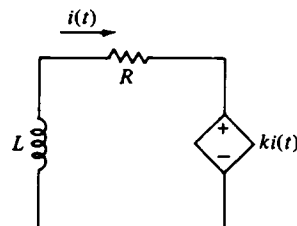


FIGURA 8.9 Circuito RL contendo uma fonte de tensão dependente

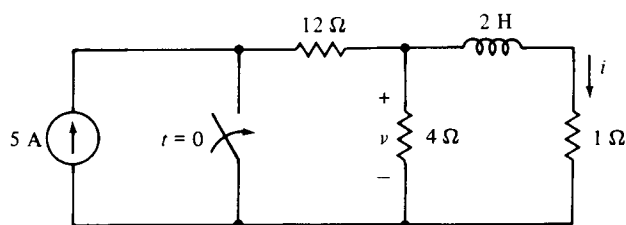
A constante de tempo neste caso, que é modificada pela presença da fonte dependente, é dada por

$$\tau = \frac{L}{R + k}$$

Isto não é surpresa, visto que neste caso a fonte dependente comporta-se como um resistor de  $k\text{-}\Omega$ .

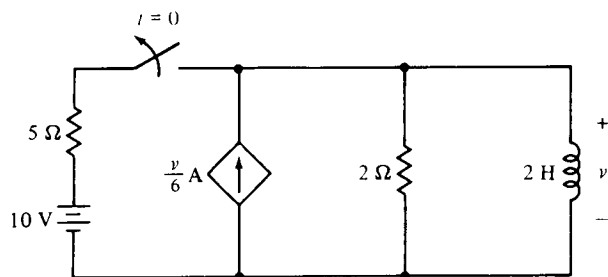
## EXERCÍCIOS

- 8.3.1** Em um circuito  $RL$  série, determine (a) a tensão no indutor para  $R = 200\Omega$ ,  $L = 40\text{ mH}$  e  $I_0 = 10\text{ mA}$ , (b)  $L$ , se  $R = 10\text{ k}\Omega$  e  $\tau = 10\text{ }\mu\text{s}$ , e (c)  $R$ , para que a corrente do indutor de  $0,01\text{-H}$  se reduza à metade a cada  $100\text{ }\mu\text{s}$ .  
*Resposta:* (a)  $2e^{-5,000t}\text{ V}$ ; (b)  $0,1\text{ H}$ ; (c)  $69,3\text{ }\Omega$
- 8.3.2** Um circuito  $RL$  série tem um indutor de  $1\text{-H}$ . Determine o valor de  $R$  para que a energia armazenada se reduza à metade a cada  $10\text{ ms}$ .  
*Resposta:*  $50 \ln 2 = 34,66\text{ }\Omega$
- 8.3.3** O circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ . Calcule  $i$  e  $v$  para  $t > 0$ .  
*Resposta:*  $4e^{-2t}\text{ A}$ ,  $-12e^{-2t}\text{ V}$



EXERCÍCIO 8.3.3

- 8.3.4** O circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ . Calcule  $v$  para  $t > 0$ .  
*Resposta:*  $-6e^{-3t/2}\text{ V}$



EXERCÍCIO 8.3.4

## 8.4

### Resposta a uma Função de Excitação Constante

Nas seções anteriores, temos considerado circuitos sem fontes, cujas respostas são o resultado da energia inicial armazenada em indutores e capacitores. Todas as fontes independentes de corrente e de tensão foram removidas ou desligadas dos circuitos antes do cálculo das respostas naturais. Foi mostrado que estas respostas, quando surgem em circuitos contendo um único capacitor ou indutor e um resistor equivalente, desaparecem com o passar do tempo.

Nesta seção, vamos estudar circuitos que, além da energia inicial armazenada, são *excitados* por fontes de tensão ou correntes independentes e constantes, ou funções de *excitação*. Para estes circuitos vamos obter soluções que são resultados de inserções ou chaveamento de fontes em redes. Vamos ver que as respostas nestes casos, diferentemente daqueles dos circuitos sem fontes, consistem de duas partes, uma das quais é sempre uma constante.

Vamos iniciar considerando o circuito da Fig. 8.10. A rede consiste da associação em paralelo de uma fonte de corrente constante e um resistor que é chaveado no tempo  $t = 0$  sobre o capacitor, que

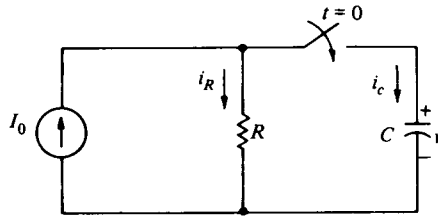


FIGURA 8.10 Rede RC excitada

tem uma tensão  $v(0^-) = V_0$  V. Para  $t > 0$ , a chave é fechada e uma equação nodal para o nó superior é dada por

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = I_0$$

ou

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = \frac{I_0}{C} \quad (8.12)$$

Equações deste tipo, que têm funções de excitação ( $I_0$  neste caso) podem ser resolvidas pelo método de separação de variáveis. Podemos primeiro escrever (8.12) na forma

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v - RI_0}{RC}$$

Multiplicando ambos os lados por  $dt/(v - RI_0)$  e formando as integrais indefinidas, temos

$$\int \frac{dv}{v - RI_0} = -\frac{1}{RC} \int dt$$

ou

$$\ln(v - RI_0) = -\frac{t}{RC} + K$$

onde  $K$  é uma constante de integração. Este resultado pode ser escrito como

$$v - RI_0 = e^{-(t/RC)+K}$$

ou, resolvendo para  $v$ , encontramos

$$v = Ae^{-t/RC} + RI_0 \quad (8.13)$$

onde tomamos  $A = e^K$ , uma constante a ser determinada pelas condições iniciais do circuito.

De (8.13) vemos que a solução geral para a resposta de tensão consiste de duas partes, uma função exponencial e uma função constante. A função exponencial é de forma idêntica à da resposta natural de circuitos sem fontes compostos de  $R$  e  $C$ . Visto que parte da solução é caracterizada completamente pela constante de tempo  $RC$ , vamos nos referir a ela como a *resposta natural*  $v_n$  do circuito excitado. Como no caso do circuito sem fontes, esta resposta tende a zero com o passar do tempo.

A segunda parte da solução, dada por  $RI_0$ , mantém uma semelhança com a função de excitação  $I_0$ . De fato, com o passar do tempo, a resposta natural desaparece e a solução é simplesmente  $RI_0$ . Esta componente é devida inteiramente à função de excitação e será denominada *resposta forçada*  $v_f$  do circuito excitado.

Um leitor que já teve um curso de equações diferenciais irá, sem dúvida, reconhecer a resposta natural  $v_n$  e a resposta forçada  $v_f$  como a resposta homogênea  $v_h$  e a resposta particular  $v_p$ .

Vamos agora avaliar a constante  $A$  em (8.13). Como no caso do circuito sem fontes, seu valor deve ser escolhido de forma que a condição da tensão inicial seja satisfeita. Em  $t = 0^+$  vemos que

$$v(0^+) = v(0^-) = V_0$$

Portanto, em  $t = 0^+$ , (8.13) requer que

$$V_0 = A + RI_0$$

ou

$$A = V_0 - RI_0$$

Substituindo este valor de  $A$  na nossa solução, fica

$$v(t) = RI_0 + (V_0 - RI_0)e^{-t/RC} \quad (8.14)$$

Devemos observar nessa solução que a constante  $A$  é agora determinada não somente pela tensão (ou energia) inicial no capacitor mas também pela função de excitação  $I_0$ .

Gráficos de  $v_n$ ,  $v_f$  e  $v$  são mostrados nas Figs. 8.11(a) e (b). Em (a) a resposta natural  $v_n$  para  $V_0 - RI_0 > 0$  e a resposta forçada  $v_f$  são mostradas. Em (b) a resposta completa é mostrada.

A corrente no capacitor para  $t > 0$  é

$$i_C = C \frac{dv}{dt} = -\frac{V_0 - RI_0}{R} e^{-t/RC}$$

enquanto que a corrente no resistor é

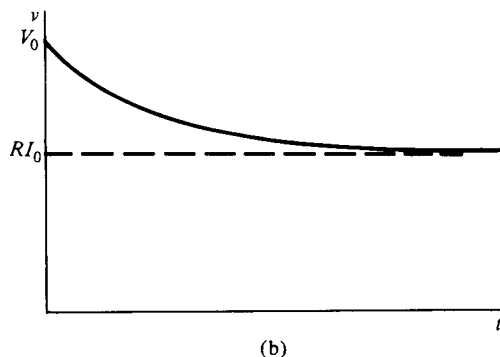
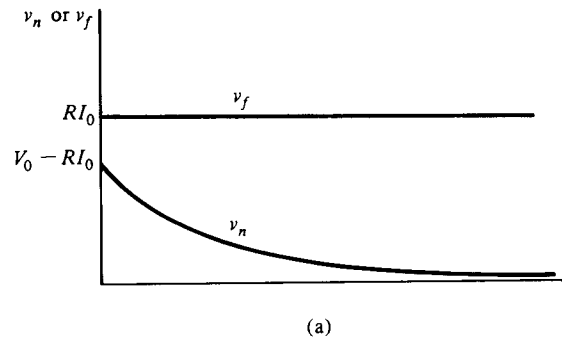
$$i_R = I_0 - i_C = I_0 + \frac{V_0 - RI_0}{R} e^{-t/RC}$$

É interessante notar que a tensão no resistor muda abruptamente de  $RI_0$  em  $t = 0^-$  para  $V_0$  em  $t = 0^+$ . A tensão no capacitor, como indicado anteriormente, é contínua.

As soluções que temos encontrado até aqui neste capítulo são freqüentemente referenciadas em outros termos mais descritivos. Dois destes termos, que são muito populares, são a *resposta transitória* e a *resposta em regime permanente*. A resposta transitória é a porção transitória da resposta completa que tende a zero com o aumento do tempo. A resposta em regime permanente, por outro lado, é a parte da resposta completa que permanece após a resposta transitória ter se tornado zero. No caso de fontes cc, a resposta em regime permanente é constante e é o estado permanente cc discutido na Seq. 7.7.

Em nosso exemplo, vemos que a resposta transitória e a resposta natural são idênticas, como são aquelas para circuitos sem fontes das seções anteriores. A resposta em estado permanente é, portanto, idêntica à resposta forçada. Em nosso exemplo estas respostas são  $v = RI_0$ ,  $i_C = 0$ , e  $i_R = I_0$ , valores cc que constituem a condição e estado permanente cc.

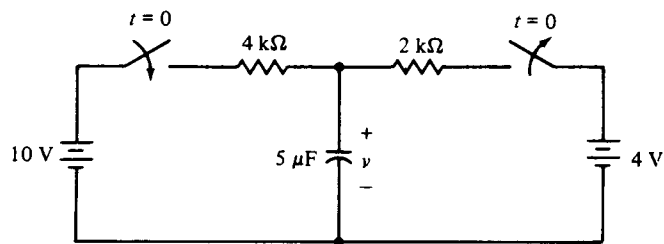
Não devemos concluir, de nossa discussão acima, que as respostas natural e forçada são sempre as respostas transitória e em regime permanente. Se uma função de excitação é uma função transitória, por exemplo, a resposta de regime permanente é zero, como veremos no próximo capítulo. Neste caso, a resposta completa é a resposta transitória.



**FIGURA 8.11** Gráficos da resposta da tensão para a rede RC da Fig. 8.10 excitada: (a) resposta natural e forçada; (b) resposta completa

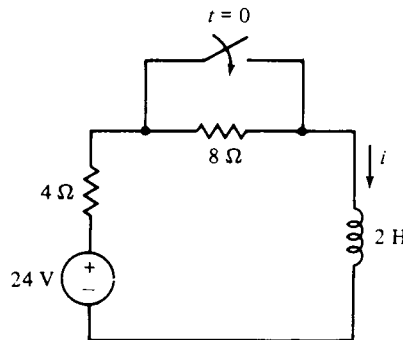
## EXERCÍCIOS

- 8.4.1 Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .  
 Resposta:  $10 - 6e^{-50t}$  V



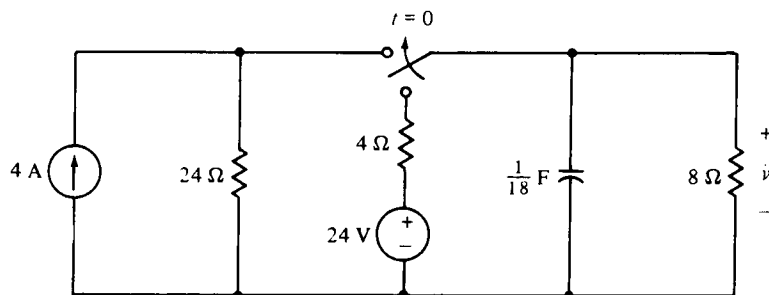
EXERCÍCIO 8.4.1

- 8.4.2 O circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ . Calcule  $i$  para  $t > 0$ .  
 Resposta:  $6 - 4e^{-2t}$  A



EXERCÍCIO 8.4.2

- 8.4.3 Calcule  $v$  para  $t > 0$  se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .  
 Resposta:  $24 - 8e^{-3t}$  V



EXERCÍCIO 8.4.3

## 8.5

### O Caso Geral

As equações que descrevem as redes das seções anteriores são casos especiais da expressão geral dada por

$$\frac{dy}{dt} + Py = Q \quad (8.15)$$

onde  $y$  é a incógnita, como  $v$  ou  $i$  e  $P$  e  $Q$  são constantes. Se, por exemplo, compararmos esta equação



com (8.2) para o circuito sem fontes da Seç. 8.1, vemos que  $y = v$ ,  $P = 1/RC$  e  $Q = 0$ . As mesmas relações são válidas para o circuito excitado da Seç. 8.4, exceto que  $Q = I_0/C$ .

A solução de (8.15) pode ser encontrada por separação de variáveis. Entretanto, vamos introduzir outro método que também é aplicável quando  $Q$  é uma função do tempo, um caso importante nos próximos capítulos. Este método, conhecido como *método do fator de integração*, consiste de multiplicar a equação por um fator que torna seu lado esquerdo uma derivada perfeita, e integra então ambos os lados.

Vamos iniciar considerando a derivada de um produto, dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(ye^{Pt}) &= \frac{dy}{dt}e^{Pt} + Pye^{Pt} \\ &= \left(\frac{dy}{dt} + Py\right)e^{Pt} \end{aligned}$$

Deste resultado, vemos que se multiplicarmos ambos os lados de (8.15) por  $e^{Pt}$  temos

$$\frac{d}{dt}(ye^{Pt}) = Qe^{Pt}$$

Integrando ambos os lados da equação, encontramos

$$ye^{Pt} = \int Qe^{Pt} dt + A$$

onde  $A$  é uma constante de integração. Resolvendo para  $y$ , temos

$$y = e^{-Pt} \int Qe^{Pt} dt + Ae^{-Pt} \quad (8.16)$$

que é válida, sem dúvida, se  $Q$  é uma função do tempo ou uma constante. Se  $Q$  não é uma constante, então devemos realizar a integração para encontrar  $y$ . Exemplos deste tipo são dados nos Ex. 8.5.2 e Ex. 8.5.4.

No caso importante de cc onde  $Q$  é uma constante, (8.16) torna-se

$$\begin{aligned} y &= Ae^{-Pt} + \frac{Q}{P} \\ &= y_n + y_f \end{aligned} \quad (8.17)$$

onde  $y_n = Ae^{-Pt}$  e  $y_f = Q/P$  são as respostas natural e forçada. Observamos que  $y_n$  tem a mesma forma matemática de a resposta natural sem fontes e que  $y_f$  é sempre uma constante que é proporcional a  $Q$ . Além disso,  $1/P$  é a constante de tempo na resposta natural.

### EXEMPLO 8.5

Para ilustrar o método, vamos calcular  $i_2$  para  $t > 0$  no circuito da Fig. 8.12, dado que  $i_2(0) = 1$  A. Embora o circuito seja uma combinação complexa de elementos, a solução de (8.17) é válida visto que a rede contém uma função de excitação constante e um único elemento armazenador de energia (o indutor). As equações de laço para este circuito são

$$8i_1 - 4i_2 = 10$$

$$-4i_1 + 12i_2 + \frac{di_2}{dt} = 0$$

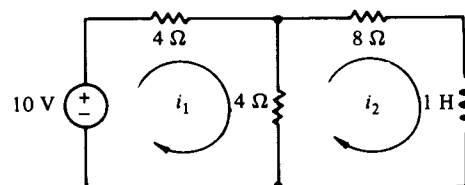


FIGURA 8.12 Circuito RL excitado

Eliminando  $i_1$  destas equações, encontramos que

$$\frac{di_2}{dt} + 10i_2 = 5$$

Comparando essa equação, com (8.15), vemos que  $P = 10$  e  $Q = 5$ . Portanto, (8.17) dá

$$i_2 = Ae^{-10t} + \frac{1}{2}$$

Aplicando a condição inicial temos

$$i_2(0) = A + \frac{1}{2} = 1$$

Portanto,  $A = 1/2$  e a solução é dada por

$$i_2 = \frac{1}{2}e^{-10t} + \frac{1}{2} \text{ A}$$

Também podemos obter (8.17) para o caso em que  $Q$  é constante, observando (8.15) e (8.16). Fazendo  $Q = 0$  em (8.16) obtemos a resposta natural  $y = y_n = Ae^{-Pt}$ , que então deve ser a solução de (8.15) quando  $Q = 0$ . Isto é, a resposta natural satisfaz

$$\frac{dy}{dt} + Py = 0$$

e que pode ser encontrada como na Seq. 8.3, por *experimentação*

$$y_n = Ae^{st}$$

que resulta em

$$s + P = 0$$

Então temos  $s = -P$ , que dá  $y_n = Ae^{-Pt}$ , como anteriormente. A resposta forçada  $y_f$  pode ser encontrada experimentando em (8.15) uma função como  $Q$ . Visto que  $Q$  é uma constante neste caso, a *solução tentativa* é então uma constante. Isto é, tentamos

$$y_f = K$$

que substituindo em (8.15) dá

$$0 + PK = Q$$

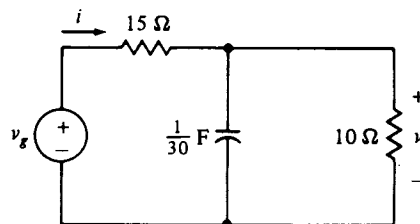
ou

$$y_f = K = \frac{Q}{P}$$

como anteriormente.

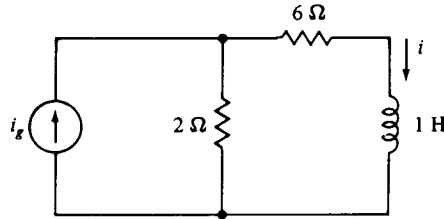
## EXERCÍCIOS

- 8.5.1** Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se  $i(0) = 1$  A e  $v_g = 50$  V.  
Resposta:  $20 + 15e^{-5t}$  V



EXERCÍCIO 8.5.1

- 8.5.2 Resolva o Ex. 8.5.1, se  $v_g = 50 e^{-3t}$  V.  
 Resposta:  $50e^{-3t} - 15e^{-5t}$  V
- 8.5.3 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se  $i(0) = 4$  A e  $i_g = 8$  A.  
 Resposta:  $2 + 2e^{-8t}$  A



EXERCÍCIO 8.5.3

- 8.5.4. Resolva o Ex. 8.5.3., se  $i_g = 13 \cos t$  A.  
 Resposta:  $0,4 (8 \cos t + \text{sen } t + 2e^{-8t})$  A

## 8.6

### Um Procedimento Simplificado

Vamos agora introduzir um procedimento simplificado que é muito útil para calcular os valores de correntes e de tensões em vários circuitos, particularmente naqueles em que não existem fontes dependentes. A técnica implica formular a solução por mera inspeção do circuito.

#### EXEMPLO 8.6

Considere, por exemplo, o Exemplo 8.5 da seção anterior (Fig. 8.12). Sabemos que

$$i_2 = i_{2n} + i_{2f}$$

onde  $i_{2n}$  e  $i_{2f}$  são as respostas natural e forçada, respectivamente. Visto que  $i_{2n}$  tem a mesma forma que a resposta sem fontes, podemos ver a rede com a ausência da função de excitação (isto é, substituindo a fonte de 10-V por um curto-circuito), como mostrado na Fig. 8.13(a). A resposta natural é então

$$i_{2n} = Ae^{-10t}$$

A resposta forçada é constante; portanto, no nível em que a resposta é concebida, não importa em que tempo olhamos o circuito. Podemos escolher então olhar o circuito no regime permanente quando  $i_{2n}$  é zero. Nesta hora o indutor está curto-circuitado, como mostrado na Fig. 8.13(b), da qual se segue que

$$i_{2f} = \frac{1}{2}$$

Portanto,

$$i_2 = Ae^{-10t} + \frac{1}{2}$$

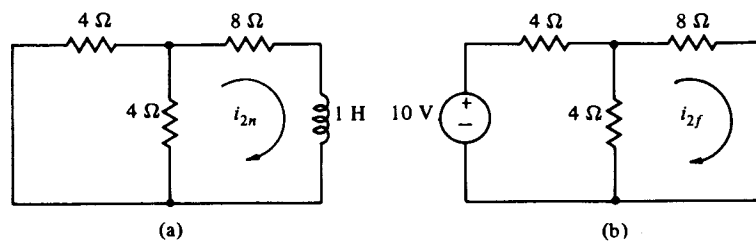


FIGURA 8.13 Circuitos para calcular a resposta da Fig. 8.12. (a) Circuito para cálculo de  $i_{2n}$ ; (b) circuito para cálculo de  $i_{2f}$

A constante  $A$  é agora determinada como anteriormente a partir da condição inicial  $i_2(0) = 1$ .

Neste ponto, cabe uma palavra de cautela. Quando calculamos a constante  $A$ , a condição inicial deve ser sempre aplicada para a resposta completa — nunca à resposta natural sozinha — porque a condição inicial é sempre dada para a corrente, e não para uma parte dela.

### EXEMPLO 8.7

Como um segundo exemplo, vamos calcular  $i$  para  $t > 0$  na Fig. 8.14, dado que  $v(0) = 24$  V. A corrente é dada por

$$i = i_n + i_f$$

Para obter  $i_n$  notamos que ela tem a mesma *forma* de  $v_n$ , a resposta natural da tensão no capacitor. De fato, a resposta natural de *cada* corrente ou tensão no circuito tem a mesma forma de  $v_n$ . Isto é verdade, porque todas as outras correntes e tensões no circuito sem fontes podem ser obtidas de  $v_n$  por aplicação de uma ou mais operações de adição, subtração (na LKT e na LKC), diferenciação e integração, nenhuma das quais altera a natureza da exponencial  $e^{-t/\tau}$ . Examinando o circuito sem fontes (fonte de corrente aberta), vemos que a constante de tempo para a tensão no capacitor é  $\tau = 0,2$  s. Portanto

$$i_n = Ae^{-5t}$$

No regime permanente o capacitor é um circuito aberto e a resposta forçada é, por inspeção,

$$i_f = 1 \text{ A}$$

Portanto,

$$i(t) = Ae^{-5t} + 1$$

Para avaliar o valor de  $A$ , precisamos encontrar o valor de  $i(0^+)$ . Visto que  $v(0) = v(0^+) = 24$  V, somando as tensões ao redor da malha direita, para  $t = 0^+$ , temos

$$-4i(0^+) + 6[1 - i(0^+)] + 24 = 0$$

ou

$$i(0^+) = 3$$

Substituindo esta corrente inicial em nossa solução, encontramos que

$$3 = A + 1$$

Portanto,  $A = 2$  e

$$i = 1 + 2e^{-5t} \text{ A}$$

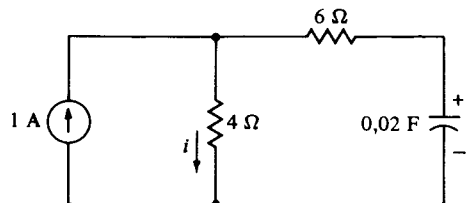


FIGURA 8.14 Circuito RC excitado

### EXEMPLO 8.8

Antes de concluirmos esta seção, vamos, como exemplo final, determinar  $i$  e  $v$  no circuito da Fig. 8.15(a). A rede está na condição de regime permanente cc no tempo  $t = 0^-$  com a chave aberta; portanto, o indutor e o capacitor são um curto-circuito e um circuito aberto, respectivamente, nesta hora. A tensão no capacitor é igual à tensão sobre o resistor de  $20\text{-}\Omega$ , e a corrente no indutor é igual à corrente no resistor de  $15\text{-}\Omega$ . Por divisão de corrente, as correntes nos resistores de  $15\text{-}$  e  $20\text{-}\Omega$  são facilmente calculadas

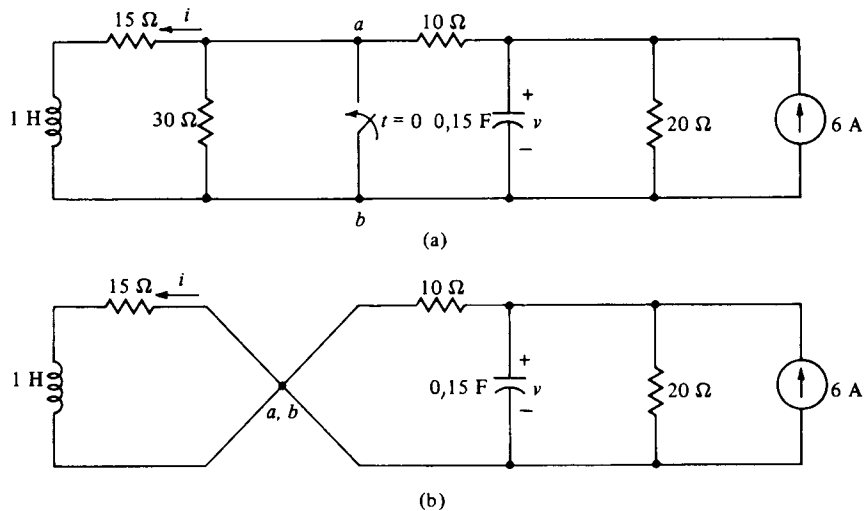


FIGURA 8.15 (a) Circuito contendo uma indutância e uma capacitância; (b) Circuito equivalente para  $t > 0$

como 2 e 3 A, respectivamente. Então,

$$i(0^-) = 2 \text{ A}$$

e

$$v(0^-) = 60 \text{ V}$$

Quando a chave é fechada em  $t = 0$ , observamos que os nós  $a$  e  $b$  são curto-circuitados entre si e podemos redesenhar a rede como mostrado na Fig. 8.15(b). Deve ser observado que o resistor de  $30\text{-}\Omega$  não precisa ser incluído neste circuito porque a chave o está curto-circuitando. A combinação é equivalente a um resistor de  $30\text{-}\Omega$  em paralelo com um resistor de  $0\text{-}\Omega$  que, é claro, é  $0\text{-}\Omega$  ou um curto-circuito.

Em seguida, vamos considerar a corrente  $i$  deixando  $a$  na Fig. 8.15(b) através do resistor de  $15\text{-}\Omega$ . Da LKC, esta mesma corrente deve entrar em  $a$  através do indutor de  $1\text{-H}$ ; por isso nenhuma corrente fluindo no circuito à esquerda de  $a$  pode entrar na outra parte do circuito à direita de  $a$ , e vice-versa. Desta forma, depois que a chave é fechada, a rede reduz-se a dois circuitos independentes, cada qual pode ser resolvido individualmente.

O primeiro circuito, consistindo em um indutor de  $1\text{-H}$  e um resistor de  $15\text{-}\Omega$ , é simplesmente uma rede  $RL$  sem fontes, tendo  $i(0^+) = i(0^-) = 2 \text{ A}$ . Portanto,

$$i = 2e^{-15t} \text{ A}$$

O segundo circuito, composto de todos os elementos à direita de  $a$ , é simplesmente uma rede  $RC$  excitada com  $v(0^+) = v(0^-) = 60 \text{ V}$ . De nosso procedimento simplificado, encontramos

$$v = 40 + 20e^{-t} \text{ V}$$

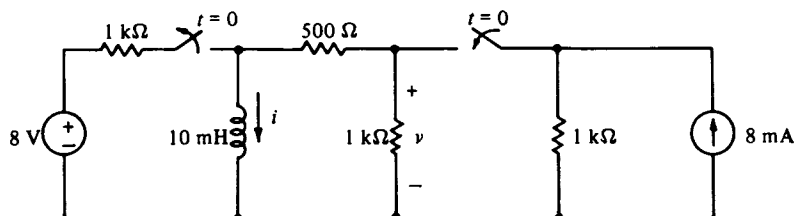
O procedimento simplificado apresentado nesta seção é também aplicável a circuitos contendo fontes dependentes. Contudo, normalmente não se obtêm reduções de tempo ou esforço porque as equações de circuito ainda têm de ser escritas para os casos sem fontes e em regime permanente cc.

## EXERCÍCIOS

**8.6.1** Resolva o Ex. 8.5.1 usando o procedimento simplificado desta seção.

**8.6.2** Calcule  $v$  e  $i$  para  $t > 0$ , se seu circuito está em regime permanente cc em  $t = 0^-$ .

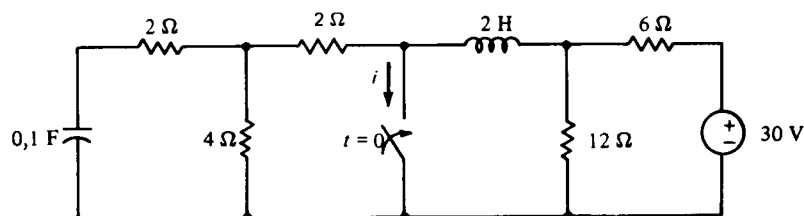
Resposta:  $2(1 - e^{-10^5 t}) \text{ V}$ ,  $4(1 + e^{-10^5 t}) \text{ mA}$



EXERCÍCIO 8.6.2

**8.6.3** Calcule  $i$  para  $t > 0$  se o circuito está em regime permanente cc em  $t = 0^-$ .

Resposta:  $8/5 e^{-3t} = 3e^{-2t} = 5 \text{ A}$



EXERCÍCIO 8.6.3

**8.6.4** Calcule  $i$  para  $t > 0$  no circuito do Ex. 8.6.2, se as duas chaves são fechadas em  $t = 0$  e  $i(0) = 0$ .

(Sugestão: Calcule  $i_i$  como antes e observe que  $i_f$  é devida às duas fontes.)

Resposta:  $12 - 12e^{-50.000t} \text{ mA}$

## 8.7

### A Função Degrau Unitário

Nas seções anteriores analisamos circuitos nos quais as fontes de energia têm sido instantaneamente inseridas nas redes. No instante em que estas fontes são aplicadas, correntes ou tensões, nos pontos de excitação, mudam abruptamente. Funções de excitação cujos valores mudam desta forma são chamadas *funções singulares*. Existem muitas funções singulares que são empregadas na análise de circuitos. Uma das mais importantes é a função degrau unitário, assim chamada pelo engenheiro inglês Oliver Heaviside (1850-1925).

A *função degrau unitário* é a função que é igual a zero para todos os valores negativos de seu argumento e que é igual a um para todos os valores positivos de seu argumento. Se chamarmos a função degrau unitário pelo símbolo  $u(t)$  então a descrição matemática é

$$\begin{aligned} u(t) &= 0, & t < 0 \\ &= 1, & t > 0 \end{aligned} \quad (8.18)$$

De um gráfico de (8.18), mostrado na Fig. 8.16, vemos que em  $t = 0$ ,  $u(t)$  muda abruptamente de 0 para 1, mas estamos deixando  $u(t)$  indefinida em  $t = 0$ .

A função degrau unitário pode ser usada para representar tensões ou correntes com descontinuidades finitas. Por exemplo, um degrau de tensão de  $V$  volts é representado pelo produto  $Vu(t)$ . Evidentemente, esta tensão é 0 para  $t < 0$  e  $V$  volts para  $t > 0$ . Uma fonte degrau de tensão de  $V$  volts é mostrada na Fig. 8.17(a). Um circuito que é o equivalente desta fonte é mostrado na Fig. 8.17(b). Um curto-circuito existe para  $t < 0$ , e a tensão é, evidentemente, zero. Para  $t > 0$ , uma tensão  $V$  aparece em seus terminais. Temos assumido em nosso modelo que a ação de chaveamento ocorre num tempo igual a zero.

Circuitos equivalentes para uma fonte degrau de corrente de  $I$  ampères são mostrados na Fig. 8.18. Um circuito aberto existe para  $t < 0$ , e a corrente é zero. Para  $t > 0$ , a ação do chaveamento causa a circulação de uma corrente de  $I$  ampères.

A ação do chaveamento mostrada na Fig. 8.17 somente pode ser aproximada em circuitos reais. Contudo, em muitos casos, não é necessário exigir que a fonte de tensão seja um curto-circuito para  $t < 0$ , como veremos na próxima seção. Se os terminais da rede nos quais a fonte será conectada permanecem

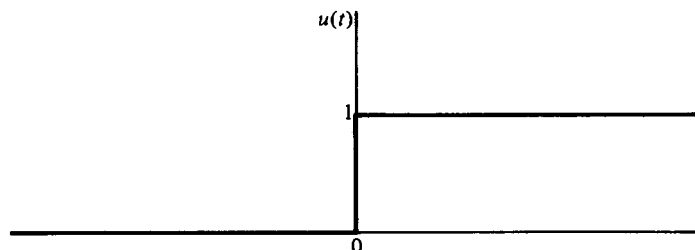


FIGURA 8.16 Gráfico da função degrau unitário  $u(t)$

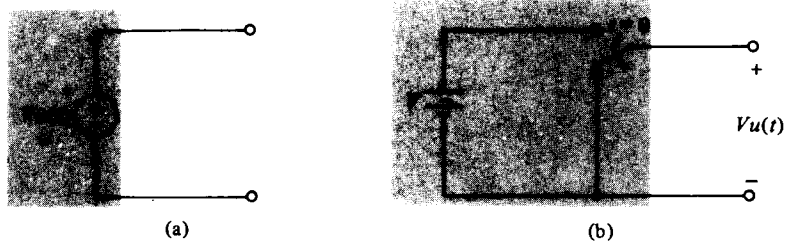


FIGURA 8.17 (a) Fonte degrau de tensão de  $V$  volts; (b) circuito, equivalente

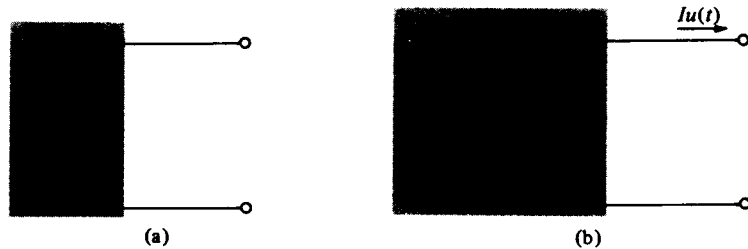


FIGURA 8.18 (a) Fonte degrau de corrente de  $I$  ampères; (b) circuito equivalente

em 0 V para  $t < 0$ , então a conexão em série de uma fonte  $V$  e uma chave é equivalente a uma fonte de degrau de tensão, como mostrado na Fig. 8.19.

Circuitos equivalentes para uma fonte degrau de corrente em uma rede são mostrados na Fig. 8.20. Em cada caso a corrente nos terminais da rede deve ser zero para  $t < 0$ .

Vamos agora retornar à nossa definição da função degrau unitária dada em (8.18). Podemos generalizar esta definição trocando  $t$  por  $t - t_0$  nos três pontos em que  $t$  ocorre, o que resulta em

$$\begin{aligned} u(t - t_0) &= 0, & t < t_0 \\ &= 1, & t > t_0 \end{aligned} \quad (8.19)$$

A função  $u(t - t_0)$  é a função  $u(t)$  atrasada por  $t_0$  segundos, como mostrado na Fig. 8.21.

Multiplicando (8.19) por  $V$  ou  $I$  nos dá uma fonte degrau de tensão ou uma fonte degrau de corrente,

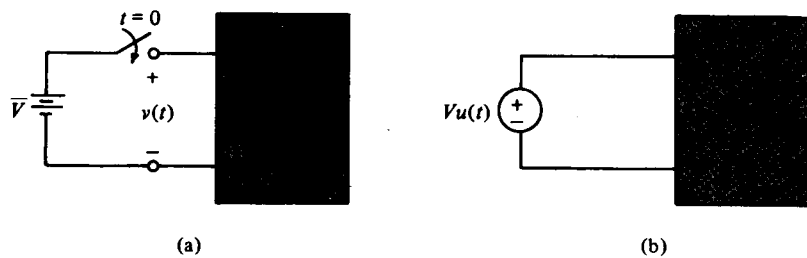


FIGURA 8.19 (a) Rede com  $V$  aplicado em  $t = 0$ ; (b) circuito equivalente

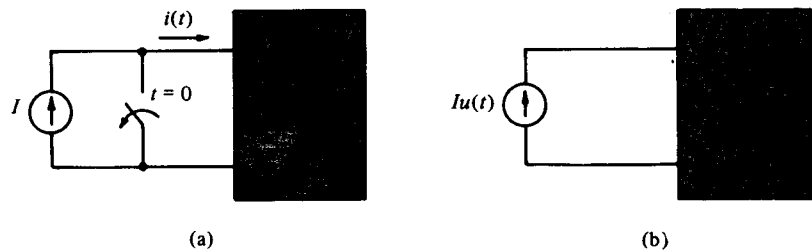


FIGURA 8.20 (a) Rede com  $I$  aplicado em  $t = 0$ ; (b) circuito equivalente

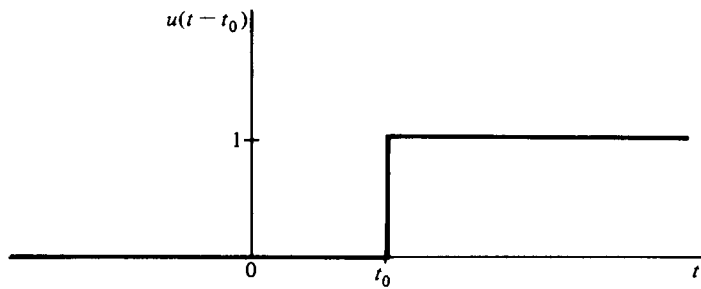


FIGURA 8.21 Gráfico de uma função degrau unitário  $u(t - t_0)$

cujo valor muda abruptamente no tempo  $t_0$ . Redes equivalentes para estas fontes são obtidas nas Figs. 8.17–8.20 fazendo com que todas as ações de chaveamento ocorram em  $t = t_0$ .

### EXEMPLO 8.9

Funções degrau são muito utilizadas na formulação de funções mais complexas. Tomemos, por exemplo, o pulso de tensão retangular da Fig. 8.22(a). Desta figura, vemos que

$$\begin{aligned} v_1(t) &= 0, & t < 0 \\ &= V, & 0 < t < t_0 \\ &= 0, & t > t_0 \end{aligned}$$

Visto que  $u(t)$  torna-se 1 para  $t > 0$  e  $u(t - t_0)$  torna-se 1 para  $t > t_0$ , podemos escrever

$$v_1(t) = V[u(t) - u(t - t_0)] \quad (8.20)$$

Para conferir este resultado, vemos que, para  $t < 0$

$$v_1(t) = V(0 - 0) = 0$$

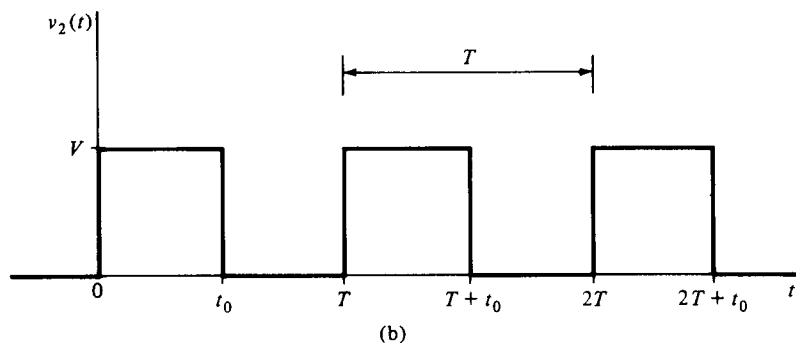
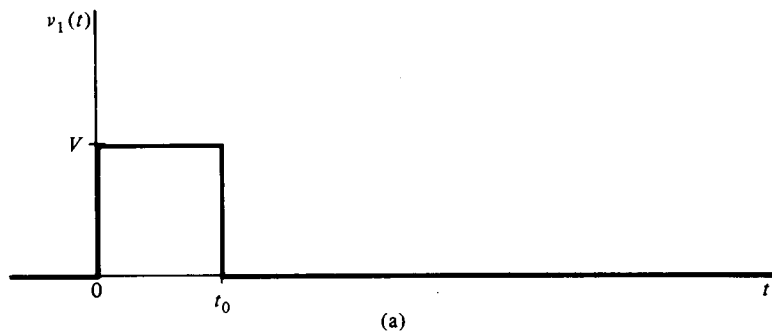


FIGURA 8.22 (a) Pulso retangular; (b) onda quadrada



Para  $0 < t < t_0$ ,

$$v_1(t) = V(1 - 0) = V$$

e para  $0 > t_0$ ,

$$v_1(t) = V(1 - 1) = 0$$

Agora suponhamos que desejamos produzir um trem destes pulsos, com um ocorrendo a cada  $T$  segundos, onde  $T > t_0$ , como mostrado na Fig. 8.22(b). Esta onda é chamada uma *onda quadrada*. O primeiro pulso é dado por (8.20). O segundo pulso é simplesmente o primeiro pulso atrasado de  $T$  segundos. Portanto, substituindo  $t$  por  $t - T$  em (8.20), temos

$$\text{Pulso 2} = V\{u(t - T) - u[t - (T + t_0)]\}$$

O pulso de ordem  $(n+1)$  no trem de pulsos é igual ao primeiro, atrasado por  $nT$ , e, portanto,

$$\text{Pulso } n + 1 = V\{u(t - nT) - u[t - (nT + t_0)]\}$$

Para obter uma expressão para a onda quadrada para todo  $t > 0$ , somamos as expressões acima e obtemos

$$v_2(t) = V \sum_{n=0}^{\infty} \{u(t - nT) - u[t - (nT + t_0)]\} \quad (8.21)$$

Formas de ondas como as da Fig. 8.22 são muito comuns em circuitos *digitais* tais como os de um computador digital.

## EXERCÍCIOS

**8.7.1** Usando funções degrau unitário escreva uma expressão para a corrente  $i(t)$  que satisfaça

- (a)  $i(t) = 0, \quad t < 0$   
 $= -10 \text{ mA}, \quad t > 0.$
- (b)  $i(t) = 0, \quad t < 1 \text{ s}$   
 $= 2 \text{ A}, \quad 1 < t < 5 \text{ s}$   
 $= 0, \quad t > 5 \text{ s}$
- (c)  $i(t) = 0 \quad t < 10 \text{ ms}$   
 $= -2 \text{ A}, \quad 10 < t < 20 \text{ ms}$   
 $= 4 \text{ A}, \quad 20 < t < 40 \text{ ms}$   
 $= 0, \quad t > 40 \text{ ms}$
- (d)  $i(t) = 4 \mu\text{A}, \quad t < 1 \text{ s}$   
 $= 0, \quad t > 1 \text{ s}$

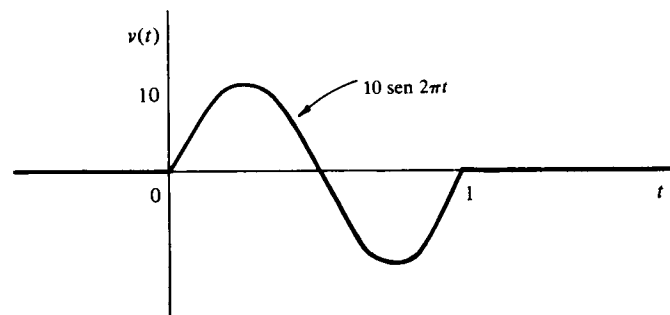
Resposta: (a)  $-10u(t)\text{mA}$ ; (b)  $2[u(t-1) - u(t-5)]\text{A}$ ; (c)  $-2u(t - 0,01) + 6u(t - 0,02) - 4u(t - 0,04)\text{A}$ ; (d)  $4u(-t + 1)\mu\text{A}$

**8.7.2.** Esboce a tensão dada por

$$v(t) = tu(t) - 2(t - 1)u(t - 1) + (t - 2)u(t - 2) \text{ V}$$

**8.7.3.** Usando funções degrau unitário, escreva uma expressão para  $v(t)$  para  $-\infty < t < \infty$ .

Resposta:  $10 \text{ sen } 2\pi t [u(t) - u(t - 1)]$



EXERCÍCIO 8.7.3

## Resposta ao Degrau

A *resposta ao degrau* é a resposta de um circuito tendo somente uma entrada, que é a função degrau unitário. A resposta e o degrau de entrada podem, certamente, ser uma corrente ou uma tensão. A resposta ao degrau é devida somente ao degrau de entrada visto que não existem energias iniciais presentes nos elementos dinâmicos do circuito. Este é o caso, porque todas as correntes e tensões na rede são zero em  $t = 0^-$  devido ao fato de que a função degrau é zero para  $-\infty < t < 0$ . Então, a resposta ao degrau é a resposta para um degrau unitário de entrada, sem energia inicial armazenada no circuito.

### EXEMPLO 8.10

Como um exemplo, vamos encontrar a resposta ao degrau  $v$  no circuito  $RC$  simplificado da Fig. 8.25 (a) tendo uma entrada de  $v_g = u(t)$  V. Aplicando a LKC temos

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v - u(t)}{R} = 0$$

ou

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{1}{RC} u(t)$$

Para  $t < 0$ , esta equação torna-se

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0$$

cuja solução é

$$v = Ae^{-t/RC}$$

Aplicando a condição inicial  $v(0^-) = 0$  vemos que  $A = 0$  e, portanto

$$v(t) = 0, \quad t < 0$$

que confirma nossa afirmativa que a resposta é 0 antes da mudança na entrada.

Para  $t > 0$ , nossa equação diferencial é

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{1}{RC}$$

Sabemos que

$$v = v_n + v_f$$

onde

$$v_n = Ae^{-t/RC}$$

e, por inspeção,

$$v_f = 1$$

Portanto,

$$v = 1 + Ae^{-t/RC}$$

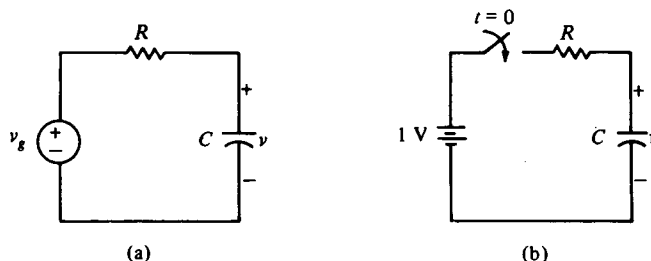


FIGURA 8.23 (a) Circuito  $RC$  com uma entrada de degrau de tensão; (b) circuito equivalente

A condição inicial  $v(0^+) = v(0^-) = 0$  requer que  $A = -1$ , e, portanto, nossa solução para todo  $t$  é

$$\begin{aligned} v(t) &= 0, & t < 0 \\ &= 1 - e^{-t/RC}, & t > 0 \end{aligned}$$

Isso pode ser escrito mais concisamente, usando a função degrau unitário, como

$$v(t) = (1 - e^{-t/RC})u(t)$$

As tensões sobre o resistor e o capacitor são zero para  $t < 0$ . Portanto, um circuito equivalente para nossa rede é satisfeito pelo circuito da Fig. 8.23(b) com a condição que  $v(0^-) = 0$ .

### EXEMPLO 8.11

Como um segundo exemplo, vamos calcular  $v_2(t)$  no circuito da Fig. 8.24, consistindo em um resistor, um capacitor e um amplificador operacional. A equação nodal no terminal inversor do amp. op. é dada por

$$\frac{v_1}{R} + C \frac{dv_2}{dt} = 0$$

visto que a tensão do nó e a corrente do terminal inversor são ambas 0. Portanto,

$$\frac{dv_2}{dt} = -\frac{1}{RC} v_1$$

Integrando ambos os lados desta equação entre os limites  $0^+$  e  $t$ , temos

$$v_2(t) = -\frac{1}{RC} \int_{0^+}^t v_1 dt + v_2(0^+)$$

A resposta  $v_2(t)$  é proporcional à integral da tensão de entrada  $v_1$  se  $v_2(0^+) = 0$ . Então, o circuito é chamado um *integrador*.

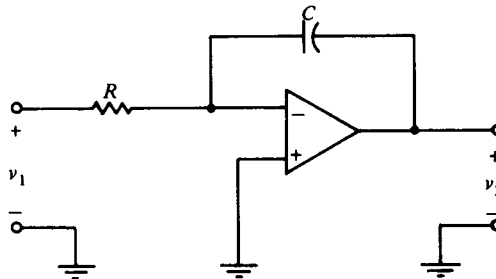


FIGURA 8.24 Integrador

### EXEMPLO 8.12

Vamos agora determinar a resposta da rede se  $v_1 = Vu(t)$ . Neste caso, visto que  $v_2(0^-) = 0$  e  $v_2$  é a tensão no capacitor, então  $v_2(0^+) = 0$ . Portanto, temos

$$v_2(t) = -\frac{V}{RC} \int_{0^+}^t u(t) dt$$

Se  $t < 0$ , então  $u(t) = 0$ , e  $v_2(t) = 0$ . Para  $t > 0$ ,  $u(t) = 1$ , e temos

$$v_2 = -\frac{V}{RC} tu(t)$$

Um gráfico de  $v_2$  é mostrado na Fig. 8.25. Esta função é chamada uma função *rampa* com uma inclinação de  $-V/RC$ .

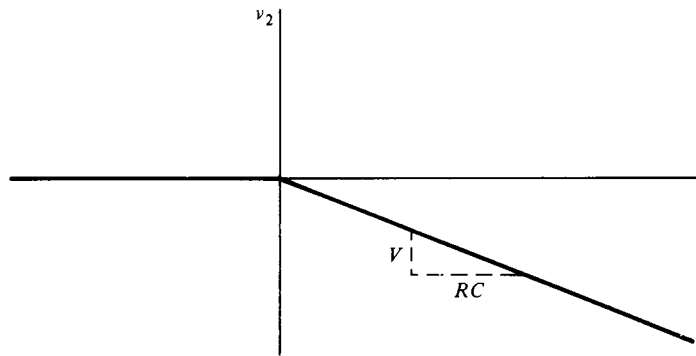


FIGURA 8.25 Resposta ao degrau em um integrador

### EXEMPLO 8.13

Como um exemplo final, calcular a tensão  $v(t)$  na rede da Fig. 8.26, dado que  $i(0^-) = 0$ . A função de excitação para o circuito é o pulso de corrente.

$$i_g(t) = 10[u(t) - u(t - 1)] \text{ A}$$

que é o pulso mostrado na Fig. 8.27(a). Visto que  $i_g = 0$  para  $t < 0$ , temos  $i(0^-) = 0$ . Também, visto que em  $t = 0$  um degrau de corrente de 10 A é aplicado, a resposta da rede é idêntica à resposta em degrau até  $t = 1$  s. Neste instante, a função de excitação  $i_g(t)$  torna-se zero, e a resposta é simplesmente a resposta sem fontes, resultante da energia que o indutor armazenou durante o intervalo do pulso de corrente. Portanto, vemos que a solução do problema envolve o cálculo da resposta do circuito ao degrau para  $t < 1$  s e então calcular a resposta sem fontes para  $t > 1$  s.

Sabemos que a resposta ao degrau é da forma

$$v = v_n + v_f$$

onde

$$v_n = Ae^{-R_{eq}t/L} = Ae^{-5t/5} = Ae^{-t}$$

e, por divisão de corrente e pela lei de Ohm, a resposta forçada é o valor em regime permanente

$$v_f = 2 \left[ \frac{(3)(10)}{2 + 3} \right] = 12$$

Associando-se estas equações, temos

$$v = Ae^{-t} + 12$$

Visto que  $i(0^+) = i(0^-) = 0$ , então  $v(0^+) = v(0^-) = 0$  e  $A = -12$ . Portanto,

$$\begin{aligned} v &= 0, & t < 0 \\ &= 12(1 - e^{-t}), & 0 < t < 1 \end{aligned}$$

Para  $t > 1$ , sabemos que  $v$  é da forma

$$v = Be^{-t}$$

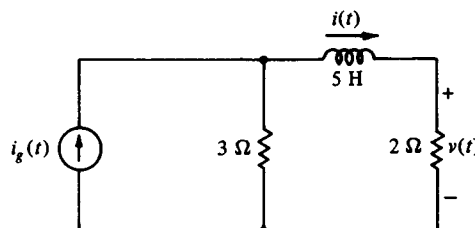


FIGURA 8.26 Circuito RL excitado por  $i_g(t)$

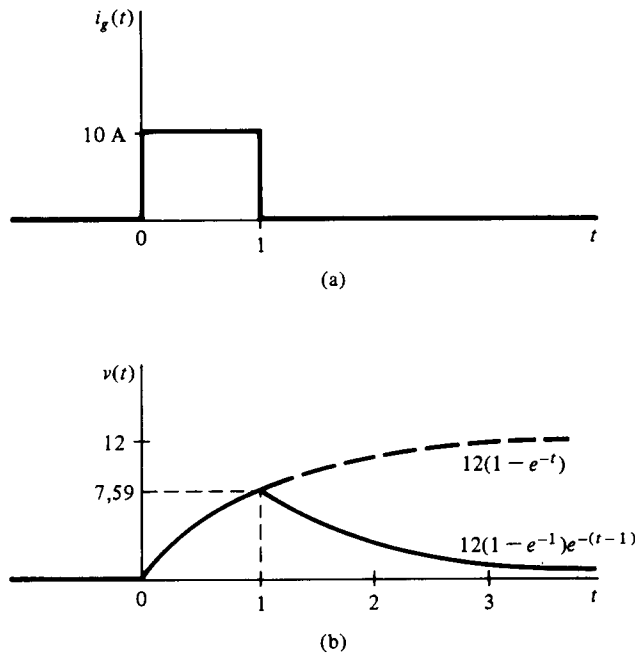


FIGURA 8.27 (a) Função de excitação  $i_g(t)$ ; (b) resposta de um circuito  $RL$  a  $i_g(t)$

Em  $t = 1^-$  (o instante imediatamente anterior a  $t = 1$ ), nossa solução para a resposta ao degrau dá

$$v(1^-) = 12(1 - e^{-1})$$

Visto que a corrente no indutor é contínua,  $v(1^-) = v(1^+)$ , onde  $1^+$  é o instante imediatamente após  $t = 1$ . Portanto,

$$v(1^+) = Be^{-1} = 12(1 - e^{-1})$$

ou

$$B = 12(1 - e^{-1})e$$

e nossa solução torna-se

$$v = 12(1 - e^{-1})e^{-(t-1)}, \quad t > 1$$

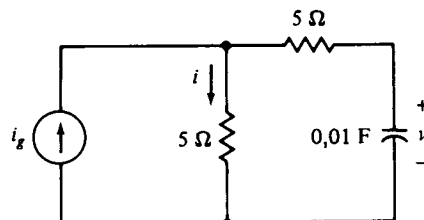
A solução para todo  $t$  pode ser escrita como

$$v(t) = 12(1 - e^{-1})[u(t) - u(t - 1)] + 12(1 - e^{-1})e^{-(t-1)}u(t - 1) \quad (8.22)$$

Um gráfico desta resposta é mostrado na Fig. 8.27(b).

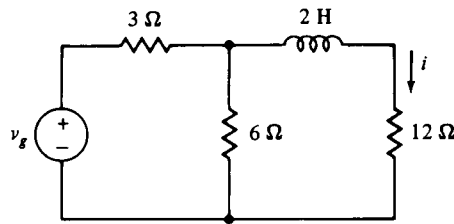
## EXERCÍCIOS

- 8.8.1 Calcule as respostas ao degrau  $i$  e  $v$  [ $i_g = u(t)$  A].  
Resposta:  $(1 - 0,5e^{-10t})u(t)$  A,  $5(1 - e^{-20t})u(t)$  V



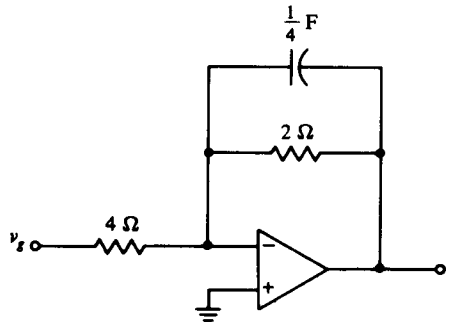
EXERCÍCIO 8.8.1

- 8.8.2** Calcule a resposta  $i$  para  $v_g = 42u(t)$  V.  
 Resposta:  $2(1 - e^{-7t})u(t)$  A



**EXERCÍCIO 8.8.2**

- 8.8.3** Calcule  $i$  no Ex. 8.8.1, se  $i_g = 10[u(t) - u(t - 1)]$  A.  
 Resposta:  $10[(1 - 0,5e^{-10t})u(t) - (1 - 0,5e^{-10(t-1)})u(t - 1)]$  A
- 8.8.4** Calcule  $v$  se  $v_g = 5e^{-t}u(t)$  V e não existe energia inicial armazenada. (Este circuito é como o integrador da Fig. 8.24, exceto que o capacitor tem um resistor em paralelo com ele, tornando-o um capacitor real, ou *com perdas*. Então o circuito é chamado um *integrador com perdas*.)  
 Resposta:  $5(e^{-2t} - e^{-t})u(t)$  V



**EXERCÍCIO 8.8.4**

## 8.9

### Aplicação da Superposição

Nesta seção iremos estudar o uso de superposição para a obtenção de soluções de circuitos  $RC$  e  $RL$  contendo duas ou mais fontes independentes.

#### EXEMPLO 8.14

Como primeiro exemplo, vamos considerar o circuito da Fig. 8.26 da seção anterior. O valor da fonte independente de corrente é dado por

$$i_g = 10u(t) - 10u(t - 1)$$

Esta fonte é equivalente a um par de fontes de corrente independentes conectadas em paralelo. Então, se fazemos

$$i_g = i_1 + i_2$$

onde  $i_1 = 10u(t)$  e  $i_2 = -10u(t - 1)$ , o circuito da Fig. 8.26 pode ser redesenhado como mostrado na Fig. 8.28.

Do princípio de superposição, podemos escrever a tensão de saída como

$$v = v_1 + v_2$$

onde  $v_1$  e  $v_2$  são as respostas devidas a  $i_1$  e  $i_2$ , respectivamente. Em nossa solução anterior, encontramos que a resposta devida ao degrau de corrente  $i_1$  foi dada por

$$v_1 = 12(1 - e^{-t})u(t)$$

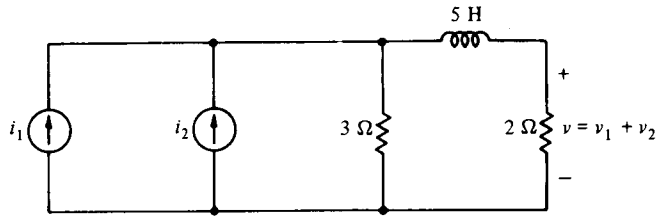


FIGURA 8.28 Circuito equivalente ao da Fig. 8.26

A seguir, necessitamos da resposta  $v_2$  devida a  $i_2$ . Notamos que  $i_2$  é simplesmente o negativo de  $i_1$  atrasado de 1 s. Portanto,  $v_2$  é obtido de  $v_1$  pela multiplicação de  $v_1$  por  $-1$  e substituindo  $t$  por  $t - 1$ . O resultado é dado por

$$v_2 = -12(1 - e^{-(t-1)})u(t - 1)$$

Nossa solução é agora dada por

$$v = 12(1 - e^{-t})u(t) - 12(1 - e^{-(t-1)})u(t - 1) \quad (8.23)$$

que é equivalente a (8.22) (Ver Ex. 8.9.1).

### EXEMPLO 8.15

Como um segundo exemplo vamos considerar a rede RC da Fig. 8.29, que contém duas fontes independentes e uma tensão inicial no capacitor  $v(0) = V_0$ . Aplicando a LKT ao redor da malha esquerda, encontramos que

$$(R_1 + R_2)i + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + V_0 = V_1 - R_2 I_1$$

Multiplicando cada termo desta equação por uma constante  $K$  temos

$$(R_1 + R_2)(Ki) + \frac{1}{C} \int_0^t (Ki) dt + KV_0 = KV_1 - R_2(KI_1)$$

Evidentemente, a resposta de corrente torna-se  $Ki$  quando as fontes independentes e a tensão inicial do capacitor são multiplicadas pelo fator  $K$ , que demonstra a propriedade da proporcionalidade para uma rede linear. Este resultado é facilmente estendido para qualquer circuito linear contendo um ou mais capacitores. Desta forma, as tensões iniciais dos capacitores podem ser consideradas como fontes de tensão independentes. De modo similar, é facilmente demonstrado que as correntes iniciais de um indutor podem ser consideradas como fontes de corrente independentes.

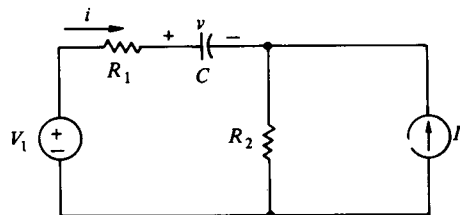


FIGURA 8.29 Rede RC

### EXEMPLO 8.16

Vamos agora empregar superposição para determinar a tensão  $v$  por meio de  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ , as respostas devidas a  $V_1$ ,  $I_1$  e  $V_0$ , respectivamente. O circuito para calcularmos  $v_1$  é mostrado na Fig. 8.30(a). Este é um circuito excitado RC simplificado, tendo uma tensão inicial zero no capacitor. A solução é dada por

$$v_1 = V_1(1 - e^{-t/(R_1+R_2)C})$$

O circuito para encontrar  $v_2$  é mostrado na Fig. 8.30(b). Este é novamente um circuito simplificado excitado tendo tensão inicial do capacitor zero, para a qual encontramos

$$v_2 = -R_2 I_1(1 - e^{-t/(R_1+R_2)C})$$

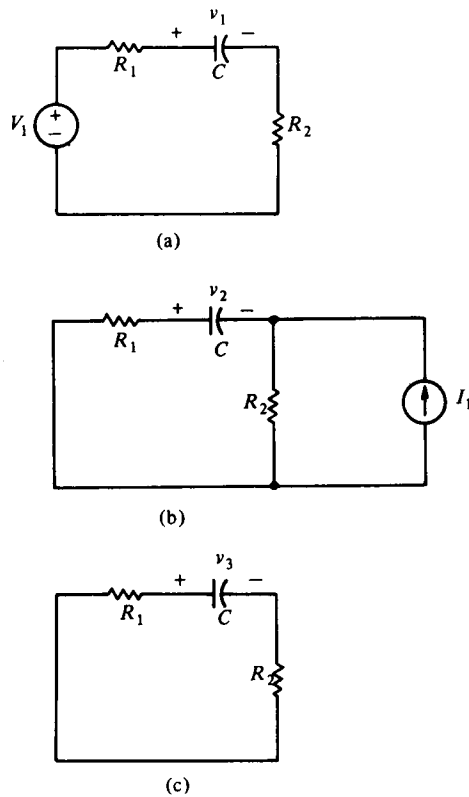


FIGURA 8.30 Circuitos para calcular (a)  $v_1$ ; (b)  $v_2$ ; (c)  $v_3$  para cada uma rede RC

No circuito da Fig. 8.30(c), a tensão  $v_3$  é simplesmente a resposta sem fontes resultante da tensão inicial do capacitor. Visto que  $v_3(0) = v_0$ , encontramos que

$$v_3 = V_0 e^{-t/(R_1+R_2)C}$$

Portanto, a resposta completa é dada por

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 + v_3 \\ &= V_1 - R_2 I_1 + (R_2 I_1 - V_1 + V_0) e^{-t/(R_1+R_2)C} \end{aligned} \quad (8.24)$$

Inspecionando nossa solução, vemos que ela consiste de uma resposta forçada  $v_f$  e uma resposta natural  $v_n$ , que poderíamos ter antecipado. Um método alternativo para encontrar a solução é obter  $v_f$  e  $v_n$ , como descrito anteriormente. A superposição pode, é claro, ser usada para encontrar  $v_f$ . No nosso caso, sabemos que

$$v_f = v_{1f} + v_{2f}$$

Da Fig. 8.30(a) e (b) vemos, por inspeção, que

$$v_{1f} = V_1$$

e

$$v_{2f} = -R_2 I_1$$

Portanto, a resposta forçada é

$$v_f = V_1 - R_2 I_1$$

A resposta natural, obtida do circuito sem fontes [Fig. 8.30(c)] é dada por

$$v_n = A e^{-t/(R_1+R_2)C}$$

Portanto,

$$v = V_1 - R_2 I_1 + A e^{-t/(R_1+R_2)C} \quad (8.25)$$



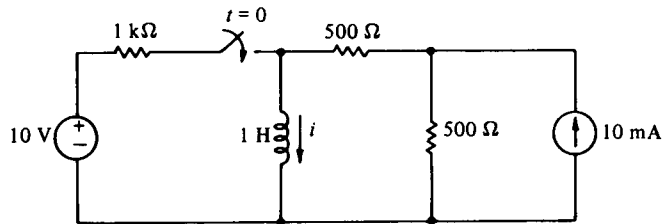
Visto que  $v(0) = V_0$ , temos

$$A = R_2 I_1 - V_1 + V_0$$

que substituída em (8.25) dá (8.24).

## EXERCÍCIOS

- 8.9.1** Reduza (8.22) à forma de (8.23).  
**8.9.2** Use a superposição para calcular  $v$  na Fig. 8.29 se  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$ ,  $C = 0,1 \text{ F}$ ,  $v(0) = 8 \text{ V}$ ,  $V_1 = 12 \text{ V}$ , e  $I_1 = 2 \text{ A}$ .  
*Resposta:*  $6 + 2e^{-2t} \text{ V}$   
**8.9.3** Use superposição para calcular  $i$  para  $t > 0$ . Assuma que o circuito está na condição de regime permanente em  $t = 0^-$ .  
*Resposta:*  $5 + 10(1 - e^{-500t}) \text{ mA}$



EXERCÍCIO 8.9.3

## 8.10

### Spice e Resposta Transitória

O SPICE, como no caso cc, é uma ferramenta muito útil para a obtenção de respostas transitórias de rede contendo elementos armazenadores de energia, tais como capacitores e indutores, e fontes de excitação que são cc, exponenciais, pulsos, senoidais, e composição linear. Como vimos nos capítulos anteriores para circuitos simplificados  $RC$  e  $RL$ , uma solução requer primeiramente a determinação das condições iniciais de todos os dispositivos armazenadores de energia no instante que se inicia a resposta transitória. A análise cc de SPICE descrita nos capítulos anteriores pode ser usada para determinar as condições iniciais se o circuito está em regime permanente antes de iniciar a resposta transitória, que ocorre, por exemplo, como resultado da atuação de uma chave. O SPICE pode então ser usado para simular a resposta imediatamente após a ação de chaveamento usando estes valores iniciais. Antes de procedermos à discussão subsequente, é recomendado que as declarações  $C$  e  $L$  e os comandos  $.PLOT$  e  $.TRAN$  do Apêndice E sejam revistos.

### EXEMPLO 8.17

Como um exemplo, considere calcular e plotar a tensão do capacitor para o circuito da Fig. 8.31(a) para o primeiro intervalo de 75-ms após a ação de chaveamento em  $t = 0$ . Imediatamente antes da ativação das chaves, vamos considerar que o circuito está na condição de regime permanente cc como mostrado na Fig. 8.31(b). Um arquivo de circuito "SPICE" para a determinação da tensão inicial no capacitor é

CONDIÇÕES INICIAIS PARA A FIG. 8.31(b)

\* Declaração de dados

V1 1 0 DC -12

R1 1 2 5K

R2 2 3 20K

R4 3 0 10K

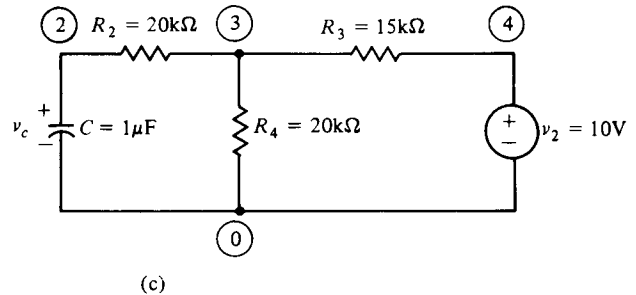
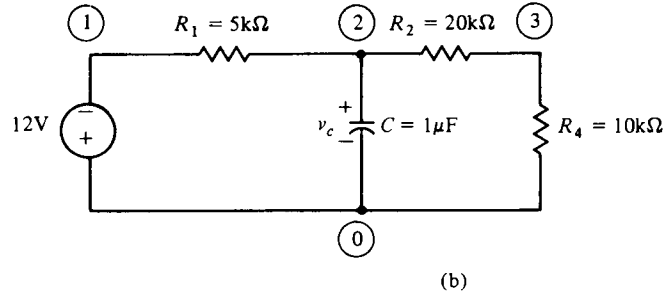
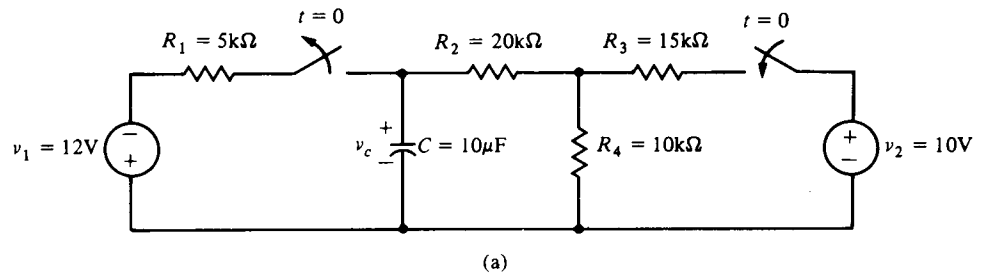
C 2 0 1E-6

\* Declaração de controle da solução

\* Declaração de controle da saída

.PRINT DC V(C)

.END



**FIGURA 8.31** (a) Circuito RC; (b) redesenhado em  $t = 0$  em regime permanente cc; (c) redesenhado em  $t = 0^+$  para a resposta transitória

O arquivo de saída dá a tensão inicial do capacitor de  $-10,29$  V. Um arquivo de circuito pode agora ser escrito para a resposta transitória usando este valor inicial para o circuito da Fig. 8.31(c). Suponha que desejamos a resposta no intervalo 10-ms dos primeiros 75-ms. Um arquivo de circuito é

```

RESPOSTA TRANSITÓRIA PARA A FIGURA 8.31(c)
* Declaração de dados
R2 2 3 20K
R3 3 4 15K
R4 3 0 10K
C 2 0 1E-6 IC=-10.29
V2 4 0 DC 10
* Declaração de controle da solução para a resposta transitória
.TRAN 5MS 75MS UIC
* Declaração de controle da saída para imprimir e plotar a resposta
.PRINT TRAN V(C)
.PLOT TRAN V(C)
.END

```

O gráfico impresso por este programa é mostrado na Fig. 8.32.

No Exemplo 8.17, a fonte de tensão  $v_2$  tem um valor cc de 10 V. O SPICE prevê uma variedade de outras excitações para respostas transitórias, tais como os exemplos dados na Tabela 8.1.

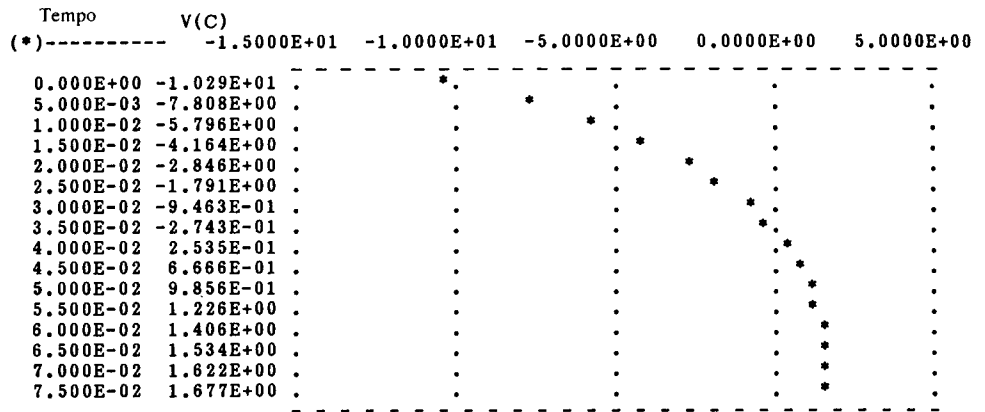


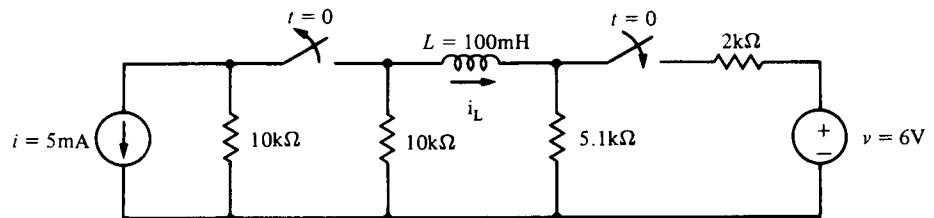
FIGURA 8.32 Resposta transitória para o circuito da Fig. 8.31

TABELA 8.1 Exemplos de excitações para  $v_2$  da Fig. 8.31, no intervalo de  $0 < t < 0,1$  s

$v_2$	Declarações SPICE
$10e^{-10t}$ V	V2 4 0 EXP(10V 0V 0S 0.1S 1S)
$10 [u(t) - u(t - 0,02)]$ V	V2 4 0 PULSE (10V 0V 0.02S 0S 0.1S)
$100t$ V	V2 4 0 PWL(0S 0V 0.1S 10V)
$10 \text{ sen } [2\pi(2,5t)]$ V	V2 4 0 SIN(0V 10V 2.5HZ)

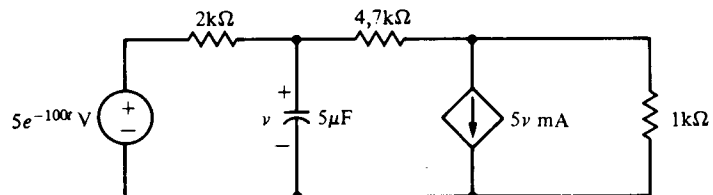
## EXERCÍCIOS

- 8.10.1 Usando SPICE, calcule (a)  $i_L(0^-)$ ; (b) um gráfico de  $i_L$  para  $0 < t < 30 \mu\text{s}$ .  
Resposta: 2,475mA



EXERCÍCIO 8.10.1

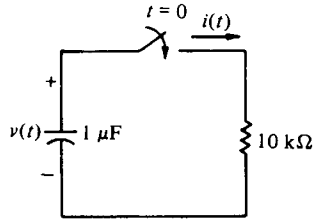
- 8.10.2 Repita o Ex. 8.10.1 se  $v = 5 \times 10^5$  V.  
8.10.3 Plote  $v$  para  $0 < t < 10$  ms se  $v(0) = 10$  V.



EXERCÍCIO 8.10.3

## PROBLEMAS

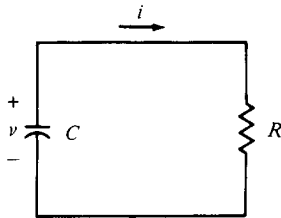
8.1 Calcule  $v(t)$  para  $t > 0$  se  $v(0^-) = 10$  V.



PROBLEMA 8.1

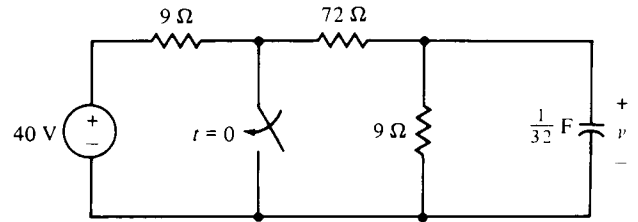
8.2 Calcule  $i(t)$  para  $t > 0$  no Prob. 8.1, se a energia inicial armazenada é  $w_C(0) = 8 \mu\text{J}$ .

8.3 (a) Determine  $R$ ,  $C$ , e a energia inicial ( $t = 0$ ), no circuito  $RC$  série, se  $v = 8e^{-5t}$  V e  $i = 20e^{-5t}$   $\mu\text{A}$ . (b) Calcule a porcentagem da energia inicial, que é dissipada no resistor para  $t > 100$  ms.



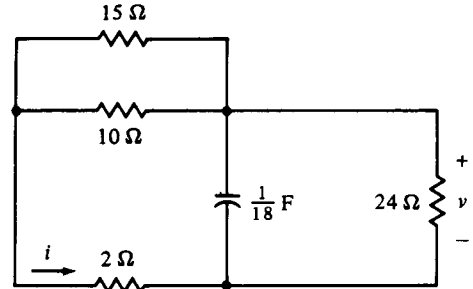
PROBLEMA 8.3

8.4 Se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ , calcule  $v$  para  $t > 0$ .



PROBLEMA 8.4

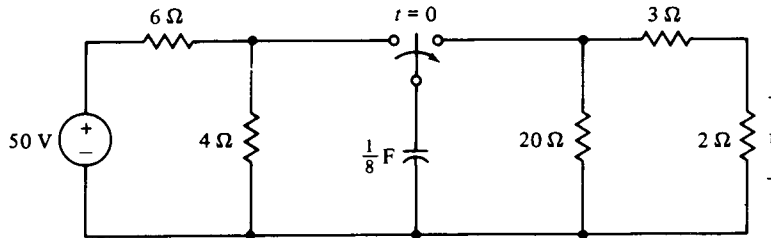
8.5 Calcule  $v$  e  $i$  para  $t > 0$  se  $i(0) = 1$  A.



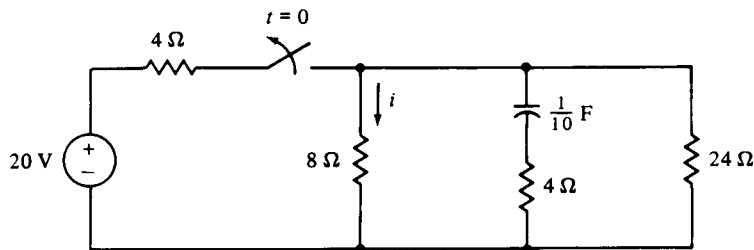
PROBLEMA 8.5

8.6 Se um circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ , calcule  $v$  para  $t > 0$ .

8.7 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .

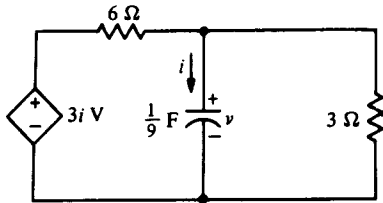


PROBLEMA 8.6



PROBLEMA 8.7

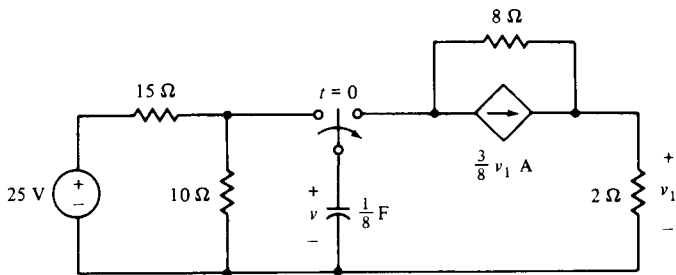
8.8 Calcule  $i$  para  $t > 0$  se  $v(0) = 6$  V.



PROBLEMA 8.8

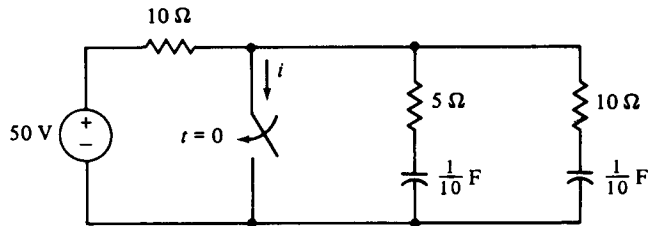
8.9 Considere um circuito sem fontes que tem uma resposta  $v(t) = V_0 e^{-t/\tau}$ . Mostre que uma linha reta que é tangente ao gráfico desta resposta no tempo  $t_1$  intercepta o eixo de tempo (abscissa) no tempo  $t_1 + \tau$ . (Note que a Fig. 8.7 é o caso  $t_1 = 0$ .)

8.10 Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .



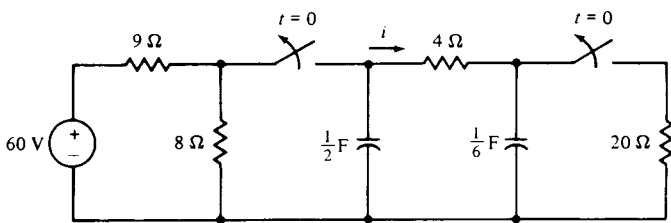
PROBLEMA 8.10

8.11 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .



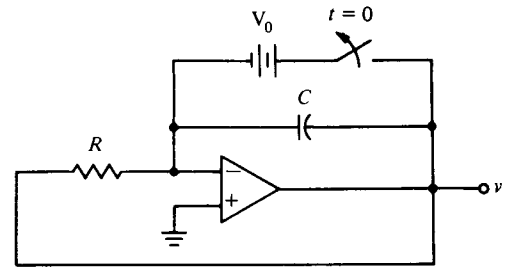
PROBLEMA 8.11

8.12 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .



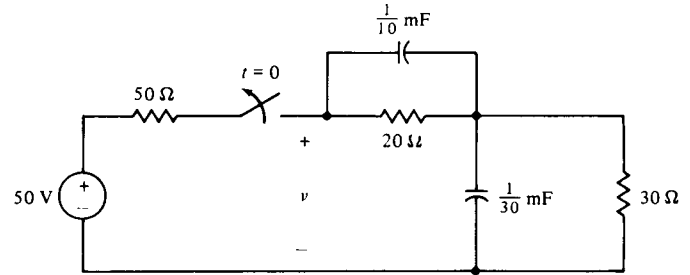
PROBLEMA 8.12

8.13 (a) Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ . (b) Repita a parte (a) se um resistor  $R_1$  é colocado em série com a fonte  $V_0$ .



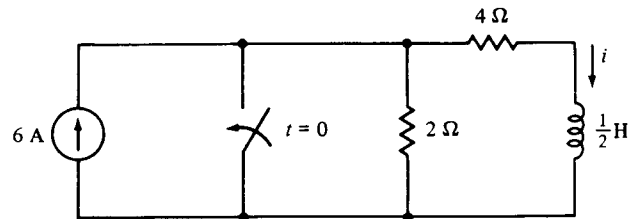
PROBLEMA 8.13

8.14 Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .



PROBLEMA 8.14

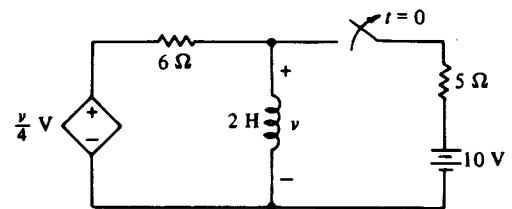
8.15 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .



PROBLEMA 8.15

8.16 Em um circuito  $RL$  série sem fontes, a corrente é  $i = 8e^{-5t}$  A e a tensão sobre o resistor é  $v = 32e^{-5t}$  V. Se a corrente entra pelo terminal positivo da tensão, calcule  $R$ ,  $L$ , e a energia inicial (em  $t = 0$ ).

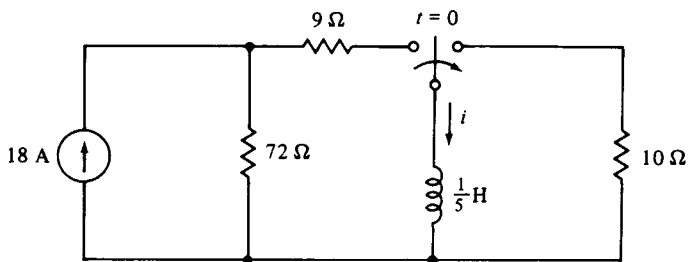
8.17 O circuito mostrado está em regime permanente cc em  $t = 0$ . Calcule  $v$  para  $t > 0$ .



PROBLEMA 8.17

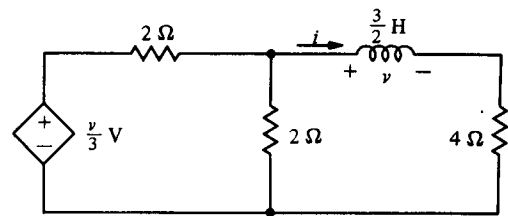
8.18 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .

8.19 Calcule  $v$  e  $i$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .

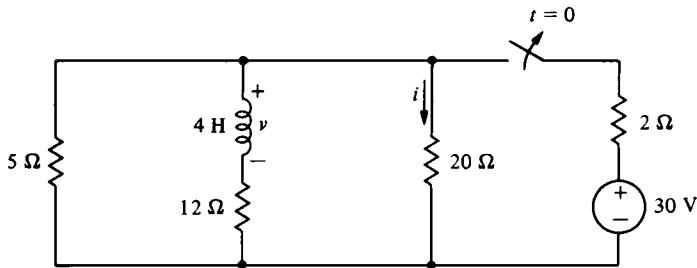


PROBLEMA 8.18

8.23 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se  $i(0) = 2$  A.

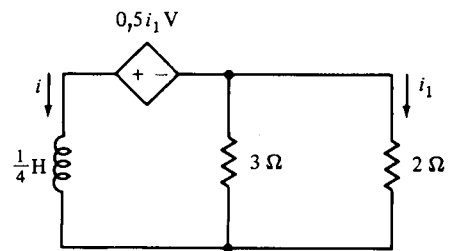


PROBLEMA 8.23



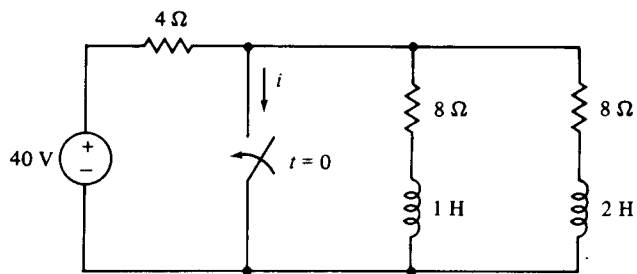
PROBLEMA 8.19

8.24 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se  $i(0) = 5$  A.



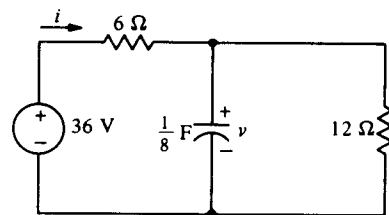
PROBLEMA 8.24

8.20 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .



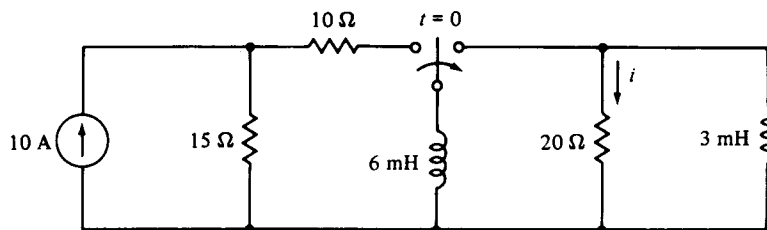
PROBLEMA 8.20

8.25 Calcule  $i$  e  $v$  para  $t > 0$ , se  $v(0) = -6$  V.



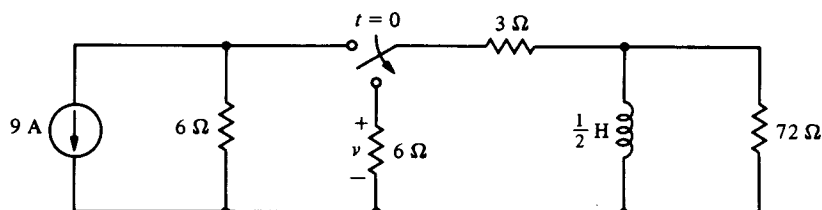
PROBLEMA 8.25

8.21 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .



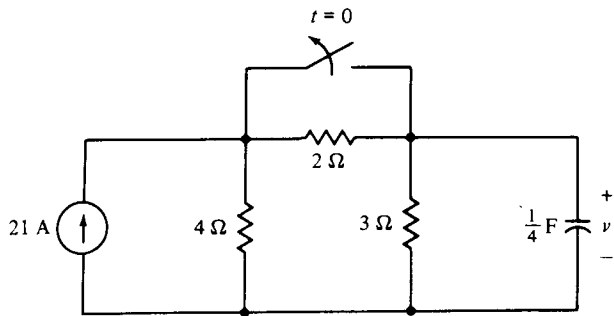
PROBLEMA 8.21

8.22 Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .



PROBLEMA 8.22

8.26 Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .



PROBLEMA 8.26

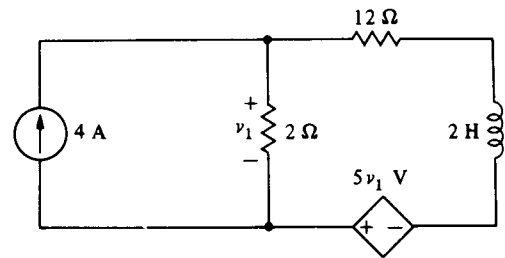
8.27 Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .

8.28 Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .

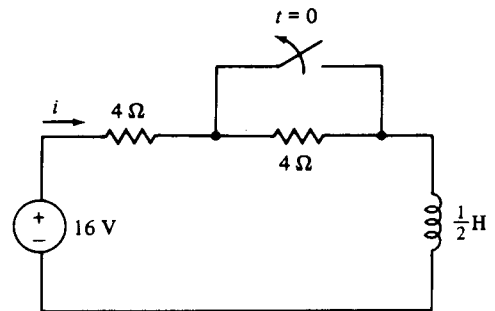
8.29 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .

8.30 Calcule  $v_1$  para  $t > 0$ , se não existe energia inicial armazenada.

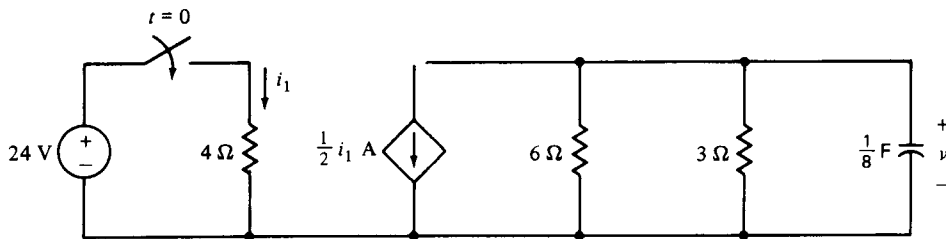
8.31 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .



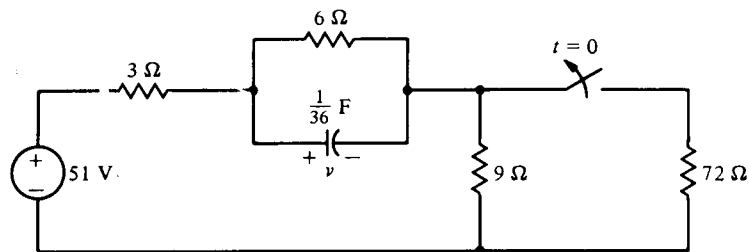
PROBLEMA 8.30



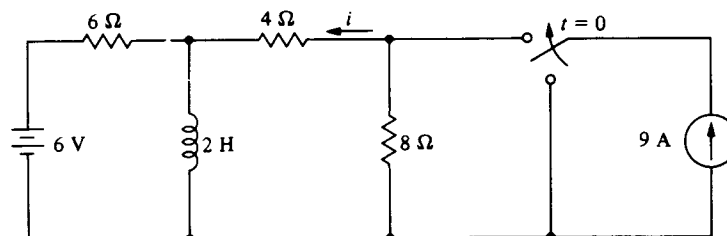
PROBLEMA 8.31



PROBLEMA 8.27

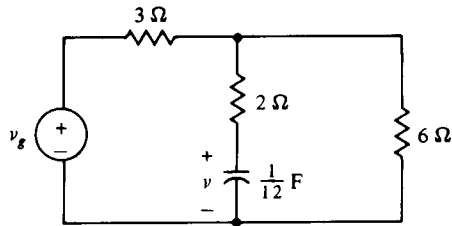


PROBLEMA 8.28



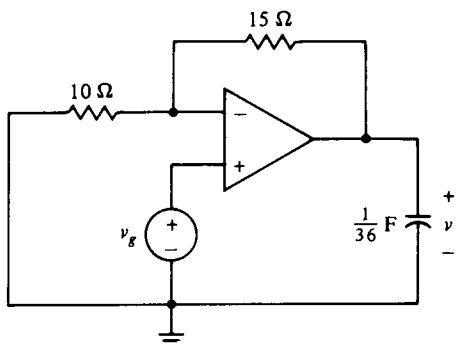
PROBLEMA 8.29

- 8.32 Repita o Prob. 8.25, se a fonte de 36-V é substituída por uma de  $36e^{-3t}$ -V com a mesma polaridade.
- 8.33 Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se  $v(0) = 2$  V e (a)  $v_g = 4$  V, (b)  $v_g = 6e^{-t}$  V e (c)  $v_g = 6e^{-3t}$  V.



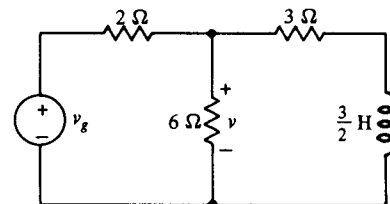
PROBLEMA 8.33

- 8.34 Calcule, para  $t > 0$ , a corrente que entra para baixo no capacitor, se  $v(0) = 0$ , e (a)  $v_g = 4$  V, (b)  $v_g = 2e^{-2t}$  V, e (c)  $v_g = 2 \cos 2t$  V.

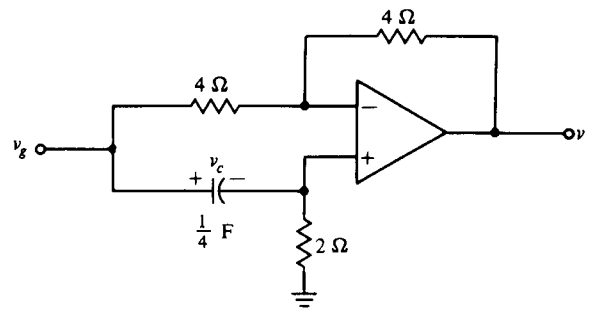


PROBLEMA 8.34

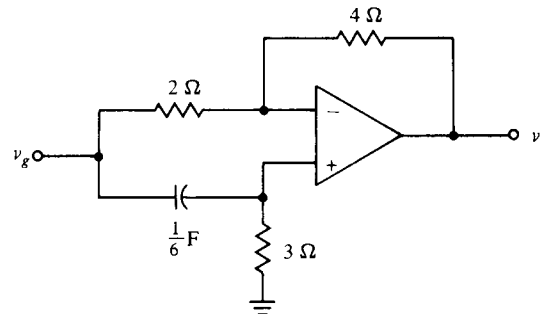
- 8.35 Calcule  $v$  e  $i$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .
- 8.36 Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se  $v_g = 2e^{-3t}$  V e  $v_c(0) = 0$ .
- 8.37 Calcule  $v$ , se  $v_g = 2e^{-3t}u(t)$  V.
- 8.38 Calcule  $v$  para todo  $t$ , se (a)  $v_g = 12u(t)$  V e (b)  $v_g = 12[u(t) - u(t-1)]$  V.
- 8.39 Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se  $v_g = 3u(t)$  V.
- 8.40 Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se  $v_1(0) = 0$  e  $v_g = 12u(t)$  V.



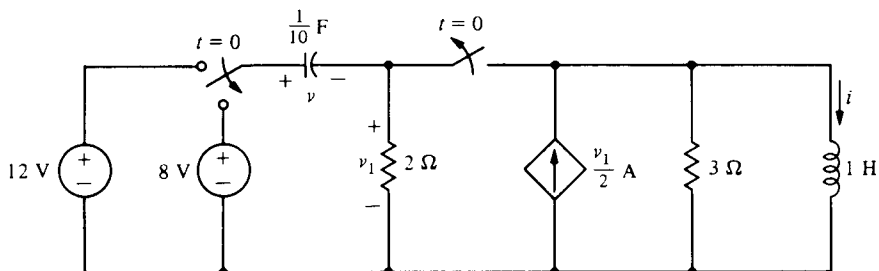
PROBLEMA 8.38



PROBLEMA 8.36

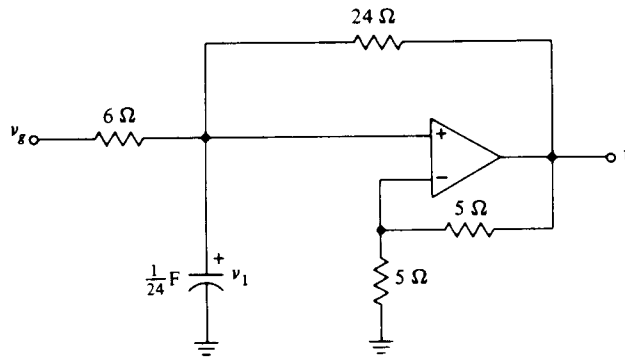


PROBLEMA 8.37

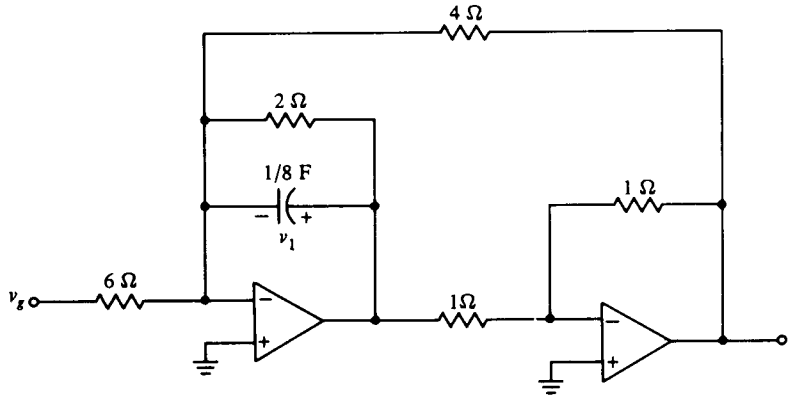


PROBLEMA 8.35





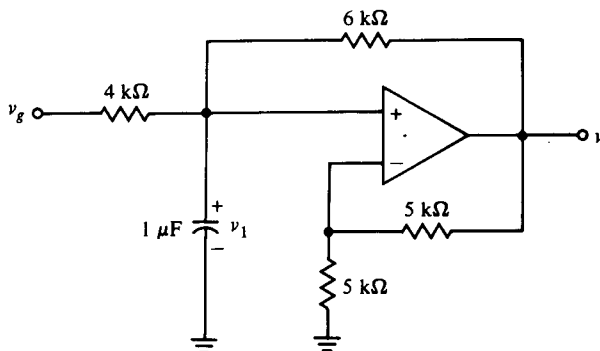
PROBLEMA 8.39



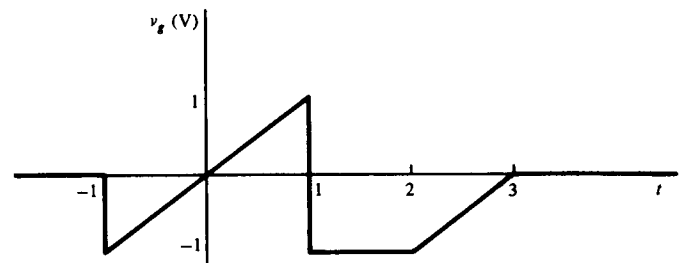
PROBLEMA 8.40

## PROBLEMAS DE APLICAÇÃO DE COMPUTADORES

- 8.41 Use SPICE para resolver o Prob. 8.19; (b) o Prob. 8.28; (c) o Prob. 8.35.
- 8.42 Use SPICE para plotar a tensão de saída  $v$  no intervalo  $0 < t < 0,01$  s se  $v_g = 10 \text{ sen } 1000\pi t$  V e  $v_1(0) = 4$  V.
- 8.43 Use SPICE para plotar a tensão de saída do circuito do Prob. 8.40 para  $v_g$  como mostrado. Plote para o intervalo  $0 < t < 4$  s. (Sugestão: substitua  $t$  por  $t + 1$  em  $v_g$  para a aplicação do SPICE.)



PROBLEMA 8.42



PROBLEMA 8.43



# 9

## Circuitos de Segunda Ordem

---

*O que Deus fabricou! [A famosa mensagem enviada no primeiro telégrafo]*

*Samuel F. B. Morse*

---

A primeira aplicação prática da eletricidade é tida por muitos como sendo o telégrafo, desenvolvido por Samuel F. B. Morse, um americano, inventor e pintor retratista. Morse construiu seu telégrafo baseado nas idéias do famoso físico americano Joseph Henry, usando relés abertos e fechados para produzir pontos e barras (ou código Morse) que representam letras e números.

Morse nasceu em Charlestown, Massachusetts, EUA, filho de um ministro e escritor. Estudou para ser artista em Yale e na Royal Academy of Arts, em Londres, e por volta de 1815 era considerado relativamente bem-sucedido. Em 1826, ajudou a fundar a National Academy of Design, tornando-se seu primeiro presidente. Mas, no ano anterior sua esposa falecera; em 1826 morreu seu pai e em 1828 sua mãe. No ano seguinte, o angustiado Morse vai para a Europa se recuperar e estudar. Em 1832, quando voltava para casa, a bordo do navio de passageiros *Sully*, encontrou um excêntrico inventor, ficando intrigado com o desenvolvimento de um telégrafo, cujo princípio já fora considerado por Henry. Em 1836, Morse construiu um modelo e em 1837 conseguiu um sócio, Alfred Vail, que financiou o projeto. Seus esforços foram recompensados com uma patente e o financiamento, pelo Congresso, de um telégrafo em 1844, pelo qual Morse — em 24 de maio de 1844 — enviou sua agora famosa mensagem “O que Deus fabricou!” ■

No caso de circuitos lineares com elementos armazenadores de energia, as equações representativas que relacionam a saída à entrada podem ser expressas como equações diferenciais lineares, porque a relação entre os elementos é tal que os termos em equações de laço e de nós são derivados, integrais ou múltiplos de incógnitas e fontes variáveis. Evidentemente, uma simples derivação de uma equação irá remover quaisquer integrais que ela possa conter, de forma que, em geral, as equações de laços ou de nós para um dado circuito podem ser consideradas como sendo equações diferenciais. A equação representativa pode ser então obtida destas equações.

Os circuitos contendo elementos armazenadores de energia que temos considerado até aqui foram circuitos de primeira ordem. Isto é, são descritos por equações diferenciais de primeira ordem. Este é sempre o caso onde um único elemento armazenador está presente ou quando uma ação de chaveamento converte o circuito em dois ou mais circuitos independentes, cada um contendo não mais de um elemento armazenador.

Neste capítulo iremos estudar circuitos de segunda ordem, que, como iremos ver, contêm dois elementos armazenadores de energia e têm equações representativas que são equações diferenciais de segunda ordem. Em geral, circuitos de enésima ordem, contendo  $n$  elementos armazenadores, são descritos por equações diferenciais de enésima ordem. Os resultados para circuitos de primeira e segunda ordem ( $n = 1$  e  $n = 2$ ) podem ser imediatamente estendidos para o caso geral, mas não iremos fazer isto aqui. Contudo, uma solução de uma equação diferencial de terceira ordem é indicada no Prob. 9.39, que pode ser usado para resolver o circuito de terceira ordem dado no Prob. 9.40. Circuitos da ordem superior serão tratados no Capítulo 14.

Outro método, excelente, de solução de circuitos de ordem elevada, bem como os de primeira e de segunda ordem, é o método da transformada de Laplace, dado no Capítulo 18. Um leitor interessado pode ir diretamente a este capítulo sem precisar estudar os capítulos intermediários.

## 9.1

### Circuitos com Dois Elementos Armazenadores

Para introduzir o conceito de circuitos de *segunda ordem*, vamos começar com o circuito da Fig. 9.1, onde a saída a ser calculada é a corrente de malha  $i_2$ . O circuito contém dois elementos armazenadores, os indutores e, como veremos,  $i_2$  satisfaz uma equação diferencial de segunda ordem. Métodos para solução de tais equações serão considerados nas seções posteriores deste capítulo.

As equações de malha da Fig. 9.1 são dadas por

$$\begin{aligned} 2 \frac{di_1}{dt} + 12i_1 - 4i_2 &= v_g \\ -4i_1 + \frac{di_2}{dt} + 4i_2 &= 0 \end{aligned} \tag{9.1}$$

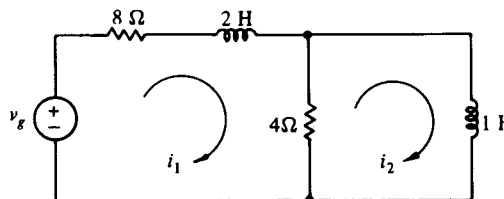


FIGURA 9.1 Circuito com dois indutores

Da segunda, temos

$$i_1 = \frac{1}{4} \left( \frac{di_2}{dt} + 4i_2 \right) \quad (9.2)$$

que diferenciada resulta em

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{4} \left( \frac{d^2i_2}{dt^2} + 4 \frac{di_2}{dt} \right) \quad (9.3)$$

Substituindo (9.2) e (9.3), na primeira equação de (9.1) para eliminar  $i_1$ , temos, após multiplicarmos a equação resultante por 2,

$$\frac{d^2i_2}{dt^2} + 10 \frac{di_2}{dt} + 16i_2 = 2v_g \quad (9.4)$$

A equação representativa da saída  $i_2$  é então uma equação diferencial de *segunda ordem*. Isto é, ela é uma equação diferencial cuja mais alta derivada é de segunda ordem. Por esta razão iremos nos referir à Fig. 9.1 como um circuito de *segunda ordem* e notar que, normalmente, circuitos de segunda ordem contêm dois elementos armazenadores de energia.

Contudo, há exceções à regra de que circuitos com dois elementos armazenadores são caracterizados por equações de segunda ordem. Por exemplo, vamos considerar o circuito da Fig. 9.2, que tem dois capacitores. Com o nó de referência escolhido como indicado, as equações nodais dos nós rotulados  $v_1$  e  $v_2$  são dadas por

$$\frac{dv_1}{dt} + v_1 = v_g \quad (9.5)$$

$$\frac{dv_2}{dt} + 2v_2 = 2v_g$$

A escolha das tensões de nó  $v_1$  e  $v_2$  como incógnitas resulta em duas equações diferenciais de primeira ordem, cada uma contendo somente uma das incógnitas. Quando isto acontece, dizemos que as equações estão *desacopladas*, e então nenhum procedimento de eliminação é necessário para separar as variáveis. Foi o procedimento de eliminação que, aplicado a (9.1), deu a equação de segunda ordem (9.4). As equações (9.5) podem ser resolvidas separadamente pelos métodos dos capítulos anteriores.

Evidentemente, a Fig. 9.2., embora contenha dois elementos armazenadores de energia, não é um circuito de segunda ordem. A mesma tensão  $v_g$  aparece sobre cada associação RC e então o circuito pode ser redesenhado como dois circuitos de primeira ordem. Se a fonte fosse real em lugar de uma fonte ideal, então o circuito seria um circuito de segunda ordem (Ver Prob. 9.1).

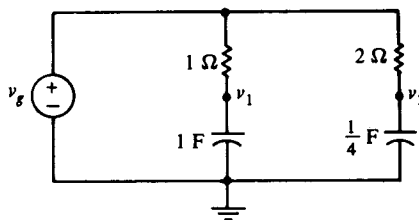


FIGURA 9.2 Circuito com dois capacitores

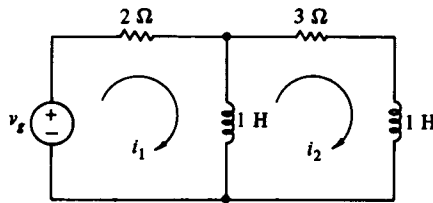
## EXERCÍCIOS

- 9.1.1 Calcule a equação que satisfaz a corrente de malha  $i_2$

Resposta:  $\frac{d^2i_2}{dt^2} + 7 \frac{di_2}{dt} + 6i_2 = \frac{dv_g}{dt}$

- 9.1.2 Assuma  $v_g = 14e^{-2t}$  V,  $i_1(0^+) = 6$  A e  $i_2(0^+) = 2$  A no Ex. 9.1.1, e calcule  $di_2(0^+)/dt$  (o valor de  $di_2/dt$  em  $t = 0^+$ ).

Resposta:  $-4$  A/s



EXERCÍCIO 9.1.1

9.1.3 Para os valores de  $i_2(0^+)$ ,  $di_2(0^+)/dt$  e  $v_g$  dados no Ex. 9.1.2, mostre que  $i_2$  no Ex. 9.1.1 é dado por

$$i_2 = -4e^{-t} + 7e^{-2t} - e^{-6t} \text{ A}$$

(Sugestão: Substitua a resposta na equação diferencial, etc.)

## 9.2

### Equações de Segunda Ordem

No Capítulo 8 consideramos os circuitos de primeira ordem com algum detalhe e vimos que suas equações representativas são equações diferenciais de primeira ordem da forma

$$\frac{dx}{dt} + a_0x = f(t) \quad (9.6)$$

Na Seç. 9.1 definimos circuitos de segunda ordem como aqueles que têm dois elementos armazenadores, com equações representativas que são equações diferenciais de segunda ordem, dadas genericamente por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = f(t) \quad (9.7)$$

Em (9.6) e (9.7) os  $a$ 's são constantes reais,  $x$  pode ser ou uma tensão ou uma corrente e  $f(t)$  é uma função conhecida das fontes independentes.

Como um exemplo, para o circuito da Fig. 9.1, a equação representativa era (9.4). Comparando esta equação com (9.7) vemos que  $a_1 = 10$ ,  $a_0 = 16$ ,  $f(t) = 2v_g$  e  $x = i_2$ .

Do Capítulo 8 sabemos que a resposta completa satisfazendo (9.6) é dada por

$$x = x_n + x_f \quad (9.8)$$

onde  $x_n$  é resposta natural obtida quando  $f(t) = 0$  e  $x_f$  é a resposta forçada, que satisfaz (9.6). A resposta forçada, em contraste com a resposta natural, não contém constantes arbitrárias.

Vejamus se o mesmo procedimento é aplicável à equação de segunda ordem (9.7). Por uma solução de (9.7) queremos dizer uma função  $x$  que satisfaça (9.7). Isto é, quando  $x$  é substituído em (9.7), o membro da esquerda torna-se idêntico a  $f(t)$ . Desejamos também que  $x$  contenha duas constantes arbitrárias visto que devemos ser capazes de satisfazer as duas condições impostas pela energia inicial armazenada nos dois elementos armazenadores.

Se  $x_n$  é a resposta natural, i.e., a resposta quando  $f(t) = 0$ , então ela deve satisfazer a equação

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} + a_1\frac{dx_n}{dt} + a_0x_n = 0 \quad (9.9)$$

Visto que cada termo contém  $x_n$  no mesmo grau, ou seja, um (membro da direita pode ser pensado como  $0 = 0x_n$ ), esta equação é chamada algumas vezes de equação *homogênea*.

Se  $x_f$  é para satisfazer a equação original, como ocorreu no caso de primeira ordem, então, por (9.7) devemos ter

$$\frac{d^2x_f}{dt^2} + a_1\frac{dx_f}{dt} + a_0x_f = f(t) \quad (9.10)$$

Somando (9.9) e (9.10) e rearranjando os termos, podemos escrever

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_n + x_f) + a_1\frac{d}{dt}(x_n + x_f) + a_0(x_n + x_f) = f(t) \quad (9.11)$$

O rearranjo é possível, é claro, porque as equações envolvidas são lineares.

Comparando (9.7) e (9.11), vemos que (9.8) é nossa solução, como foi no caso de primeira ordem. Isto é,  $x$  satisfazendo (9.7) tem duas componentes, a resposta natural  $x_n$  satisfazendo a equação homogênea (9.9) e a resposta forçada  $x_f$  satisfazendo a equação original (9.10) ou (9.7). Como veremos, a resposta natural irá conter duas constantes arbitrárias e, como no caso de primeira ordem, a resposta forçada não terá constantes arbitrárias. Iremos considerar métodos para calcular as respostas natural e forçada nas próximas três seções.

Certamente, se as funções de excitação são tais que  $f(t) = 0$  em (9.7), então a resposta forçada é zero, e a solução da equação diferencial é simplesmente a resposta natural.

Um leitor que teve um curso de equações diferenciais irá notar que a resposta natural e a resposta forçada também são chamadas, respectivamente, de solução complementar e solução particular. A solução complementar contém as constantes arbitrárias e a solução particular, como o próprio nome diz, não contém constantes arbitrárias.

---

## EXERCÍCIOS

9.2.1 Mostre que

$$x_1 = A_1 e^{-2t}$$

e

$$x_2 = A_2 e^{-3t}$$

são soluções de

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0$$

independentemente do valor das constantes  $A_1$  e  $A_2$ .

9.2.2 Mostre que

$$x = x_1 + x_2 = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t}$$

também é uma solução da equação diferencial do Ex. 9.2.1

9.2.3 Mostre que se o membro da direita da equação diferencial do Ex. 9.2.1 é alterado de 0 para 12, então

$$x = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t} + 2$$

é uma solução. Então a resposta natural é  $A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t}$  e a resposta forçada é 2.

---

## 9.3

### A Resposta Natural

A resposta natural  $x_n$  da solução geral

$$x = x_n + x_f$$

de (9.7) deve satisfazer a equação homogênea, que repetimos como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \quad (9.12)$$

Evidentemente, a solução  $x = x_n$  deve ser uma função que não muda de forma quando é diferenciada. Isto é, a função, sua primeira derivada e sua segunda derivada devem todas ter a mesma forma, porque, por outro lado, a combinação no lado esquerdo da equação não pode se tornar zero para todo  $t$ .

Somos, portanto, levados a *tentar*

$$x_n = A e^{st} \quad (9.13)$$

visto que esta é a única função que mantém sua forma quando é repetidamente diferenciada. Isto é,

certamente, a mesma função que trabalhou tão bem para nós no caso de primeira ordem do Capítulo 8. Também, como no caso de primeira ordem,  $A$  e  $s$  são constantes a serem determinadas.

Substituindo (9.13) para  $x$  em (9.12) temos

$$As^2 e^{st} + Asa_1 e^{st} + Aa_0 e^{st} = 0$$

ou

$$Ae^{st}(s^2 + a_1s + a_0) = 0$$

Visto que  $Ae^{st}$  não pode ser zero, [porque então, por (9.13)  $x_n = 0$ , e não podemos satisfazer qualquer condição inicial de energia armazenada], temos

$$s^2 + a_1s + a_0 = 0 \quad (9.14)$$

Esta equação é chamada de *equação característica* e é simplesmente o resultado da troca das derivadas em (9.12) por potências de  $s$ . Ou seja,  $x$ , a derivada de ordem zero, é trocada por  $s^0$ , a primeira derivada por  $s^1$  e a segunda derivada por  $s^2$ .

Visto que (9.14) é uma equação quadrática, não temos apenas uma solução, como no caso de primeira ordem, mas duas soluções, ditas  $s_1$  e  $s_2$ , dadas por uma fórmula quadrática como

$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \quad (9.15)$$

Portanto, temos duas componentes naturais da forma (9.13), que representamos por

$$\begin{aligned} x_{n1} &= A_1 e^{s_1 t} \\ x_{n2} &= A_2 e^{s_2 t} \end{aligned} \quad (9.16)$$

Os coeficientes  $A_1$  e  $A_2$  são, certamente, arbitrários. Qualquer das duas soluções (9.16) irá satisfazer a equação homogênea, porque substituindo uma das duas em (9.12), a reduz a (9.14).

Realmente, como (9.12) é uma equação linear, a *soma* das soluções (9.16) é também uma solução. Ou seja,

$$x_n = x_{n1} + x_{n2} \quad (9.17)$$

é uma solução de (9.12). Para vermos isto, temos somente que substituir a expressão para  $x_n$  em (9.12). Isto resulta em

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(x_{n1} + x_{n2}) + a_1 \frac{d}{dt}(x_{n1} + x_{n2}) + a_0(x_{n1} + x_{n2}) \\ = \left( \frac{d^2 x_{n1}}{dt^2} + a_1 \frac{dx_{n1}}{dt} + a_0 x_{n1} \right) + \left( \frac{d^2 x_{n2}}{dt^2} + a_1 \frac{dx_{n2}}{dt} + a_0 x_{n2} \right) \\ = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

visto que tanto  $x_{n1}$  como  $x_{n2}$  satisfazem (9.12).

De (9.16) e (9.17) temos

$$x_n = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (9.18)$$

que é uma solução mais geral (exceto se  $s_1 = s_2$ ) que qualquer das equações de (9.16). Na realidade (9.18) é chamada a *solução geral* da equação homogênea se  $s_1$  e  $s_2$  são raízes *distintas* (i. é., não iguais) da equação característica (9.14).

## EXEMPLO 9.1

Como um exemplo, a equação homogênea correspondente a (9.4) na seção anterior é dada por

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + 10 \frac{di_2}{dt} + 16i_2 = 0 \quad (9.19)$$

e logo a equação característica é

$$s^2 + 10s + 16 = 0$$

As raízes são  $s = -2$  e  $s = -8$ , tal que a solução geral é dada por

$$i_2 = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-8t} \quad (9.20)$$

O leitor pode verificar por substituição direta que (9.20) satisfaz (9.19) independentemente dos valores das constantes arbitrárias.

Porque (9.18) é a resposta natural, os números  $s_1$  e  $s_2$  são às vezes chamados de *freqüências naturais* do circuito. Evidentemente, elas têm a mesma função que as recíprocas negativas das constantes de tempo consideradas no Capítulo 8. Existem, certamente, duas constantes de tempo no caso de segunda ordem, ao invés de uma, como no caso de primeira ordem. Por exemplo, as freqüências naturais do circuito da Fig. 9.1 são  $s = -2$  e  $s = -8$ , como mostrado em (9.20); as constantes de tempo dos dois termos são então  $1/2$  e  $1/8$ .

A unidade de freqüência natural, que é o inverso da constante de tempo, é o recíproco do segundo. Isto é, ela é uma quantidade adimensional dividida por segundos. Portanto,  $st$  é adimensional, como deve ser em  $e^{st}$ .

## EXERCÍCIOS

**9.3.1** Dada a equação diferencial *linear*

$$(t - 1) \frac{d^2 x}{dt^2} + (t - 2) \frac{dx}{dt} = 0$$

mostre que  $x_1 = te^{-t}$ ,  $x_2 = 1$ , e  $x_1 + x_2$  são soluções.

**9.3.2** Dada a equação diferencial *não linear*

$$x \frac{d^2 x}{dt^2} - t \frac{dx}{dt} = 0$$

mostre que  $x_1 = t^2$  e  $x_2 = 1$  são soluções mas  $x_1 + x_2$  *não* é uma solução.

**9.3.3** Dado

(a)  $\frac{d^2 x}{dt^2} + 7 \frac{dx}{dt} + 10x = 0$

(b)  $\frac{d^2 x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 4x = 0$

calcule a equação característica e as freqüências naturais em cada caso.

Resposta: (a)  $-2, -5$ ; (b)  $-2, -2$

## 9.4

### Tipos de Freqüências Naturais

Visto que freqüências naturais de um circuito de segunda ordem são as raízes de uma equação quadrática característica, elas podem ser números reais, imaginários ou complexos. A natureza das raízes é determinada pelo discriminante  $a_1^2 - 4a_0$  de (9.15), que pode ser positivo (correspondendo a raízes reais e distintas), negativo (raízes complexas) ou zero (raízes reais e iguais).

### EXEMPLO 9.2

Por exemplo, considere o circuito da Fig. 9.3, onde a resposta a ser encontrada é a tensão  $v$ . Para variar, ao invés de escrever as equações nodais ou as de laços, vamos misturar as duas. A equação nodal para o nó  $a$  é

$$\frac{v - v_g}{4} + i + \frac{1}{4} \frac{dv}{dt} = 0$$



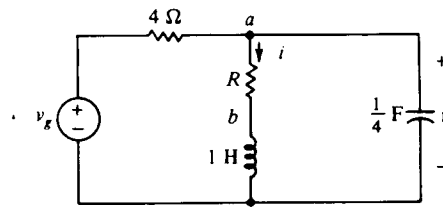


FIGURA 9.3 Circuito de segunda ordem

e a equação da malha à direita é

$$Ri + \frac{di}{dt} = v$$

(Então, evitamos os termos com integrais. O leitor é solicitado a usar estritamente análise nodal no Ex. 9.4.4.) Substituindo  $i$  da primeira equação na segunda, temos

$$-R \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{dv}{dt} + v - v_g \right) \right] + \frac{d}{dt} \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{dv}{dt} + v - v_g \right) \right] = v$$

Diferenciando e simplificando o resultado, temos

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + (R + 1) \frac{dv}{dt} + (R + 4)v = Rv_g + \frac{dv_g}{dt}$$

A componente natural  $v_n$  satisfaz a equação homogênea

$$\frac{d^2 v_n}{dt^2} + (R + 1) \frac{dv_n}{dt} + (R + 4)v_n = 0$$

da qual a equação característica é

$$s^2 + (R + 1)s + R + 4 = 0$$

Usando a fórmula quadrática, obtemos as frequências naturais

$$s_{1,2} = \frac{-(R + 1) \pm \sqrt{R^2 - 2R - 15}}{2} \quad (9.21)$$

Se  $R = 6 \Omega$  em (9.21), as frequências naturais são reais e distintas, dadas por

$$s_{1,2} = -2, -5 \quad (9.22)$$

Se  $R = 5 \Omega$ , as frequências naturais são reais e iguais, dadas por

$$s_{1,2} = -3, -3 \quad (9.23)$$

Finalmente, se  $R = 1 \Omega$ , as frequências naturais são números complexos, dados por

$$s_{1,2} = -1 \pm j2 \quad (9.24)$$

onde  $j = \sqrt{-1}$ . (Na engenharia elétrica não podemos usar  $i$ , como os matemáticos fazem, para o número imaginário unitário, pois isto resultaria em uma confusão com a corrente. Os números complexos são abordados no Apêndice C para o leitor que precisar rever este assunto.)

### Raízes Reais e Distintas: Caso Superamortecido

Se as frequências naturais  $s_{1,2}$  são reais e distintas, então a resposta natural é dada por (9.18). Este caso é chamado o caso *superamortecido*, porque para um circuito real  $s_1$  e  $s_2$  são negativas, de forma que a resposta decai, ou é *amortecida*, com o tempo. Como um exemplo, no caso de (9.22) temos

$$v_n = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t}$$

## Raízes Complexas: Caso Subamortecido

Se as frequências naturais são complexas, em geral temos

$$s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são números reais. De (9.18), a resposta natural no caso geral é

$$x_n = A_1 e^{(\alpha+j\beta)t} + A_2 e^{(\alpha-j\beta)t} \quad (9.25)$$

Isso parece ser uma quantidade complexa e não uma resposta adequada para uma corrente ou tensão real. Entretanto, como  $A_1$  e  $A_2$  são números complexos, a resposta é matematicamente correta, embora um tanto inconveniente.

Para pôr a resposta natural (9.25) em uma forma mais adequada, vamos considerar a *fórmula de Euler*, dada por

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta \quad (9.26)$$

e sua forma alternativa, trocando-se  $\theta$  por  $-\theta$

$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \operatorname{sen} \theta \quad (9.27)$$

Estes resultados são demonstrados no Apêndice D. Eles são assim chamados em homenagem ao grande matemático suíço Leonhard Euler (pronuncia-se "oiler"), que viveu entre 1707 e 1783. A grandiosidade de Euler é atestada pelo fato do símbolo  $e$  para a base do sistema logarítmico natural ter sido escolhido em sua honra.

Usando (9.26) e (9.27), podemos escrever (9.25) como

$$\begin{aligned} x_n &= e^{\alpha t}(A_1 e^{j\beta t} + A_2 e^{-j\beta t}) \\ &= e^{\alpha t}[A_1(\cos \beta t + j \operatorname{sen} \beta t) + A_2(\cos \beta t - j \operatorname{sen} \beta t)] \\ &= e^{\alpha t}[(A_1 + A_2) \cos \beta t + (jA_1 - jA_2) \operatorname{sen} \beta t] \end{aligned}$$

Visto que  $A_1$  e  $A_2$  são arbitrárias, vamos renomear as constantes como

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= B_1 \\ jA_1 - jA_2 &= B_2 \end{aligned}$$

de forma que

$$x_n = e^{\alpha t}(B_1 \cos \beta t + B_2 \operatorname{sen} \beta t) \quad (9.28)$$

O caso de raízes complexas é chamado o caso *subamortecido*. Para um circuito real,  $\alpha$  é negativo, de forma que a resposta (9.28) é amortecida com o tempo. Devido aos termos senoidais, entretanto, o amortecimento é acompanhado por oscilações, que distinguem este caso do caso superamortecido.

---

### EXEMPLO 9.3

Como exemplo, no caso de (9.24), temos  $\alpha = -1$  e  $\beta = 2$ , de forma que

$$v_n = e^{-t}(B_1 \cos 2t + B_2 \operatorname{sen} 2t)$$

onde  $B_1$  e  $B_2$  são, certamente, arbitrários.

## Raízes Iguais e Reais: Caso de Amortecimento Crítico

O último tipo de frequências naturais que podemos ter é aquele onde os valores são reais e iguais, ou seja,

$$s_1 = s_2 = k \quad (9.29)$$

Estes valores caracterizam o caso de *amortecimento crítico*, que é uma linha divisória entre os casos superamortecido e subamortecido. No caso de amortecimento crítico, (9.18) não é uma solução geral, visto que tanto  $x_{n1}$  quanto  $x_{n2}$  são da forma  $Ae^{kt}$ , e então existe somente uma constante arbitrária independente.

Para (9.29) expressar as frequências naturais, a equação característica deve ser

$$(s - k)^2 = s^2 - 2ks + k^2 = 0$$

e, portanto, a equação homogênea deve ser

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} - 2k \frac{dx_n}{dt} + k^2 x_n = 0 \quad (9.30)$$

Visto que sabemos que  $Ae^{kt}$  é uma solução para um  $A$  arbitrário, vamos *tentar*

$$x_n = h(t)e^{kt}$$

Substituindo esta expressão em (9.30) e simplificando, temos

$$\frac{d^2 h}{dt^2} e^{kt} = 0$$

Portanto,  $h(t)$  deve ser tal que sua derivada segunda seja zero para todo  $t$ . Isto é verdade se  $h(t)$  é um polinômio de grau 1, ou

$$h(t) = A_1 + A_2 t$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são constantes arbitrárias. A solução geral no caso de raízes repetidas,  $s_{1,2} = k$ , então

$$x_n = (A_1 + A_2 t)e^{kt} \quad (9.31)$$

o que pode ser verificado pela substituição direta na equação homogênea (9.30).

## EXEMPLO 9.4

Como um exemplo, no caso de (9.23), temos  $s_{1,2} = -3, -3$  e então

$$v_n = (A_1 + A_2 t)e^{-3t}$$

## EXERCÍCIOS

**9.4.1** Calcule as frequências naturais de um circuito caracterizado por

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

se (a)  $a_1 = 5, a_0 = 4$ ; (b)  $a_1 = 4, a_0 = 13$ ; e (c)  $a_1 = 8, a_0 = 16$ .

Resposta: (a)  $-1, -4$ ; (b)  $-2 \pm j3$ ; (c)  $-4, -4$

**9.4.2** Calcule  $x$  no Ex. 9.4.1, com as constantes arbitrárias determinadas tal que  $x(0) = 3$  e  $dx(0)/dt = 6$ .

Resposta: (a)  $6e^{-t} - 3e^{-4t}$ ; (b)  $e^{-2t}(3 \cos 3t + 4 \sin 3t)$ ; (c)  $(3 + 18t)e^{-4t}$

**9.4.3** Calcule  $x$ , se

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 25x = 0$$

Resposta:  $x = A_1 \cos 5t + A_2 \sin 5t$

**9.4.4** Se a tensão nodal no nó  $b$  da Fig. 9.3 é  $v_1$ , mostre que as duas equações nodais são

$$\frac{v - v_g}{4} + \frac{v - v_1}{R} + \frac{1}{4} \frac{dv}{dt} = 0$$

e

$$\frac{v_1 - v}{R} + \int_0^t v_1 dt + i(0) = 0$$

Diferencie a segunda destas equações e substitua no resultado valor de  $v_1$  da primeira equação para obter uma equação originada da Fig. 9.3.

## A Resposta Forçada

A resposta forçada  $x_f$  do circuito genérico de segunda ordem deve satisfazer (9.10) e não conter constantes arbitrárias. Existem vários métodos para calcular  $x_f$ , mas, para nosso propósito, usaremos o procedimento de supor a solução, como foi empregado no passado. Sabemos de nossa experiência com circuitos de primeira ordem que a resposta forçada tem a forma da função de excitação. Uma fonte constante resulta em uma resposta forçada constante, etc. Entretanto, a resposta deve satisfazer identicamente a (9.10), de forma que a primeira e a segunda derivadas de  $x_f$ , bem como o próprio  $x_f$ , irão aparecer no membro da esquerda de (9.10). Então, somos levados a tentar  $x_f$  como uma combinação do membro da direita de (9.10) e suas derivadas.

### EXEMPLO 9.5

Como um exemplo, vamos considerar o caso  $v_g = 16$  V na Fig. 9.1. Então, de (9.4), para  $i_2 = x$ , temos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 16x = 32 \quad (9.32)$$

A resposta natural foi dada anteriormente em (9.20) por

$$x_n = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-8t} \quad (9.33)$$

Visto que o membro da direita de (9.32) é uma constante e todas as suas derivadas são constantes (no caso, zero), vamos tentar

$$x_f = A$$

onde  $A$  é uma constante a ser determinada. Notamos que  $A$  não é arbitrária, mas é um valor particular que, esperamos, torne  $x_f$  uma solução de (9.32). Substituindo  $x_f$  em (9.32) fica

$$16A = 32$$

ou

$$x_f = A = 2$$

Portanto, a solução geral de (9.32) é

$$x(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-8t} + 2$$

O conhecimento da energia inicial armazenada nos indutores pode ser agora usado para avaliar os valores de  $A_1$  e  $A_2$ .

No caso de funções de excitação constantes, podemos freqüentemente obter  $x_f$  do próprio circuito. No exemplo considerado,  $x_f$  é o valor de  $i_2$  na Fig. 9.1 em regime permanente, quando  $v_g = 16$  V. Os indutores em regime permanente são curtos-circuitos, como mostrado na Fig. 9.4, de forma que, da figura, temos

$$x_f = i_2 = 2 \text{ A}$$

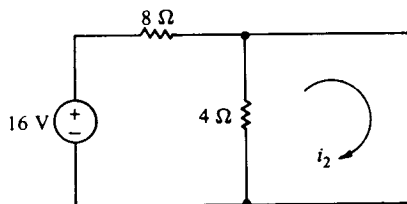


FIGURA 9.4 Circuito da Fig. 9.1 em regime permanente

## EXEMPLO 9.6

Como outro exemplo, suponha que na Fig. 9.1 temos

$$v_k = 20 \cos 4t \text{ V}$$

Logo, de (9.4), novamente para  $i_2 = x$ , temos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 16x = 40 \cos 4t \quad (9.34)$$

A resposta natural  $x_n$  é dada por (9.33), como anteriormente. Para encontrar a resposta forçada  $x_f$ , precisamos investigar uma solução que contenha todos os termos, e suas possíveis derivadas, no membro direito de (9.34). Os coeficientes destes termos irão ser determinados exigindo-se que  $x_f$  satisfaça a equação diferencial. No presente caso, o único termo é um termo  $\cos 4t$ , e a tentativa

$$x_f = A \cos 4t + B \sin 4t \quad (9.35)$$

contém este termo e todas as suas derivadas possíveis (que são  $\cos 4t$  e  $\sin 4t$ , multiplicadas por constantes).

De (9.35), temos

$$\frac{dx_f}{dt} = -4A \sin 4t + 4B \cos 4t$$

$$\frac{d^2x_f}{dt^2} = -16A \cos 4t - 16B \sin 4t$$

Substituindo estes valores e (9.35) em (9.34), e juntando os termos temos

$$40B \cos 4t - 40A \sin 4t = 40 \cos 4t$$

Visto que isto deve ser satisfeito, os coeficientes dos termos afins devem ser os mesmos em ambos os lados da equação. No caso dos termos  $\cos 4t$ , temos

$$40B = 40$$

e para o termo  $\sin 4t$ , temos

$$-40A = 0$$

Logo,  $A = 0$  e  $B = 1$ , de forma que

$$x_f = \sin 4t \quad (9.36)$$

A solução geral de (9.34), de (9.33) e (9.36) é dada por

$$i_2 = x = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-8t} + \sin 4t \quad (9.37)$$

Isto pode ser facilmente verificado pela substituição direta.

Algumas das funções de excitação mais comuns,  $f(t)$ , que ocorrem em (9.7), são listadas na primeira coluna da Tabela 9.1. A forma geral da resposta forçada correspondente é dada na segunda coluna que pode ser útil para a formulação da solução por tentativa  $x_f$ .

**TABELA 9.1** Tentativas para as respostas forçadas

$f(t)$	$x_f$
$k$	$A$
$t$	$At + B$
$t^2$	$At^2 + Bt + C$
$e^{at}$	$Ae^{at}$
$\sin bt, \cos bt$	$A \sin bt + B \cos bt$
$e^{at} \sin bt, e^{at} \cos bt$	$e^{at} (A \sin bt + B \cos bt)$

## EXERCÍCIOS

9.5.1 Calcule a resposta forçada se

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = f(t)$$

onde  $f(t)$  é dada por (a) 6, (b)  $8e^{-2t}$  e (c)  $6t + 14$ .

Resposta: (a) 2; (b)  $-8e^{-2t}$ ; (c)  $2t + 2$

9.5.2 Se  $x(0) = 4$  e  $dx(0)/dt = -2$ , calcule a solução completa no Ex. 9.5.1.

Resposta: (a)  $2e^{-t} + 2$ ; (b)  $9e^{-t} - 8e^{-2t} + 3e^{-3t}$ ; (c)  $e^{-t} + e^{-3t} + 2t + 2$

## 9.6

### Excitação na Frequência Natural

Suponha que a equação do circuito a ser resolvido é dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a + b)\frac{dx}{dt} + abx = f(t)$$

onde  $a$  e  $b \neq a$  são constantes conhecidas. Neste caso, a equação característica é

$$s^2 - (a + b)s + ab = 0$$

da qual as frequências naturais são

$$s_1 = a, \quad s_2 = b$$

Portanto, temos a resposta natural

$$x_n = A_1 e^{at} + A_2 e^{bt} \quad (9.39)$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são arbitrárias.

Vamos supor agora que a função de excitação contém uma frequência natural, digamos

$$f(t) = e^{at} \quad (9.40)$$

O procedimento usual é procurar uma resposta forçada,

$$x_f = Ae^{at} \quad (9.41)$$

e determinar  $A$  de modo que se  $x_f$  satisfaça (9.38), que, neste caso é

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a + b)\frac{dx}{dt} + abx = e^{at} \quad (9.42)$$

Contudo, substituindo  $x_f$  em (9.42) fica

$$0 = e^{at}$$

que é uma situação impossível.

Esta dificuldade poderia ter sido prevista observando que  $x_f$  em (9.41) tem a forma de um dos componentes de  $x_n$  em (9.39), e então  $x_f$  irá satisfazer a equação homogênea correspondente a (9.38). Isto é,  $x_f$  substituído em (9.38) torna seu membro direito igual a zero. Não é o caso, então, de se tentar uma resposta forçada como (9.41).

Vamos considerar o que acontece se multiplicarmos por  $t$  a parte de  $x_f$  que é duplicada em  $x_n$ , ou seja, vamos tentar

$$x_f = Ate^{at} \quad (9.43)$$

em lugar de (9.41). Teremos, então

$$\frac{dx_f}{dt} = A(at + 1)e^{at}$$

$$\frac{d^2 x_f}{dt^2} = A(a^2 t + 2a)e^{at}$$

Substituindo estes valores, com (9.43) em (9.42), temos

$$Ae^{at}[a^2 t + 2a - (a + b)(at + 1) + abt] = e^{at}$$

que, simplificada, torna-se

$$A(a - b)e^{at} = e^{at}$$

Visto que isto deve ser uma identidade para todo  $t$ , devemos ter

$$A = \frac{1}{a - b}$$

A solução geral de (9.38), usando (9.39) e (9.43) é, então

$$x = A_1 e^{at} + A_2 e^{bt} + \frac{te^{at}}{a - b}$$

## EXEMPLO 9.7

Como um exemplo, suponha que a excitação na Fig. 9.1 é dada por

$$v_g = 6e^{-2t} + 32$$

Logo, se  $i_2 = x$ , temos, de (9.4)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 10 \frac{dx}{dt} + 16x = 12e^{-2t} + 64 \quad (9.44)$$

A resposta natural, como antes, é

$$x_n = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-8t}$$

Notando que o membro da direita da equação diferencial tem o termo  $e^{-2t}$  em comum com  $x_n$ , tentaremos

$$x_f = Ate^{-2t} + B$$

O fator  $t$  foi inserido na solução natural por tentativa de  $x_f$  para eliminar a duplicação do termo  $e^{-2t}$ . Substituindo  $x_f$  em (9.44) e simplificando, temos

$$6Ae^{-2t} + 16B = 12e^{-2t} + 64$$

Portanto, temos  $A = 2$  e  $B = 4$ , de forma que

$$x_f = 2te^{-2t} + 4$$

A solução geral é agora

$$i_2 = x = x_n + x_f$$

Finalmente, vamos considerar o caso de (9.38), onde  $b = a$  e  $f(t)$  é dada por (9.40). Isto é, tanto as frequências naturais como as frequências de excitação são iguais. Neste caso, temos

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2a \frac{dx}{dt} + a^2 x = e^{at} \quad (9.45)$$

A equação característica é

$$s^2 - 2as + a^2 = 0$$

e então as frequências naturais são

$$s_1 = s_2 = a$$

A resposta natural é então

$$x_n = (A_1 + A_2 t)e^{at}$$

Sabemos que é infrutífero tentar como resposta forçada o valor de  $x_f$ , dado em (9.41), porque ela está duplicada na resposta natural. Neste caso, (9.43) não vai satisfazer também porque ela também está duplicada. A menor potência de  $t$  que não está duplicada é 2; então somos levados a tentar

$$x_f = At^2 e^{at}$$

Substituindo esta expressão em (9.45), temos

$$2Ae^{at} = e^{at}$$

de forma que  $A = 1/2$ . As respostas forçada e completa seguem como antes.

Um modo prático geral é que, se um termo de frequência natural de  $x_n$  está duplicado em  $x_f$ , o termo em  $x_f$  é multiplicado pela menor potência de  $t$  necessária para eliminar a duplicação.

---

## EXERCÍCIOS

9.6.1 Calcule a resposta forçada se

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = f(t)$$

onde  $f(t)$  é dado por (a)  $2e^{-3t} + 6e^{-4t}$  e (b)  $4e^{-t} + 2e^{-3t}$

Resposta: (a)  $2e^{-4t} - te^{-3t}$ ; (b)  $t(2e^{-t} - e^{-3t})$

9.6.2 Calcule a resposta forçada se

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = f(t)$$

onde  $f(t)$  é dada por (a)  $6e^{-2t}$  e (b)  $6te^{-2t}$ . [Sugestão: Em (b), tente  $x_f = At^3 e^{-2t}$ ]

Resposta: (a)  $3t^2 e^{-2t}$ ; (b)  $t^3 e^{-2t}$

9.6.3 Calcule a resposta completa se

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 18 \text{ sen } 3t$$

e  $x(0) = dx(0)/dt = 0$ . [Sugestão: Verifique  $x_f = t(A \cos 3t + B \text{ sen } 3t)$ ]

Resposta:  $\text{sen } 3t - 3t \cos 3t$

---

## 9.7

### A Resposta Completa

Nas seções anteriores temos notado que a resposta completa de um circuito é a soma de uma resposta natural e uma forçada, e que a resposta natural, e então a resposta completa, contém constantes arbitrárias. Estas constantes, como nos casos de primeira ordem do capítulo 8, são determinadas de tal forma que a resposta completa satisfaça as condições iniciais especificadas de energia armazenada.

---

### EXEMPLO 9.8

Para ilustrar o procedimento, vamos calcular  $x(t)$  para  $t > 0$ , que satisfaça o sistema de equações

$$\frac{dx}{dt} + 2x + 5 \int_0^t x dt = 16e^{-3t} \tag{9.46}$$
$$x(0) = 2$$



Para iniciar, vamos diferenciar a primeira destas equações para eliminar a integral; este resultado é

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = -48e^{-3t}$$

A equação característica é

$$s^2 + 2s + 5 = 0$$

com raízes

$$s_{1,2} = -1 \pm j2$$

Portanto, a resposta natural é

$$x_n = e^{-t}(A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t)$$

Experimentando como resposta forçada

$$x_f = Ae^{-3t}$$

vemos que

$$8Ae^{-3t} = -48e^{-3t}$$

de forma que  $A = -6$ . A resposta completa é, portanto

$$x(t) = e^{-t}(A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t) - 6e^{-3t} \quad (9.47)$$

Para determinar as constantes arbitrárias necessitamos de duas condições iniciais. Uma,  $x(0) = 2$ , é dada em (9.46). Para obter a outra podemos avaliar a primeira equação de (9.46) em  $t = 0$ , resultando em

$$\frac{dx(0)}{dt} + 2x(0) + 5 \int_0^0 x dt = 16$$

Notando o valor de  $x(0)$  e que o termo com integral é zero, temos

$$\frac{dx(0)}{dt} = 12 \quad (9.48)$$

Aplicando a segunda equação de (9.46) em (9.47), temos

$$x(0) = A_1 - 6 = 2$$

ou  $A_1 = 8$ . Para aplicar (9.48) devemos diferenciar (9.47), obtendo

$$\frac{dx}{dt} = e^{-t}(-2A_1 \sin 2t + 2A_2 \cos 2t) - e^{-t}(A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t) + 18e^{-3t}$$

da qual

$$\frac{dx(0)}{dt} = 2A_2 - A_1 + 18 = 12 \quad (9.49)$$

Desta, conhecendo  $A_1$ , encontramos  $A_2 = 1$ .

Neste ponto, vamos digressionar por um momento para notar um modo muito fácil de conseguir (9.49). Podemos diferenciar  $x(t)$  e imediatamente substituir  $t$  por 0 antes de escrevermos o resultado. Isto é, em (9.47), a derivada de  $x$  em  $t = 0$  é  $e^{-t}$  (que é 1), vezes a derivada de  $(A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t)$  em  $t = 0$  (que é  $2A_2$ ) mais  $(A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t)$  em  $t = 0$  (que é  $A_1$ ), vezes a derivada de  $e^{-t}$  em  $t = 0$  (que é  $-1$ ), mais a derivada de  $-6e^{-3t}$  em  $t = 0$  (que é 18). Estes passos estão descritos em (9.49) e podem ser feitos mentalmente, evitando os passos intermediários.

Retornando ao nosso problema, agora temos as constantes arbitrárias, tal que por (9.47), a resposta final é

$$x = e^{-t}(8 \cos 2t + \sin 2t) - 6e^{-3t}$$

## EXEMPLO 9.9

Como um último exemplo, vamos calcular  $v$ ,  $t > 0$ , no circuito da Fig. 9.5 se  $v_1(0) = v(0) = 0$  e  $v_g = 5 \cos 2000 t$  V. A equação nodal no nó  $v_1$  é

$$2 \times 10^{-3} v_1 - 10^{-3} v_g - \frac{1}{2} \times 10^{-3} v + 10^{-6} \frac{dv_1}{dt} = 0$$

ou

$$4v_1 - v + 2 \times 10^{-3} \frac{dv_1}{dt} = 2v_g = 10 \cos 2000t \quad (9.50)$$

e a equação nodal no terminal inversor do amp. op. é

$$\frac{1}{2} \times 10^{-3} v_1 + \frac{1}{8} \times 10^{-6} \frac{dv}{dt} = 0$$

ou

$$v_1 = -\frac{1}{4} \times 10^{-3} \frac{dv}{dt} \quad (9.51)$$

Substituindo (9.51) em (9.50) e simplificando, temos

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2 \times 10^3 \frac{dv}{dt} + 2 \times 10^6 v = -2 \times 10^7 \cos 2000t$$

A equação característica é

$$s^2 + 2 \times 10^3 s + 2 \times 10^6 = 0$$

tal que as frequências naturais são  $s_{1,2} = 1000(-1 \pm j1)$ . A resposta natural é, portanto,

$$v_n = e^{-1000t}(A_1 \cos 1000t + A_2 \sin 1000t)$$

Para a resposta forçada devemos experimentar

$$v_f = A \cos 2000t + B \sin 2000t$$

que substituída na equação diferencial fornece

$$(-2A + 4B) \cos 2000t + (-4A - 2B) \sin 2000t = -20 \cos 2000t$$

Portanto, igualando os coeficientes dos termos equivalentes da equação, temos

$$-2A + 4B = -20$$

$$-4A - 2B = 0$$

donde  $A = 2$  e  $B = -4$ . A resposta completa é então

$$v = e^{-1000t}(A_1 \cos 1000t + A_2 \sin 1000t) + 2 \cos 2000t - 4 \sin 2000t \quad (9.52)$$

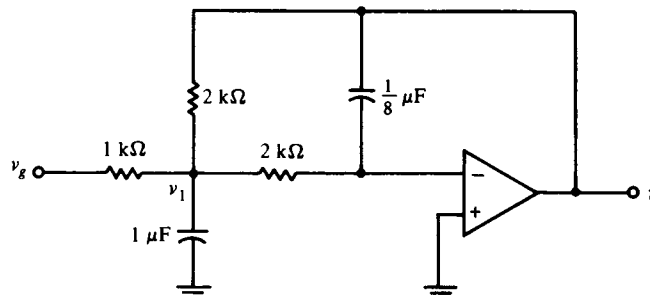


FIGURA 9.5 Exemplo

De (9.51), para  $t = 0^+$ , vemos que

$$v_1(0^+) = -\frac{1}{4} \times 10^{-3} \frac{dv(0^+)}{dt}$$

e visto que  $v_1(0^+) = v_1(0^-) = 0$ , temos

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = 0 \quad (9.53)$$

Como  $v_1, v$  é também uma tensão no capacitor (sobre o capacitor de  $1/8-\mu\text{F}$ ), tal que

$$v(0^+) = v(0^-) = 0 \quad (9.54)$$

De (9.52) a (9.54) temos

$$A_1 + 2 = 0$$

ou  $A_1 = -2$ , e de (9.52) e (9.53) temos

$$1000A_2 - 1000A_1 - 8000 = 0$$

donde  $A_2 = 6$ . Então a resposta completa é

$$v = e^{-1000t}(-2 \cos 1000t + 6 \sin 1000t) + 2 \cos 2000t - 4 \sin 2000t \text{ V}$$

## EXERCÍCIOS

9.7.1 Calcule  $x$ ,  $t > 0$ , onde

$$\frac{dx}{dt} + 2x + \int_0^t x dt = f(t)$$

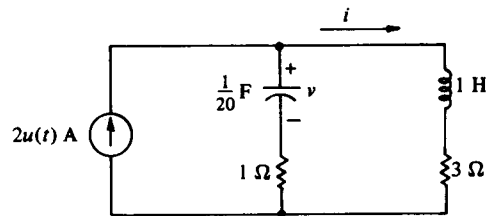
$$x(0) = -1$$

e (a)  $f(t) = 1$  e (b)  $f(t) = t^2$ .

Resposta: (a)  $(-1 - 2t)e^{-t}$ ; (b)  $3(1 + t)e^{-t} + 2t - 4$

9.7.2 Calcule  $i$ ,  $v$ ,  $di/dt$  e  $dv/dt$  em  $t = 0^+$ .

Resposta: 0, 0, 2A/s, 40 V/s



EXERCÍCIO 9.7.2

9.7.3 Para  $t > 0$  no Ex. 9.7.2, calcule (a)  $v$  e (b)  $i$ . (Sugestão: Devido às leis de Kirchoff e às relações nos terminais dos elementos,  $i$  tem a mesma frequência natural que  $v$ . Então  $v_n$  é facilmente obtida depois que  $i_n$  é calculada; sua resposta forçada é evidente por inspeção do circuito.)

Resposta: (a)  $e^{-2t}(-6 \cos 4t + 7 \sin 4t) + 6\text{V}$ ;

(b)  $e^{-2t}(-2 \cos 4t - 1/2 \sin 4t) + 2 \text{ A}$

## 9.8

### Circuito RLC Paralelo

Um dos mais importantes circuitos de segunda ordem é o circuito RLC paralelo da Fig. 9.6(a). Iremos assumir que em  $t = 0$ , existe uma corrente inicial no indutor,

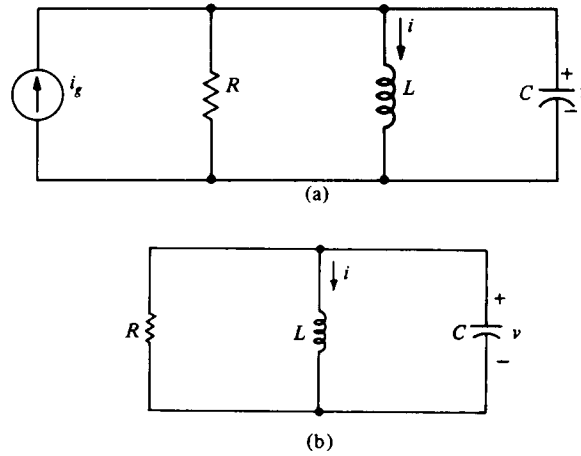


FIGURA 9.6 (a) Circuito RLC paralelo, com (b) a fonte morta

$$i(0) = I_0 \quad (9.55)$$

e uma tensão inicial no capacitor

$$v(0) = V_0 \quad (9.56)$$

e analisar o circuito para encontrar  $v$  para  $t > 0$ .

A única equação de nó necessária é dada por

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v \, dt + I_0 + C \frac{dv}{dt} = i_g \quad (9.57)$$

que uma equação integrodiferencial que se torna, após a diferenciação

$$C \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v = \frac{di_g}{dt}$$

Para calcular a resposta natural, fazemos o membro direito igual a zero, resultando em

$$C \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v = 0 \quad (9.58)$$

Este resultado também é obtido para a fonte de corrente morta, como na Fig. 9.6(b), e escrevendo a equação nodal. De (9.58) a equação característica é

$$Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L} = 0$$

da qual as frequências naturais são

$$s_{1,2} = \frac{-\frac{1}{R} \pm \sqrt{\frac{1}{R^2} - \frac{4C}{L}}}{2C} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (9.59)$$

Como no caso geral de segunda ordem já discutido, existem três tipos de respostas, dependendo da natureza do discriminante,  $1/R^2 - 4C/L$  em (9.59). Iremos, agora, estudar rapidamente estes três casos. Para simplificar, iremos tomar  $i_g = 0$  e considerar o caso sem fontes da Fig. 9.6(b). Então, a resposta forçada é zero e a resposta natural é a resposta completa.

### Caso Superamortecido

Se o discriminante é positivo, i.é.,

$$\frac{1}{R^2} - \frac{4C}{L} > 0$$

ou equivalentemente

$$L > 4R^2C \quad (9.60)$$

então as frequências naturais de (9.59) são números reais e distintos, e temos o caso superamortecido,

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (9.61)$$

Das condições iniciais e do cálculo de (9.57), em  $t = 0^+$ , obtemos

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = -\frac{V_0 + RI_0}{RC} \quad (9.62)$$

que, junto com (9.56), podem ser usadas para determinar as constantes arbitrárias.

### EXEMPLO 9.10

Como um exemplo, suponha  $R = 1\Omega$ ,  $L = 4/3\text{ H}$ ,  $C = 1/4\text{ F}$ ,  $V_0 = 2\text{ V}$  e  $I_0 = -3\text{ A}$ . Logo, de (9.59), temos  $s_{1,2} = -1, -3$  e, portanto,

$$v = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t}$$

Também, por (9.56) e (9.62) temos

$$\begin{aligned} v(0) &= 2\text{ V} \\ \frac{dv(0^+)}{dt} &= 4\text{ V/s} \end{aligned}$$

que pode ser usada para obter  $A_1 = 5$  e  $A_2 = -3$ , e desta forma,

$$v = 5e^{-t} - 3e^{-3t}$$

Este caso superamortecido é facilmente esboçado, como indicado pelas linhas cheias da Fig. 9.7, esboçando as duas componentes e somando-as então graficamente.

A razão do termo *superamortecido* pode ser vista pela falta de oscilações (flutuações do sinal). Os valores dos elementos são tais que “eliminam” qualquer tendência de oscilação. É, certamente, possível para a resposta mudar de sinal, uma vez, dependendo das condições iniciais.

### Caso Subamortecido

Se o discriminante em (9.59) é negativo, i.é.,

$$L < 4R^2C \quad (9.63)$$

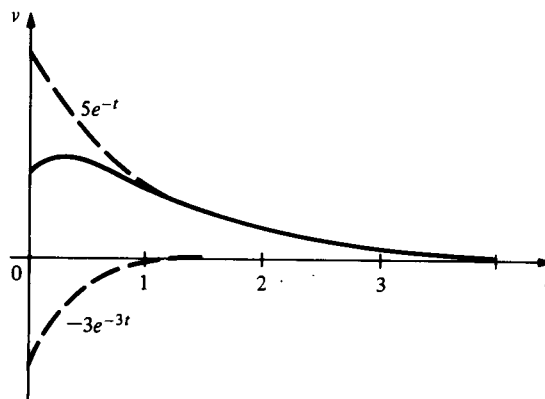


FIGURA 9.7 Esboço de uma resposta superamortecida

então temos um caso subamortecido, onde as frequências naturais são complexas e a resposta contém senos e cossenos, que, certamente, são funções de tipo oscilatório. Neste caso, é convenientemente definida uma *frequência de ressonância*.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (9.64)$$

um *coeficiente de amortecimento*

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad (9.65)$$

e uma *frequência amortecida*

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (9.66)$$

Cada uma destas é uma quantidade adimensional “por segundo”. As frequências de ressonância e amortecida são definidas em radianos por segundo (rad/s) e o coeficiente de amortecimento em nepers por segundo (Np/s).

Usando estas definições, as frequências naturais, por (9.59) são

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

e, portanto, a resposta é

$$v = e^{-\alpha t}(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) \quad (9.67)$$

que é de natureza oscilatória, como esperado.

### EXEMPLO 9.11

Como um exemplo, suponha  $R = 5\Omega$ ,  $L = 1\text{ H}$ ,  $C = 1/10\text{ F}$ ,  $V_0 = 0$ , e  $I_0 = -3/2\text{ A}$ . Então temos

$$v = e^{-t}(A_1 \cos 3t + A_2 \sin 3t)$$

Das condições iniciais, temos  $v(0) = 0$  e  $dv(0^+)/dt = 15\text{ V/s}$  da qual  $A_1 = 0$  e  $A_2 = 5$ . Portanto, a resposta subamortecida é

$$v = 5e^{-t} \sin 3t$$

Esta resposta é imediatamente esboçada se é observado que, visto que  $\sin 3t$  varia entre  $+1$  e  $-1$ ,  $v$  deve ser uma senóide que varie entre  $5e^{-t}$  e  $-5e^{-t}$ . A resposta é mostrada na Fig. 9.8, onde pode

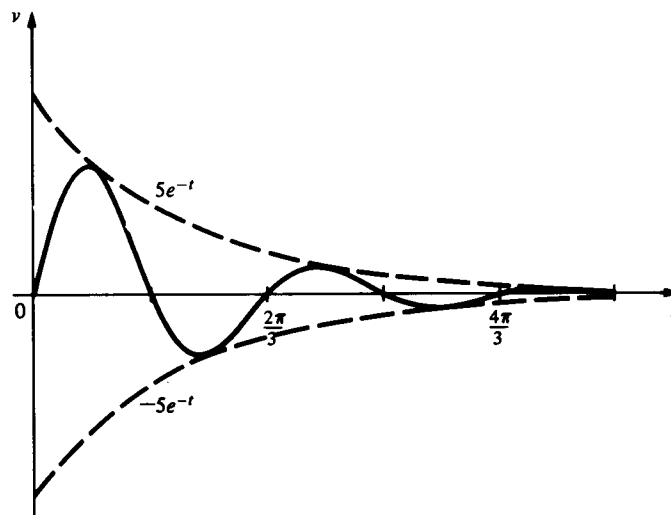


FIGURA 9.8 Esboço de uma resposta subamortecida

ser visto que é oscilatória por natureza. A resposta atinge zero nos pontos onde a senóide é zero, o que é determinado, em geral, pela frequência amortecida  $\omega_d$ .

### Caso de Amortecimento Crítico

Quando o discriminante de (9.59) é zero, temos o caso do amortecimento crítico, para o qual

$$L = 4R^2C \quad (9.68)$$

Neste caso, as frequências naturais são reais e iguais, dadas por

$$s_{1,2} = -\alpha, -\alpha$$

onde  $\alpha$  é dado por (9.65). A resposta é então

$$v = (A_1 + A_2t)e^{-\alpha t} \quad (9.69)$$

### EXEMPLO 9.12

Como um exemplo, considere o caso  $R = 1\Omega$ ,  $L = 1\text{ H}$ ,  $C = 1/4\text{ F}$ ,  $V_0 = 0$  e  $I_0 = -1\text{ A}$ . Neste caso temos  $\alpha = 2$ ,  $A_1 = 0$  e  $A_2 = 4$ . Desta forma, a resposta é

$$v = 4te^{-2t}$$

Esta é facilmente esboçada plotando-se  $4t$  e  $e^{-2t}$  e multiplicando-os entre si. O resultado é mostrado na Fig. 9.9.

Para cada caso de circuito  $RLC$  paralelo, o valor em regime permanente da resposta natural é zero, porque cada termo na resposta contém um fator  $e^{at}$  onde  $a < 0$ .

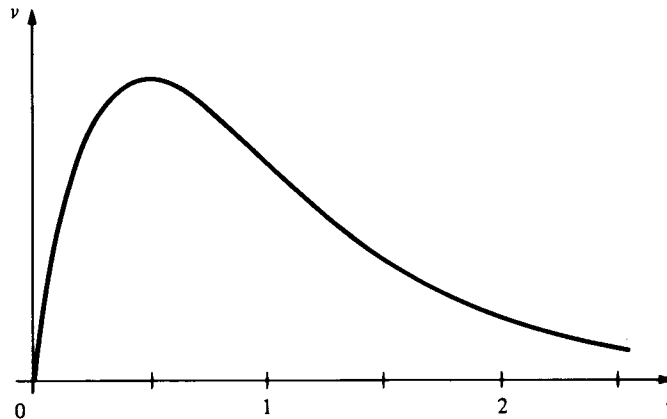


FIGURA 9.9 Esboço de uma resposta com amortecimento crítico

### EXERCÍCIOS

- 9.8.1** Em um circuito  $RLC$  paralelo sem fontes,  $R = 1\text{ k}\Omega$  e  $C = 1\mu\text{F}$ . Calcule  $L$  tal que o circuito seja (a) superamortecido com  $s_{1,2} = -250, -750\text{ s}^{-1}$ ; (b) subamortecido com  $\omega_d = 250\text{ rad/s}$  e (c) com amortecimento crítico.  
Resposta: (a)  $16/3\text{ H}$ ; (b)  $16/5\text{ H}$ ; (c)  $4\text{ H}$ .
- 9.8.2** Calcule a equação diferencial satisfeita por  $i$  na Fig. 9.6 (b). Use este resultado para calcular  $i$  para  $t > 0$ , se  $R = 10\Omega$ ,  $L = 2\text{ H}$ ,  $C = 0,05\text{ F}$ ,  $v(0) = 0$  e  $i(0) = 6\text{ A}$ .  
Resposta:  $d^2i/dt^2 + 1/RC di/dt + 1/LC i = 0$ ;  $e^{-t}(6 \cos 3t + 2 \sin 3t)$
- 9.8.3** Quanto maior o valor de  $R$ , menor o amortecimento que existirá no caso de um circuito subamortecido paralelo  $RLC$  (porque  $\alpha = 1/2 RC$ ). Assuma  $R = \infty$  (circuito aberto) e mostre que, no caso sem fontes,

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \omega_0^2 v = 0$$

Para este caso, calcule a solução geral para  $v$ .

Resposta:  $A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t$

## 9.9

### Circuito RLC Série

O circuito RLC série, mostrado na Fig. 9.10, é o dual do circuito paralelo, estudado na seção anterior. Portanto, todos os resultados para o circuito paralelo têm contraparte dual para o circuito série, que podem ser escritos, por inspeção. Nesta seção iremos simplesmente listar estes resultados usando a dualidade e deixando ao leitor sua verificação pelos métodos convencionais.

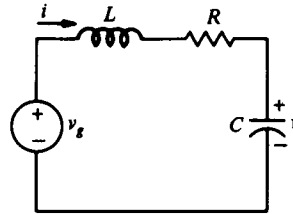


FIGURA 9.10 Circuito RLC série

Referindo-nos à Fig. 9.10, as condições iniciais serão tomadas como

$$v(0) = V_0$$

$$i(0) = I_0$$

A equação do laço necessária na análise é

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + V_0 = v_g \quad (9.70)$$

que é válida para  $t > 0$ . A equação característica resultante é

$$Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} = 0 \quad (9.71)$$

e as frequências naturais são

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (9.72)$$

O circuito RLC série é superamortecido se

$$C > \frac{4L}{R^2} \quad (9.73)$$

e a resposta é

$$i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (9.74)$$

O circuito é criticamente amortecido se

$$C = \frac{4L}{R^2} \quad (9.75)$$

neste caso  $s_1 = s_2 = -R/2L$ , e a resposta é

$$i = (A_1 + A_2 t) e^{s_1 t} \quad (9.76)$$



Finalmente, o circuito é subamortecido se

$$C < \frac{4L}{R^2} \quad (9.77)$$

neste caso, a frequência de ressonância é

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (9.78)$$

o coeficiente de amortecimento é

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad (9.79)$$

e a frequência amortecida é

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (9.80)$$

A resposta subamortecida é

$$i = e^{-\alpha t}(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sen \omega_d t) \quad (9.81)$$

### EXEMPLO 9.13

Como um exemplo, suponha que se queira encontrar  $v$ , para  $t > 0$  na Figura 9.11, dada que

$$v(0) = 6 \text{ V}, \quad i(0) = 2 \text{ A}$$

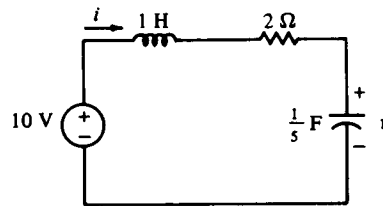


FIGURA 9.11 Circuito RLC série excitado

Sabemos que

$$v = v_n + v_f$$

onde a resposta natural  $v_n$  contém as frequências naturais. As frequências naturais da corrente  $i$  são as mesmas que as de  $v$ , porque obter uma da outra, em geral, requer somente uma aplicação das leis de Kirchhoff e operações de soma, subtração, multiplicação por constantes, integração e diferenciação. Nenhuma destas operações muda as frequências naturais. Portanto, visto que as frequências naturais de  $i$  são mais facilmente obtidas (somente uma equação de laço é requerida), vamos obtê-la. Ao longo do laço, temos

$$\frac{di}{dt} + 2i + 5 \int_0^t i dt + 6 = 10 \quad (9.82)$$

A equação característica, após a diferenciação é

$$s^2 + 2s + 5 = 0$$

com as raízes

$$s_{1,2} = -1 \pm j2$$

Então, temos

$$v_n = e^{-t}(A_1 \cos 2t + A_2 \sen 2t)$$

[Poderíamos ter obtido  $s_{1,2}$  diretamente de (9.72), mas é provavelmente mais fácil para escrever a equação característica, visto que isso pode ser feito por inspeção.]

A resposta forçada  $v_f$  é uma constante neste caso e pode ser obtida por inspeção do circuito no regime permanente. Visto que no regime permanente o capacitor é um circuito aberto e o indutor é um curto-circuito,  $i_f = 0$  e  $v_f = 10$ . Portanto, a resposta completa é

$$v = e^{-t}(A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t) + 10$$

Da tensão inicial, temos

$$v(0) = 6 = A_1 + 10$$

ou  $A_1 = -4$ . Também temos

$$\frac{1}{5} \frac{dv(0^+)}{dt} = i(0) = 2$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = 10 = 2A_2 - A_1$$

Portanto,  $A_2 = 3$ , e temos

$$v = e^{-t}(-4 \cos 2t + 3 \sin 2t) + 10 \text{ V}$$

### EXEMPLO 9.14

Como um exemplo final, vamos calcular  $v$  na Fig. 9.11 se a fonte é

$$v_g = 4 \cos t \text{ V}$$

Neste caso, iremos precisar de uma equação diferencial para  $v$ , que pode ser obtida de (9.82), e

$$i = \frac{1}{5} \frac{dv}{dt} \quad (9.83)$$

Também podemos obtê-la diretamente da figura, visto que as tensões sobre o indutor e o resistor são

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{5} \frac{d^2v}{dt^2}$$

e

$$2i = \frac{2}{5} \frac{dv}{dt}$$

e que a tensão sobre o capacitor é  $v$ , certamente. Em ambos os casos, o resultado pela LKT é

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2 \frac{dv}{dt} + 5v = 20 \cos t$$

A resposta natural é a mesma que no exemplo anterior. Para obter a resposta forçada, experimentaremos

$$v_f = A \cos t + B \sin t$$

que, substituída na equação diferencial, resulta em

$$(4A + 2B) \cos t + (4B - 2A) \sin t = 20 \cos t$$

Igualando os coeficientes afins e resolvendo para  $A$  e  $B$ , temos

$$A = 4, \quad B = 2$$

Portanto, a solução geral é

$$v = e^{-t}(A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t) + 4 \cos t + 2 \sin t$$

Da tensão inicial, temos

$$v(0) = 6 = A_1 + 4$$

ou  $A_1 = 2$ . Da corrente inicial e (9.83), temos

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = 10 = 2A_2 - A_1 + 2$$

ou  $A_2 = 5$ .

A resposta completa é, portanto,

$$v = e^{-t}(2 \cos 2t + 5 \sin 2t) + 4 \cos t + 2 \sin t$$

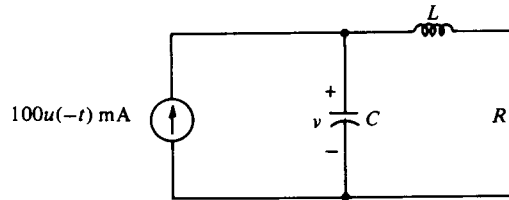
## EXERCÍCIOS

**9.9.1** Assuma que  $R = 6\Omega$ ,  $L = 1\text{ H}$ ,  $v_c = 0$ ,  $v(0) = 8\text{ V}$  e  $i(0) = 4\text{ A}$  na Fig. 9.10. Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se  $C$  é (a)  $1/5\text{ F}$ , (b)  $1/34\text{ F}$ , e (c)  $1/9\text{ F}$ .

Resposta: (a)  $7e^{-5t} - 3e^{-t}\text{ A}$ ; (b)  $4e^{-3t}(\cos 5t - \sin 5t)\text{ A}$ ; (c)  $(4 - 20t)e^{-3t}\text{ A}$

**9.9.2** Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se  $R = 40\Omega$ ,  $L = 10\text{ mH}$ , e  $C = 5\mu\text{F}$ .

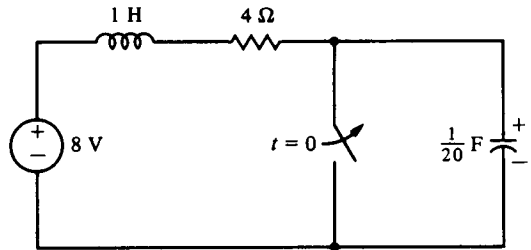
Resposta:  $e^{-2000t}(4 \cos 4000t - 3 \sin 4000t)\text{ V}$



EXERCÍCIO 9.9.2

**9.9.3** Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0$ .

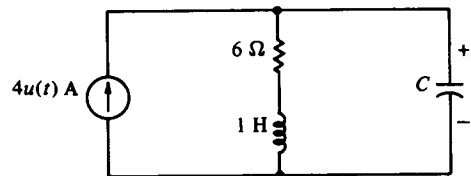
Resposta:  $8 - e^{-2t}(8 \cos 4t - 6 \sin 4t)\text{ V}$



EXERCÍCIO 9.9.3

**9.9.4** Calcule  $v$  para  $t > 0$  se (a)  $C = 1/5\text{ F}$  e (b)  $C = 1/9\text{ F}$

Resposta: (a)  $-25e^{-t} + e^{-3t} + 24\text{ V}$ ; (b)  $24 - (24 + 36t)e^{-3t}\text{ V}$



EXERCÍCIO 9.9.4

## 9.10

### Métodos Alternativos para a Obtenção das Equações Representativas

Nesta seção iremos considerar dois métodos para simplificar os processos de obtenção da equação representativa de um circuito. No caso de circuitos  $RLC$  em série e em paralelo, uma única equação é requerida,

a qual, após diferenciação, é a equação representativa. Contudo, em muitos circuitos de segunda ordem existem duas equações simultâneas do circuito, das quais a equação representativa é obtida após um tedioso processo de eliminação.

### EXEMPLO 9.15

Como um exemplo, vamos considerar o circuito da Fig. 9.12 para  $t > 0$ . Tomando o nó  $b$  como o de referência e escrevendo as equações nodais dos nós  $a$  e  $v_1$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{v - v_g}{4} + \frac{v - v_1}{6} + \frac{1}{4} \frac{dv}{dt} &= 0 \\ \frac{v_1 - v}{6} + \int_0^t v_1 dt + i(0) &= 0 \end{aligned} \quad (9.84)$$

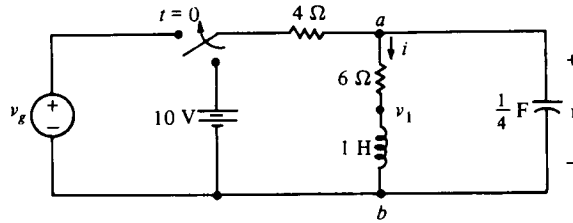


FIGURA 9.12 Circuito com dois elementos armazenadores

Se estamos interessados em calcular  $v$ , devemos eliminar  $v_1$  e obter a equação representativa em termos de  $v$ . O resultado, como se pode verificar, é

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 7 \frac{dv}{dt} + 10v = \frac{dv_g}{dt} + 6v_g \quad (9.85)$$

Neste caso, o processo não é demasiadamente complicado, mas pode ser simplificado por métodos que iremos considerar neste capítulo.

O primeiro método que iremos discutir é um caminho sistemático para obtenção de uma equação representativa, como (9.85), das equações de circuito, como (9.84). Para desenvolver o método, vamos primeiro introduzir o *operador* de diferenciação  $D$ , que é definido por

$$D = \frac{d}{dt}$$

Isto é,  $Dx = dx/dt$ ,  $D(Dx) = D^2x = d^2x/dt^2$  etc. Também temos, por exemplo,

$$a \frac{dx}{dt} + bx = aDx + bx = (aD + b)x$$

É importante notar que  $x$  é explicitado no termo intermediário, e colocado *após* a expressão como operador, indicando que a operação é realizada sobre  $x$ . Por outro lado, o significado é mudado radicalmente.

Levando estes pontos em consideração, vamos reescrever (9.84) na forma do operador. Isto resulta, após a diferenciação da segunda equação, em

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4}D + \frac{5}{12}\right)v - \frac{1}{6}v_1 &= \frac{1}{4}v_g \\ -\frac{1}{6}Dv + \left(\frac{1}{6}D + 1\right)v_1 &= 0 \end{aligned}$$

que, quando eliminadas as frações, torna-se

$$\begin{aligned} (3D + 5)v - 2v_1 &= 3v_g \\ -Dv + (D + 6)v_1 &= 0 \end{aligned} \quad (9.86)$$

Para eliminar  $v_1$ , vamos “operar” na primeira equação com  $D + 6$ , o que quer dizer multiplicar por  $D + 6$  cada termo do lado esquerdo de toda a equação. Então vamos multiplicar a segunda equação

por dois, resultando em

$$(D + 6)(3D + 5)v - 2(D + 6)v_1 = 3(D + 6)v_g$$

$$-2Dv + 2(D + 6)v_1 = 0$$

[Notamos que constantes tais como 2 operam com os operadores, i.é.,  $(D + 6) 2 x = 2 (D + 6) x$ , mas não as variáveis.] A soma destas duas últimas equações elimina  $v_1$  e resulta em

$$[(D + 6)(3D + 5) - 2D]v = 3(D + 6)v_g \quad (9.87)$$

Multiplicando os operadores como se eles fossem polinômios, agrupando os termos e dividindo por um fator 3, temos

$$(D^2 + 7D + 10)v = (D + 6)v_g$$

que é a mesma que (9.85)

O procedimento pode ser empregado de maneira mais direta através de determinantes. Por exemplo, podemos usar a regra de Cramer para obter a expressão para  $v$  de (9.86), dada por

$$v = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad (9.88)$$

onde  $\Delta$  é o determinante dos coeficientes

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3D + 5 & -2 \\ -D & D + 6 \end{vmatrix} \quad (9.89)$$

e  $\Delta_1$  é dado por

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3v_g & -2 \\ 0 & D + 6 \end{vmatrix} = 3(D + 6)v_g \quad (9.90)$$

Notamos que, nesta última expressão, devemos ser cautelosos em escrever  $v_g$  após o operador. Escrevendo (9.88) como

$$\Delta v = \Delta_1$$

vemos de (9.89) e (9.90) que temos a equação representativa (9.87).

O segundo método que iremos considerar é uma mistura dos métodos de laço e de nó, no qual iremos selecionar as correntes de indutor e as tensões de capacitor como incógnitas, em vez de correntes de laço ou tensões de nó. Então aplicamos a LKT ao redor do laço que contém um único indutor e a LKC nos nós, ou nós generalizados, que tenham somente um capacitor conectado. Desta forma, cada equação contém somente uma derivada, que é ou uma corrente de indutor ou uma tensão de capacitor, e nenhuma integral. As equações são então relativamente fáceis de serem manipuladas para encontrar a equação representativa.

### EXEMPLO 9.16

Como um exemplo usando a Fig. 9.12 novamente, assuma  $i$ , a corrente no indutor, e  $v$ , a tensão no capacitor, como incógnitas. (Estas incógnitas são algumas vezes chamadas de *variáveis de estado* do circuito.) Então, para  $t > 0$ , a equação nodal no nó  $a$  é

$$\frac{v - v_g}{4} + i + \frac{1}{4} \frac{dv}{dt} = 0 \quad (9.91)$$

e a equação de laço ao redor da malha direita é

$$v = 6i + \frac{di}{dt} \quad (9.92)$$

É um problema relativamente simples resolver para  $i$  em (9.91), substituindo seu valor em (9.92) e simplificando o resultado para obter (9.85). O leitor pode notar que usamos este método, sem chamar a atenção, na obtenção da equação representativa do circuito da Fig. 9.3 na Seç. 9.4.

Algumas vantagens deste método são que não aparecem integrais (então não ocorrem derivadas segundas como um resultado da diferenciação), uma variável desconhecida é facilmente encontrada em função das outras e as condições iniciais da primeira derivada são facilmente obtidas para uso na determinação das

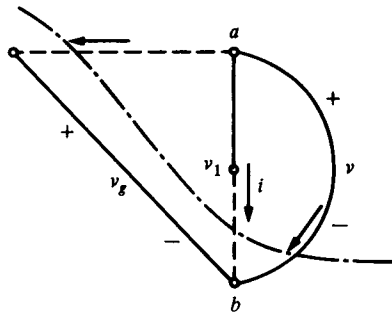


FIGURA 9.13 Gráfico da Fig. 9.12

constantes arbitrárias na solução geral. Por exemplo, pode ser visto na Fig. 9.12 que  $i(0) = 1$  A e  $v(0) = 6$  V. Então, de (9.91) e do valor de  $v_g(0^+)$ , temos

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = v_g(0^+) - 10$$

Este último método pode ser grandemente facilitado, particularmente em casos de circuitos complexos, pelo uso da teoria dos gráficos. Visto que estamos procurando as correntes de indutor e as tensões de capacitor (variáveis de estado), colocamos os indutores em enlases, cujas correntes constituem um conjunto independente, e os capacitores na árvore, cujas tensões de ramo constituem um conjunto independente, como visto no Capítulo 6. (A árvore também pode conter fontes de tensão, e os enlases podem conter fontes de corrente, etc., se possível).

Cada indutor  $L$  é então um enlace como corrente  $i$ , que forma um laço no qual os outros elementos são unicamente ramos de árvore. Portanto, a LKT ao redor do laço irá conter somente um termo derivado,  $L(di/dt)$ , e nenhuma integral. Este laço pode ser facilmente encontrado visto que ele é o único laço num gráfico se o único enlace adicional à árvore é  $L$ . Por exemplo, o gráfico da Fig. 9.12 é mostrado na Fig. 9.13 com os ramos da árvore mostrados por linhas cheias e os enlases por linhas tracejadas. O laço contendo o indutor de 1-H é  $a, v_1, b, a$  através do ramo denominado  $v$ , a LKT ao redor dele é (9.92).

Cada capacitor é um ramo da árvore cuja corrente, em conjunto com as correntes de enlace, constituem um conjunto de correntes saindo de um nó ou de um nó generalizado, porque se o capacitor é retirado do circuito, a árvore é separada em duas partes conectadas somente por enlases. No exemplo da Fig. 9.13, as três correntes são mostradas atravessando a linha tracejada através do capacitor, denominada  $v$ , e dois enlases, somados com zero pela LKC. Isso é descrito por (9.91).

## EXERCÍCIOS

- 9.10.1 Calcule a equação representativa para  $v, t > 0$  no Ex. 9.9.4 por (a) pelo primeiro método desta seção usando equações nodais e (b) o segundo método desta seção.  
Resposta:  $C(d^2v/dt^2) + 6C(dv/dt) + v = 24$
- 9.10.2 Resolva o Ex. 9.1.1 usando (a) o primeiro método desta seção aplicado a equações de malhas e (b) o segundo método desta seção.
- 9.10.3 Resolva o Ex. 9.7.3 (a) usando o segundo método desta seção.

## 9.11

### Spice para Respostas Transitórias de Circuitos de Ordem Elevada

SPICE, ou qualquer programa similar de computador é muito útil na resolução de equações diferenciais representativas quando a ordem das mesmas se eleva. O uso do SPICE para circuitos de ordem elevada envolve essencialmente o mesmo procedimento que o das redes de primeira ordem do capítulo anterior.

#### EXEMPLO 9.17

Considere, por exemplo, calcular  $i$  e  $v$  na Fig. 9.6(b) para  $R = 200$  ohms,  $L = 10$  mH,  $C = 1\mu\text{F}$ ,  $v(0) = 1$  V e  $i(0) = 0$  A, no intervalo  $0 < t < 1$  ms. Um arquivo de circuito para plotar  $i$  e  $v$  é

CIRCUITO RLC PARALELO DA FIG. 9.6 (b) [caso subamortecido]  
 \*DECLARAÇÕES DE DADOS

```
R 1 0 200OHM
L 1 0 10MH
C 1 0 1UF
*FAÇA V(1) = 1 V e I(C) = 0 EM T = 0 USANDO DA DECLARAÇÃO .IC
.IC V(1) 1
.TRAN 0,05MS 1MS UIC
.PLOT TRAN V(1)|(L)
.END
```

Neste programa o comando .IC (condição inicial) ajusta a tensão de nó  $V(1) = v$ , a tensão no capacitor, para um valor inicial de 1 V. A corrente no indutor é zero, visto que não foi especificada por uma declaração IC em L. A solução do PSPICE é mostrada na Fig. 9.14.

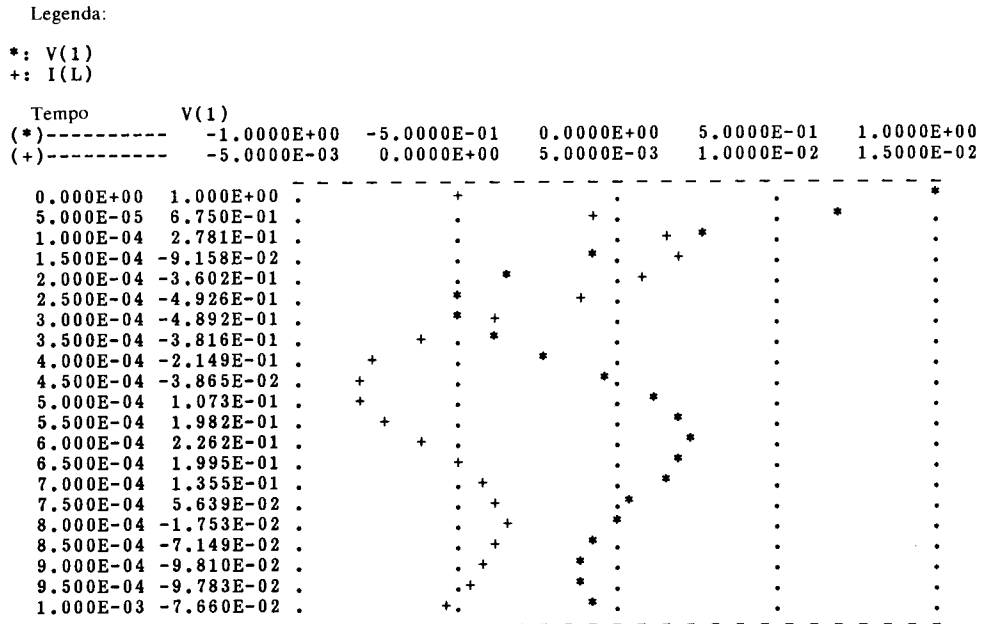


FIGURA 9.14 Resposta transitória para o circuito da Fig. 9.6(b)

## EXEMPLO 9.18

Como um segundo exemplo, vamos calcular  $v_0$  para  $0 < t < 15$  ms no circuito de terceira ordem da Fig. 9.15(a). Antes do tempo  $t = 0$ ,  $v_g = 10$  V e a chave está fechada, fazendo  $i_x = 0$ , que requer que a FCCC tenha uma corrente zero (um circuito aberto). O circuito está redesenhado na Fig. 9.15(b), ilustrando estas condições. Um arquivo de circuito para encontrar os valores iniciais de  $v_{c1}(0^-)$  e  $i_L(0^-)$  é

```
CONDIÇÕES INICIAIS PARA O CIRCUITO DA FIG. 9.15(b)
*DECLARAÇÕES DE DADOS
VG 10 0 DC 10
R1 10 1 1K
R2 1 2 2K
C1 2 0 1UF
L 1 4 0.1H
R3 4 0 1K
*DECLARAÇÃO DE CONTROLE DA SOLUÇÃO
.DC VG 10 10 1
*DECLARAÇÃO DE CONTROLE DA SAÍDA
.PRINT DC V(C1)|(L)
.END
```

Os valores iniciais resultantes são

VG	V(C1)	I(L)
1.000E + 1	5.000E + 00	5.000E - 03

Podemos agora escrever um arquivo de circuito para  $t > 0$ , para a Fig. 9.15(c) usando estes valores para calcular  $v_0 = V(4)$  no intervalo desejado. Note que a fonte simulada de tensão  $v_d$  foi inserida para permitir  $i_x$  para a FCCC entre os nós 0 e 3.

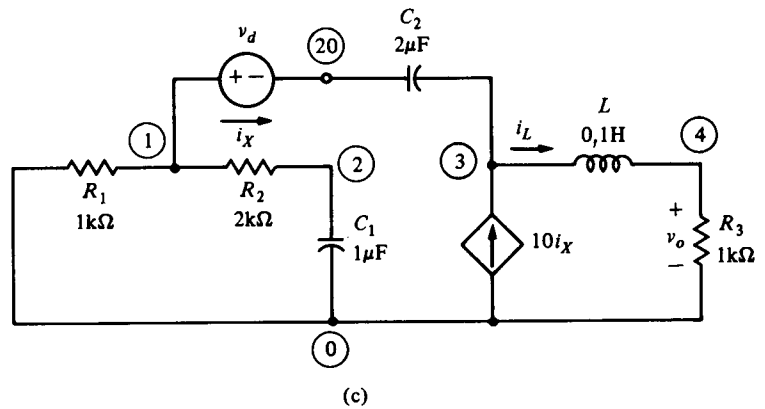
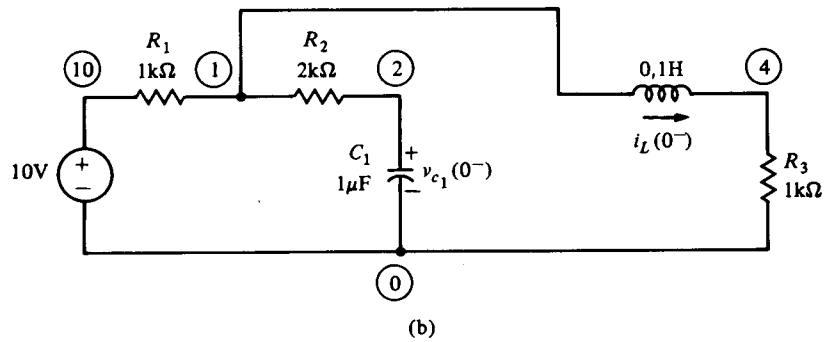
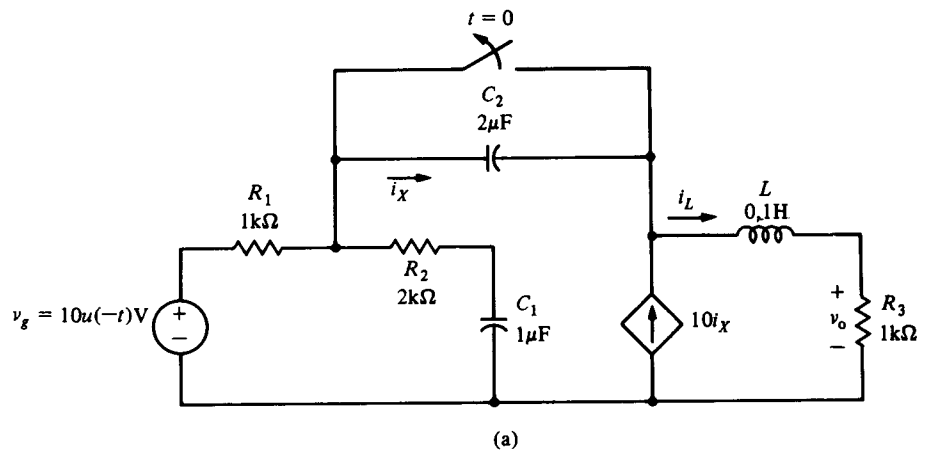


FIGURA 9.15 (a) Circuito de terceira ordem; (b) redesenhado em  $t = 0^-$ ; (c) redesenhado para  $t > 0$

RESPOSTA TRANSITÓRIA PARA O CIRCUITO DA FIG. 9.15(c)

\*DECLARAÇÕES DE DADOS

R1 0 1 1K

R2 1 2 2K

C1 2 0 1UF IC = 5V

VD 1 20 DC 0

C2 20 3 2UF 1C = 0

L 3 4 0.1H IC = 5M

R 4 0 1K

FIX 0 3 VC 10

\*DECLARAÇÃO DE CONTROLE DA SOLUÇÃO

.TRAN 1MS 15MS UIC

\*DECLARAÇÃO DE CONTROLE DA SAÍDA

.PLOT TRAN V(R3)

.END

O gráfico de  $v_o$  para este programa é mostrado na Fig. 9.16.



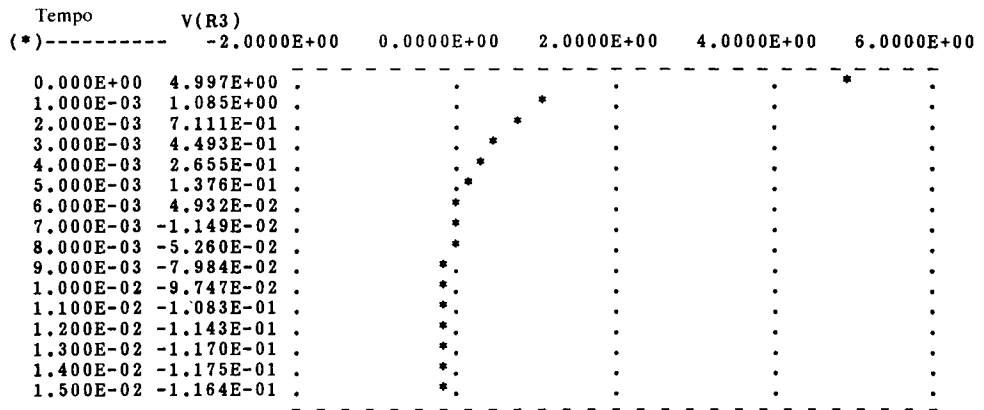


FIGURA 9.16 Resposta transitória para o circuito da Fig. 9.15(a)

## EXERCÍCIOS

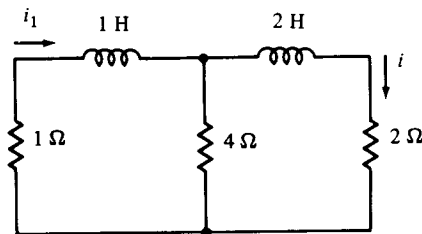
- 9.11.1 Repita o exemplo RLC paralelo da Fig. 9.6(b), com (a)  $R = 50\Omega$ ; (b)  $R = 25\Omega$ .
- 9.11.2 Use o SPICE para plotar  $i$  na Fig. 9.11, no intervalo  $0 < t < 5$  s.
- 9.11.3 Use o SPICE para plotar  $v$  e  $v_g$  na Fig. 9.5, se  $v_g = 5[u(t) - u(t - 10^{-3})]$  V no intervalo  $0 < t < 2$  ms.
- 9.11.4 Use o SPICE para plotar  $v_o$  e  $v_g$  na Fig. 9.14, se  $v_g = -12\mu(-t) + 10.000t[u(t - 0,001)]$  V no intervalo  $0 < t < 0,01$  s.

## PROBLEMAS

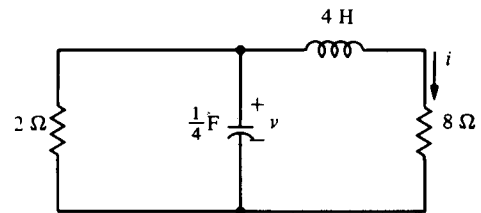
- 9.1 Insira um resistor de  $1\text{-}\Omega$  em série com  $v_g$  na Fig. 9.2, tornando a fonte uma fonte real e não uma fonte ideal. Mostre que neste caso  $v_2$  satisfaz a equação de segundo grau.
- 9.3 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .

$$5 \frac{d^2 v_2}{dt^2} + 11 \frac{dv_2}{dt} + 4v_2 = 4 \frac{dv_g}{dt} + 4v_g$$

- 9.2 Calcule  $i$  para  $t > 0$  se  $i_1(0) = 0$  A e  $i(0) = 3$  A.

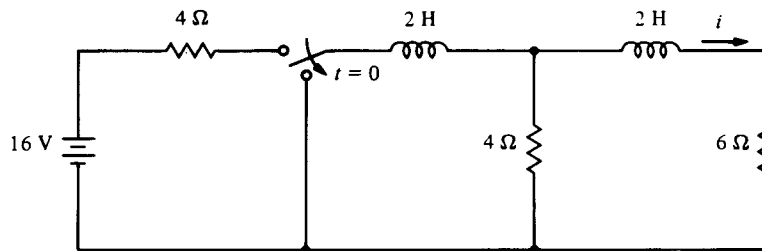


PROBLEMA 9.2

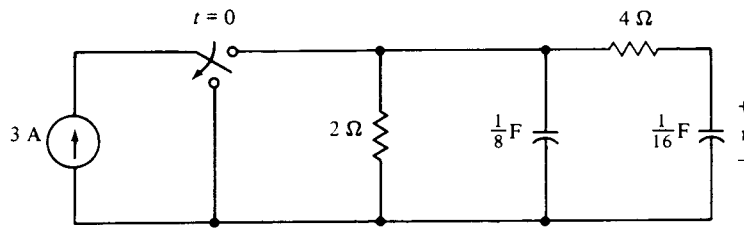


PROBLEMA 9.4

- 9.5 Calcule  $v$  no Prob. 9.4, se  $i(0)$  for mudado para 2 A.
- 9.6 Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .

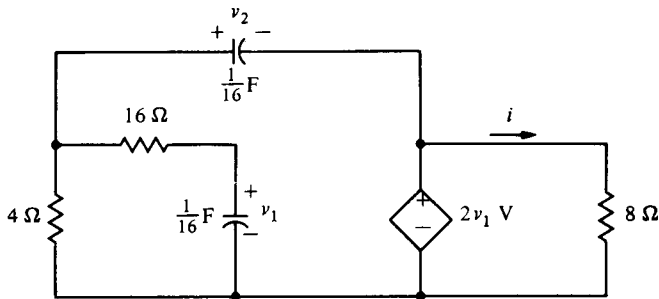


PROBLEMA 9.3



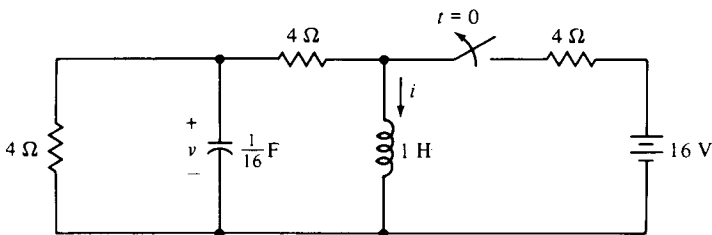
PROBLEMA 9.6

9.7 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se  $v_1(0) = v_2(0) = 4$  V.



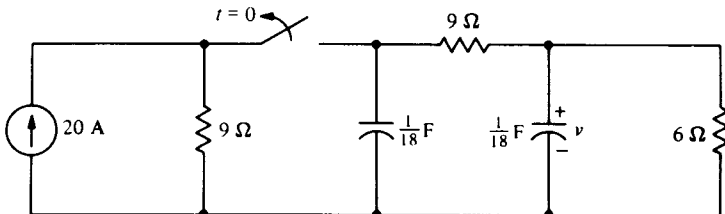
PROBLEMA 9.7

9.8 O circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ . Calcule  $v$  e  $i$  para  $t > 0$ .



PROBLEMA 9.8

9.9 Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .

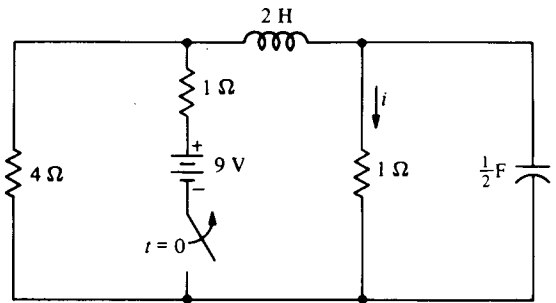


PROBLEMA 9.9

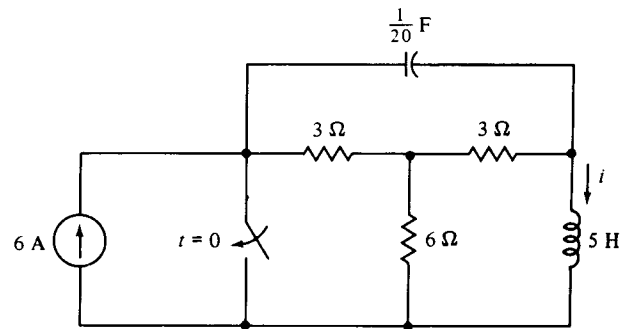
9.10 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .

9.11 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .

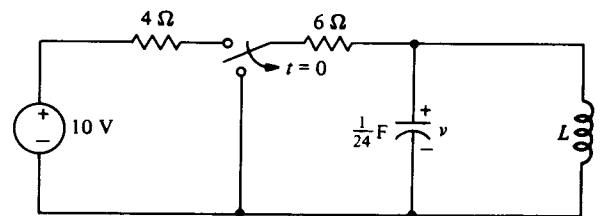
9.12 O circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ . Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se  $L$  é (a) 8 H, (b) 6 H, e (c) 4,8 H.



PROBLEMA 9.10



PROBLEMA 9.11



PROBLEMA 9.12

9.13 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .

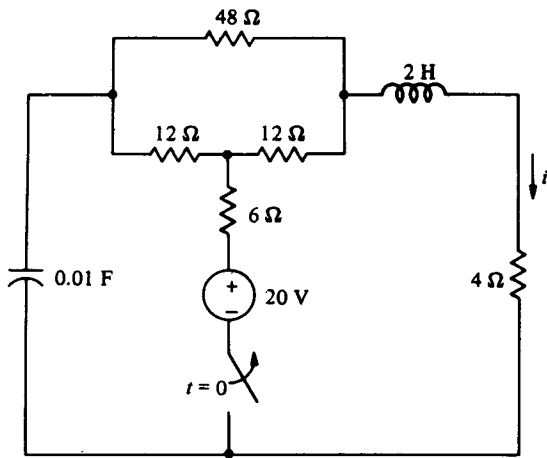
9.14 Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .

9.15 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se  $v(0) = 2$  V,  $i(0) = 1$  A, e (a)  $L = 1$  H e  $R = 1$  Ω, (b)  $L = 1$  H e  $R = 3$  Ω, e (c)  $L = 2$  H e  $R = 5$  Ω.

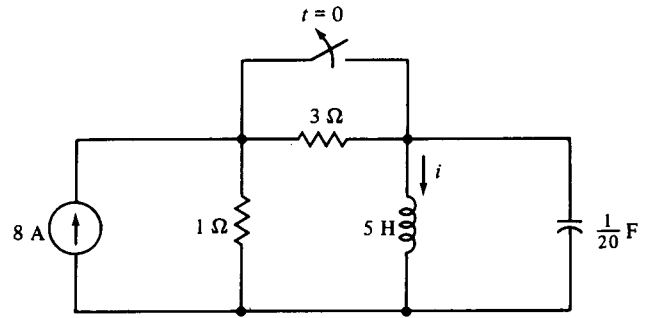
9.16 Calcule  $i_2$  para  $t > 0$  se  $i_1(0) = 3$  A,  $i_2(0) = -1$  A, e (a)  $v_g = 15$  V, (b)  $v_g = 10e^{-2t}$  V, e (c)  $v_g = 5e^{-t}$  V.

9.17 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .

9.18 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .

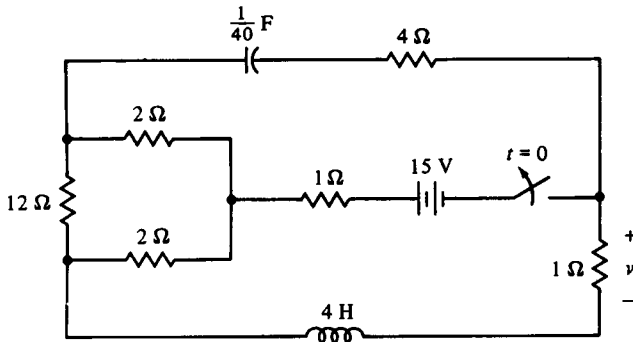


PROBLEMA 9.13

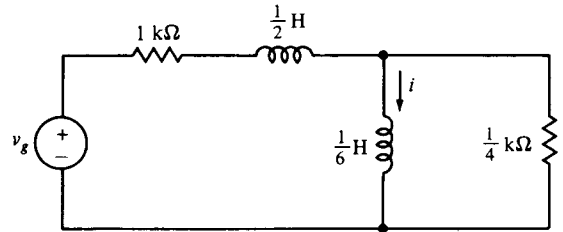


PROBLEMA 9.18

9.19 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se  $v_g = 12u(t)$  V.

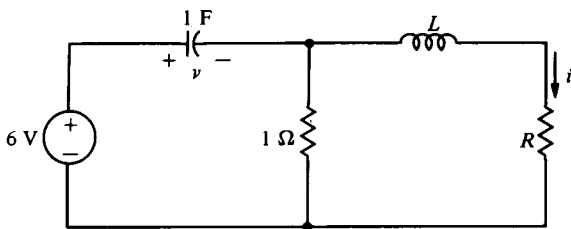


PROBLEMA 9.14

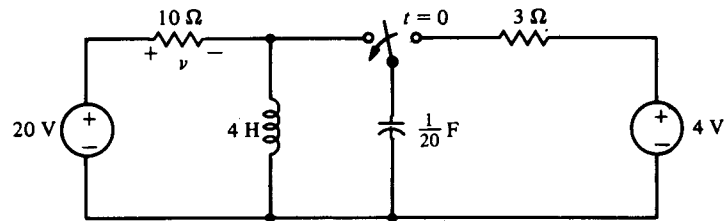


PROBLEMA 9.19

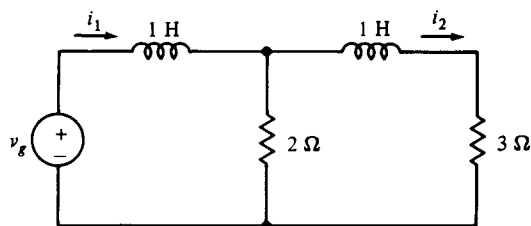
9.20 Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .



PROBLEMA 9.15



PROBLEMA 9.20



PROBLEMA 9.16

9.21 Calcule  $v_1$  e  $v_2$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .

9.22 Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .

9.23 Calcule  $i$ ,  $t > 0$ , se não há energia inicial armazenada e (a)  $R = 1/2 \Omega$ ,  $\mu = 2$ ; (b)  $R = 1/2 \Omega$ ,  $\mu = 1$ ; e (c)  $R = 1/4 \Omega$ ,  $\mu = 2$ .

9.24 Calcule  $i$ ,  $t > 0$ , se não há energia inicial armazenada e (a)  $C = 1/12$  F, (b)  $C = 1/16$  F e (c)  $C = 1/32$  F.

9.25 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se  $i_g = 10$  A e o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .

9.26 Encontre o valor máximo para a resposta com amortecimento cúbico do Prob. 9.25 e o tempo em que isto ocorre, se  $i_g = 10 u(-t)$  A.

9.27 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se  $i(0) = 2$  A e  $v(0) = 6$  V.

9.28 Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se (a)  $i_g = 2u(t)$  A, e (b)  $i_g = 2e^{-t}u(t)$  A.

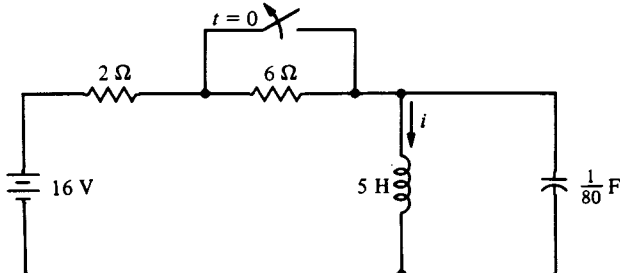
9.29 Calcule  $i$ ,  $t > 0$ , se  $v(0) = 6$  V e  $i(0) = 2$  A

9.30 Calcule  $v$  para  $t > 0$ .

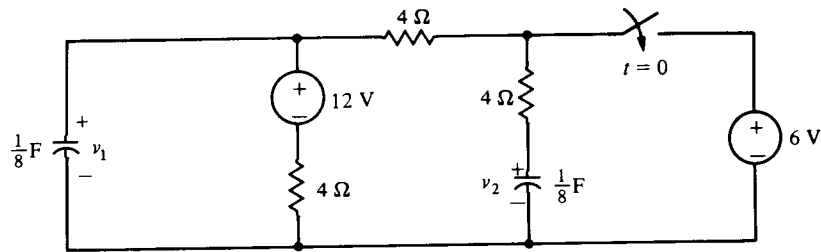
9.31 Calcule  $v$  para  $t > 0$ . (b) Substitua as fontes de corrente e de tensão por  $2 \cos 2t$  A e  $6 \cos 2t$  V, respectivamente, com as mesmas polaridades e calcule  $v$  para  $t > 0$  se não existir nenhuma energia inicial armazenada.

9.32 Calcule  $v$ ,  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ . (Note que este é o circuito da Fig. 9.12.)

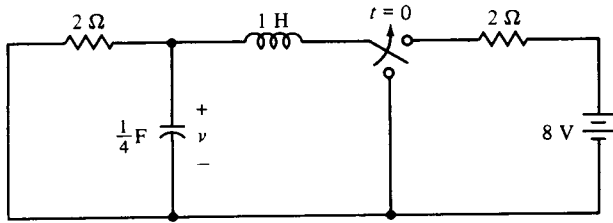
9.33 Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se  $v(0) = 4$  V e  $i(0) = 3$  A.



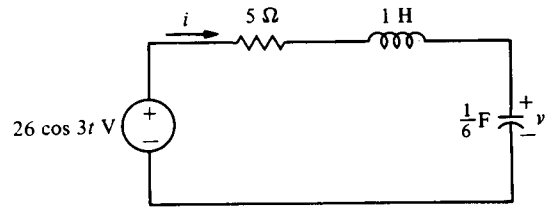
PROBLEMA 9.17



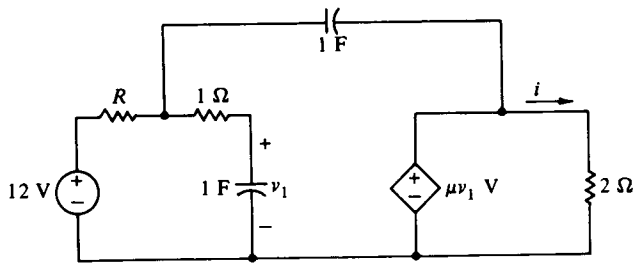
PROBLEMA 9.21



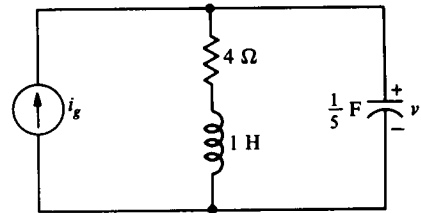
PROBLEMA 9.22



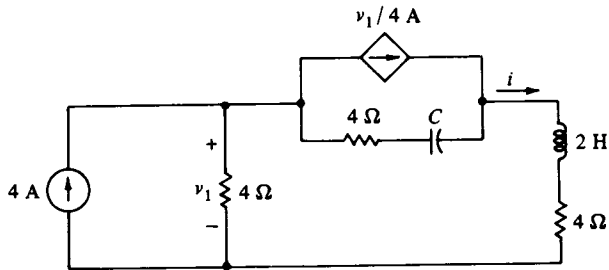
PROBLEMA 9.27



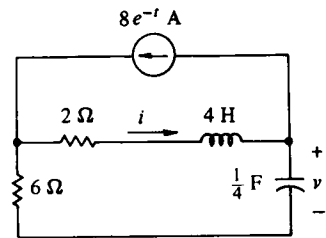
PROBLEMA 9.23



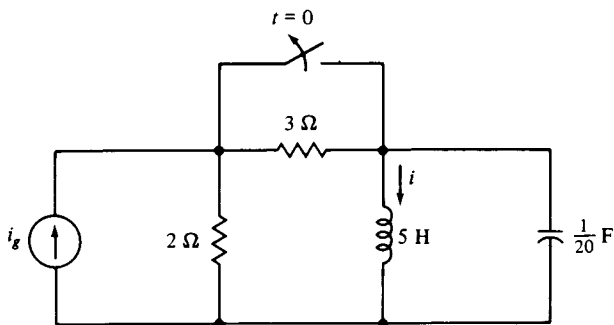
PROBLEMA 9.28



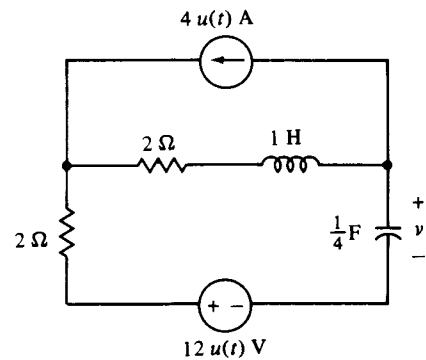
PROBLEMA 9.24



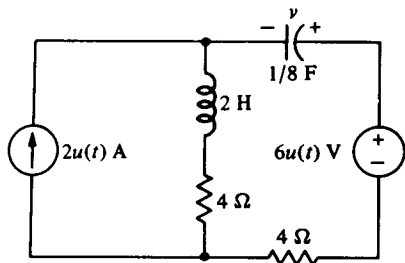
PROBLEMA 9.29



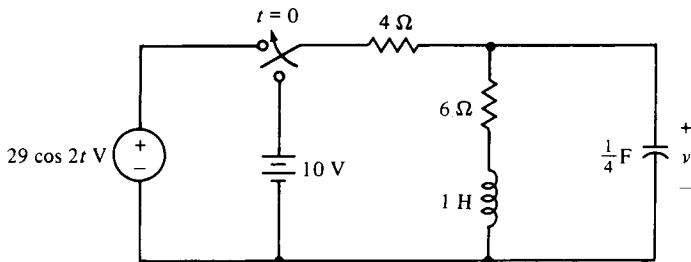
PROBLEMA 9.25



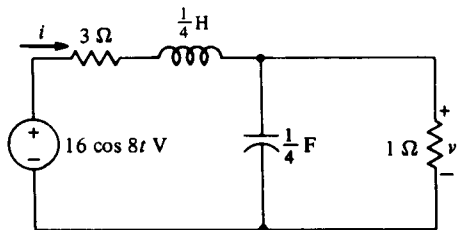
PROBLEMA 9.30



**PROBLEMA 9.31**

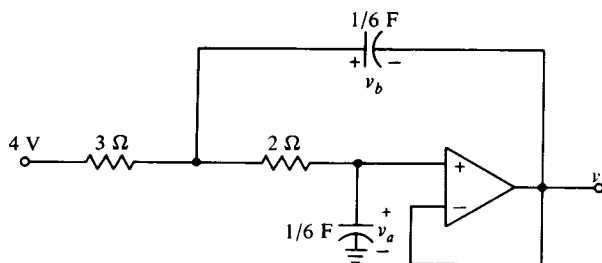


**PROBLEMA 9.32**

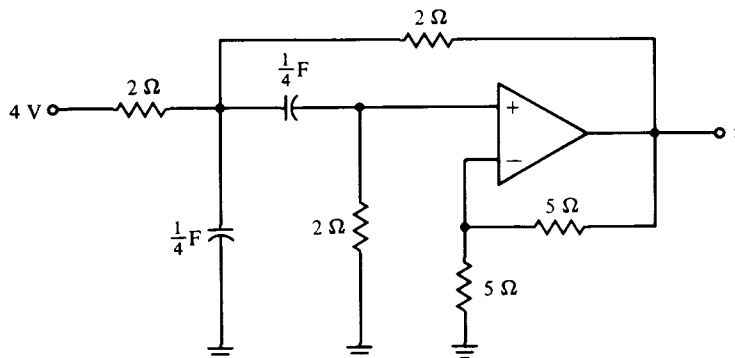


**PROBLEMA 9.33**

9.34 (a) Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se  $v_a(0) = 0$  e  $v_b(0) = 2$  V. (b) Repita a parte (a) se a fonte de 4-V é trocada por uma de  $26 \cos 2t$  V. (c) Repita a parte (a) se a fonte de 4-V foi substituída por uma de  $2e^{-t}$  V.

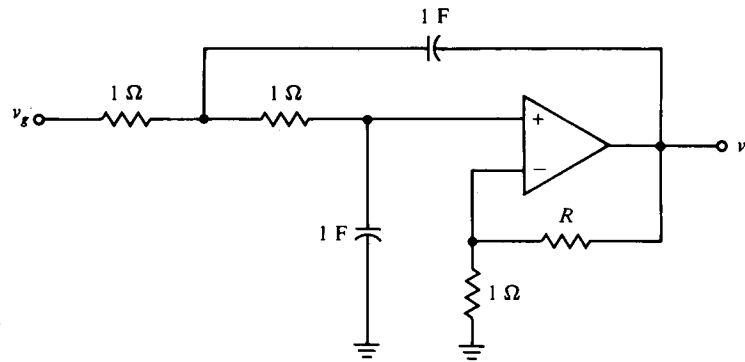


**PROBLEMA 9.34**



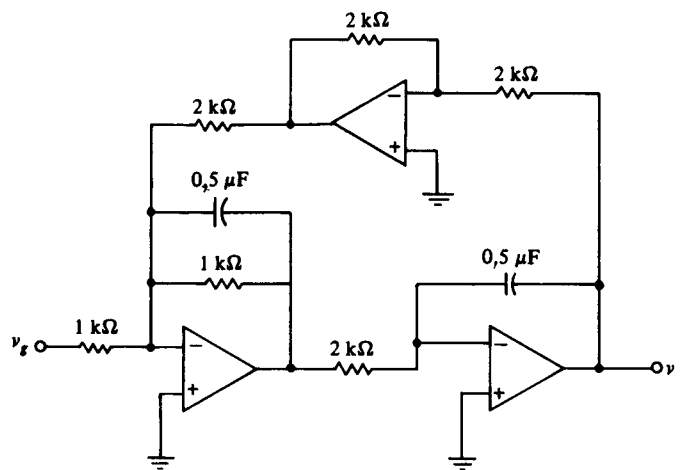
**PROBLEMA 9.35**

9.35 Calcule  $v$  para  $t > 0$  se não existe energia inicial armazenada.  
 9.36 Calcule o valor ou a faixa de valores de  $\mu = 1 + R \geq 1$  tal que o circuito seja (a) superamortecido, (b) subamortecido e (c) amortecimento crítico. (Nota: A saída é  $v$  e  $\mu \leq 3$  para assegurar que a resposta natural decai ao invés de crescer com o tempo.)



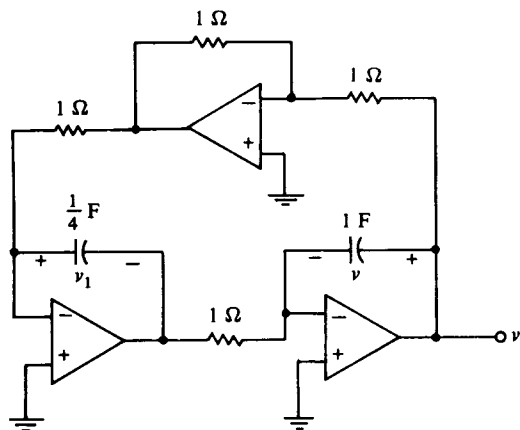
**PROBLEMA 9.36**

9.37 Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se não existe energia inicial armazenada e  $v_s = 5$  V.



**PROBLEMA 9.37**

9.38 Calcule  $v$ ,  $t > 0$ , se (a)  $v_1(0) = 4$  V,  $v(0) = 0$ ; (b)  $v_1(0) = 0$ ,  $v(0) = 2$  V; e (c)  $v_1(0) = 4$  V,  $v(0) = 2$  V. (Note que a resposta é uma resposta não-forçada senoidal. Tal circuito é chamado um *oscilador harmônico*.)



PROBLEMA 9.38

9.39 Equações diferenciais de ordem elevada podem ser resolvidas da mesma forma que as equações de segundo grau. Existem mais frequências naturais e logo mais termos na resposta natural. Por exemplo, se

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 6\frac{d^2x}{dt^2} + 11\frac{dx}{dt} + 6x = 12$$

mostre que a equação característica

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$$

tem as frequências naturais

$$s = -1, -2, -3$$

como suas raízes. Desta forma, mostre que resposta natural é

$$x_n = A_1e^{-t} + A_2e^{-2t} + A_3e^{-3t}$$

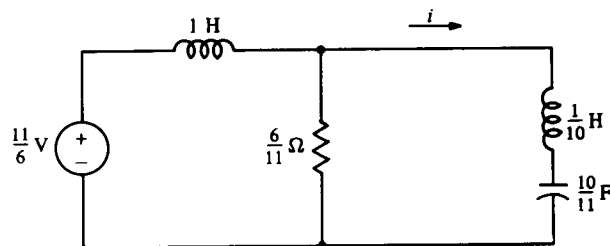
Mostre também que a resposta forçada é

$$x_f = 2$$

e que a solução geral é

$$x = x_n + x_f$$

9.40 Usando os resultados do Prob. 9.39 calcule  $i$ ,  $t > 0$ , se não existe energia inicial armazenada.



PROBLEMA 9.40

## PROBLEMAS DE APLICAÇÕES DE COMPUTADORES

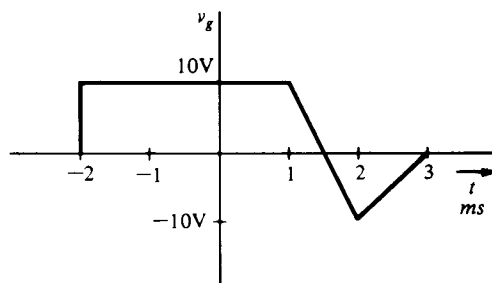
9.41 Use o SPICE para plotar  $i$  no Prob. 9.10, no intervalo  $0 < t < 1$  s.

9.42 Use o SPICE para plotar  $i$  no Prob. 9.27 no intervalo  $0 < t < 1$  s.

9.43 Use o SPICE no Prob. 9.37, para plotar  $v$  e  $v_x$  no intervalo  $0 < t < 0,01$  s se  $v_c = 12[u(t) - u(t - 0,001)]$  V.

9.44 Use o SPICE para plotar  $v$  no Prob. 9.38 no intervalo  $0 < t < 5$  s.

9.45 Use o SPICE para plotar  $i$  no Prob. 9.40 se a fonte de 11/6-V é substituída por  $v_c$  do gráfico mostrado.



PROBLEMA 9.45



Charles Proteus Steinmetz  
1865-1923

---

*Eu encontrei a equação que nos habilitará a transmitir eletricidade por meio de corrente alternada através de milhares de milhas. Eu a reduzi a um simples problema algébrico.*

*Charles Proteus Steinmetz*

---

## Excitação Senoidal e Fasores

O uso de números complexos para resolver problemas em circuito c.a. — o chamado método fasorial, estudado neste capítulo — foi efetuado primeiramente pelo matemático e engenheiro elétrico germânico-austriaco Charles Proteus Steinmetz, em um artigo apresentado em 1893. Ele é também citado pelas leis de histerese e por seu trabalho relacionado a descargas atmosféricas.

Steinmetz nasceu em Breslau, Alemanha, filho de um ferroviário de uma estatal. Ele tinha deformações de nascença e perdeu sua mãe quando tinha apenas 1 ano de idade. Mas isto não o impediu de se tornar um gênio científico. Da mesma forma que seu trabalho sobre histerese atraiu a atenção da comunidade científica, suas atividades políticas, quando estava na Universidade de Breslau, chamaram a atenção da polícia. Steinmetz foi forçado a fugir do país justamente quando terminava seu trabalho de doutorado, nunca recebendo o grau de doutor. Ele realizou pesquisa em eletricidade nos Estados Unidos, principalmente na General Electric Company. Seu artigo sobre números complexos revolucionou a análise de circuitos c.a., apesar de ter sido dito na época da publicação que ninguém exceto Steinmetz entendia o método. Em 1897, ele publicou o primeiro livro que transformava os cálculos de c.a. numa ciência. ■

Nos dois capítulos anteriores analisamos circuitos contendo elementos dinâmicos e vimos que a resposta completa é a soma das respostas natural e forçada. A resposta natural de um dado circuito é obtida do circuito morto e, portanto, é independente de fontes ou excitações. A resposta forçada, por outro lado, depende diretamente do tipo de excitação aplicada ao circuito. No caso de uma fonte c.c., a resposta forçada é uma resposta em regime permanente c.c., uma excitação exponencial resulta em uma resposta forçada exponencial e assim por diante.

Uma das excitações mais importantes é a função de excitação senoidal. Senóides são abundantes na natureza, como, por exemplo, no movimento de um pêndulo, no quicar de uma bola e nas vibrações de cordas ou membranas. Também, como vimos, a resposta natural de um circuito de segunda ordem subamortecido é uma senóide amortecida e, na ausência de amortecimento, uma senóide pura.

Em engenharia elétrica, funções senoidais são extremamente importantes por inúmeras razões. Sinais de onda portadora gerados para o propósito de comunicações são senoidais e, é claro, a senóide é a excitação dominante da indústria elétrica de potência mundial, para citar apenas dois exemplos muito importantes. Com efeito, como vamos ver posteriormente no estudo das séries de Fourier, quase toda excitação empregada em engenharia elétrica pode ser resolvida em componentes senoidais.

Devido à sua importância, circuitos com uma função de excitação senoidal serão estudados em detalhes neste capítulo. Visto que a resposta natural é independente das fontes e pode ser encontrada pelos métodos dos capítulos anteriores, iremos nos concentrar somente em calcular a resposta forçada. Esta resposta é importante por si própria, visto que ela é a resposta ao regime permanente c.c., que permanece após a resposta natural transitória ter ocorrido.

Visto que estamos interessados somente em resposta de regime permanente c.a., não nos limitaremos, como fizemos nos Capítulos 8 e 9, a circuitos de primeira e segunda ordem. Como iremos ver, circuitos *RLC* de ordem mais elevada podem ser resolvidos, no que diz respeito à resposta em regime permanente c.a., na mesma forma que em circuitos resistivos.

## 10.1

### Propriedades das Senóides

Vamos dedicar esta seção a rever algumas propriedades da função senoidal. Vamos iniciar com a onda senoidal,

$$v(t) = V_m \text{ sen } \omega t \quad (10.1)$$

que está esboçada na Fig. 10.1. A *amplitude* da senóide é  $V_m$ , que é o máximo valor que a função atinge. A *freqüência em radiano* ou a *freqüência angular* é  $\omega$ , medida em radianos por segundo (rad/s).

A senóide é uma função *periódica*, definida genericamente pela propriedade

$$v(t + T) = v(t) \quad (10.2)$$

onde  $T$  é o *período*, isto é, a função vai ao longo de um ciclo completo, ou período, que é então repetido,



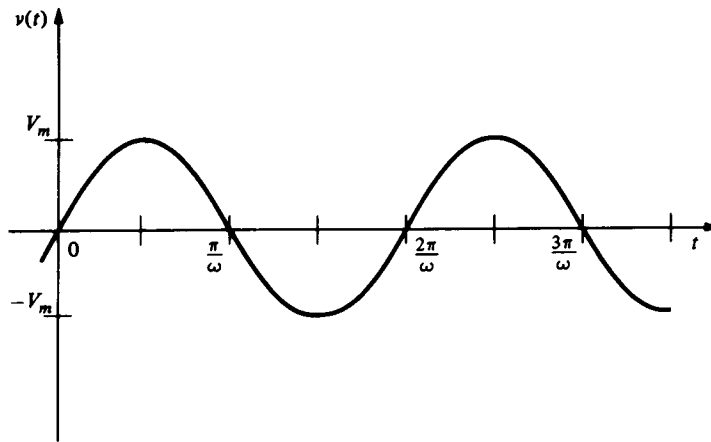


FIGURA 10.1 Função senoidal

a cada  $T$  segundos. No caso de uma senóide, o período é

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (10.3)$$

como podemos ver de (10.1) e (10.2). Desta forma em 1 s, a função vai ao longo de  $1/T$  ciclos, ou períodos. Sua frequência  $f$  é então

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (10.4)$$

ciclos por segundo, ou *hertz* (abreviado Hz). O último termo tem o nome do físico alemão Heinrich R. Hertz (1857-1894), e é agora a unidade normalizada para frequência. Alguns livros antigos usam o termo anterior, mas ele está em desuso. A relação entre a frequência e frequência angular é dada em (10.4) como sendo

$$\omega = 2\pi f \quad (10.5)$$

Uma expressão em seno, mais geral, é dada por

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (10.6)$$

onde  $\phi$  é o *ângulo de fase* ou simplesmente *fase*. Para ser consistente, visto que  $\omega t$  é em radianos,  $\phi$  deve ser expresso em radianos. Contudo, em engenharia elétrica, é frequentemente conveniente especificar  $\phi$  em graus. Por exemplo, podemos escrever

$$v = V_m \text{sen}\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

ou

$$v = V_m \text{sen}(2t + 45^\circ)$$

mesmo considerando que a última expressão contém uma inconsistência matemática.

Um desenho de (10.6) é mostrado na Fig. 10.2 por linhas cheias, enquanto o desenho de (10.1) é mostrado em tracejado. A curva cheia é simplesmente a curva tracejada deslocada de  $\phi/\omega$  segundos, ou  $\phi$  radianos, para a esquerda. Portanto, os pontos sobre a curva cheia, como seus picos, ocorrem  $\phi$  rad ou  $\phi/\omega$  segundos antes dos pontos correspondentes na curva tracejada. Conseqüentemente, podemos

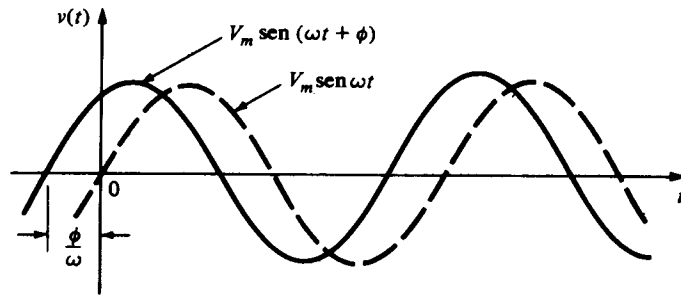


FIGURA 10.2 Duas senóides com fases diferentes

dizer que  $V_m \text{ sen } (\omega t - \phi)$  *antecede* ou está adiantada de  $V_m \text{ sen } \omega t$  por  $\phi$  rad (ou graus). Em geral, a senóide

$$v_1 = V_{m1} \text{ sen } (\omega t + \alpha)$$

antecede a senóide

$$v_2 = V_{m2} \text{ sen } (\omega t + \beta)$$

por  $\alpha - \beta$ . Uma expressão equivalente é que  $v_2$  segue ou está atrasada de  $v_1$  de  $\alpha - \beta$ .

Como um exemplo, considere

$$v_1 = 4 \text{ sen } (2t + 30^\circ)$$

e

$$v_2 = 6 \text{ sen } (2t - 12^\circ)$$

Então,  $v_1$  antecede  $v_2$  (ou  $v_2$  segue  $v_1$ ) por  $30 - (-12) = 42^\circ$ .

Até aqui, temos considerado mais funções seno que funções coseno na definição de senóides. Isso não importa, visto que

$$\cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \text{sen } \omega t \quad (10.7)$$

ou

$$\text{sen} \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \omega t \quad (10.8)$$

A única diferença entre o seno e o coseno é, então, o ângulo de fase. Por exemplo, podemos escrever (10.6) como

$$v(t) = V_m \cos \left( \omega t + \phi - \frac{\pi}{2} \right)$$

### EXEMPLO 10.1

Para determinar quanto uma senóide antecede ou segue outra da mesma frequência, precisamos primeiro expressar ambas como ondas senoidais ou ondas cossenoidais, com amplitude positiva. Por exemplo, assuma

$$v_1 = 4 \cos (2t + 30^\circ)$$

e

$$v_2 = -2 \text{ sen } (2t + 18^\circ)$$

Logo, visto que

$$-\text{sen } \omega t = \text{sen} (\omega t + 180^\circ)$$

temos

$$\begin{aligned} v_2 &= 2 \operatorname{sen}(2t + 18^\circ + 180^\circ) \\ &= 2 \operatorname{cos}(2t + 18^\circ + 180^\circ - 90^\circ) \\ &= 2 \operatorname{cos}(2t + 108^\circ) \end{aligned}$$

Comparando esta última expressão com  $v_1$ , vemos que  $v_1$  antecede  $30^\circ - 108^\circ = -78^\circ$ , que é o mesmo que dizer que  $v_1$  está defasado de  $78^\circ$  em relação a  $v_2$ .

A soma de uma onda senoidal e uma onda cossenoidal de mesma frequência é outra senóide de mesma frequência. Para mostrar isto, considere

$$A \operatorname{cos} \omega t + B \operatorname{sen} \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \left[ \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \operatorname{cos} \omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \operatorname{sen} \omega t \right]$$

que, pela Fig. 10.3, pode ser escrita

$$A \operatorname{cos} \omega t + B \operatorname{sen} \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} (\operatorname{cos} \omega t \operatorname{cos} \theta + \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \theta)$$

de uma fórmula da trigonometria, obtemos

$$A \operatorname{cos} \omega t + B \operatorname{sen} \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \operatorname{cos}(\omega t - \theta) \quad (10.9)$$

onde, segundo a Fig. 10.3,

$$\theta = \tan^{-1} \frac{B}{A} \quad (10.10)$$

Um resultado similar pode ser estabelecido se os termos seno e coseno têm ângulos de fase diferentes de zero, indicando que, em geral, a soma de duas senóides de uma dada frequência é uma outra senóide da mesma frequência.

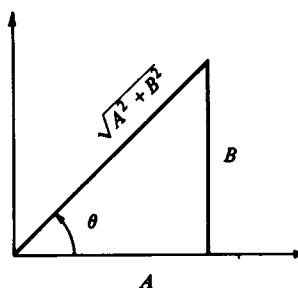


FIGURA 10.3 Triângulo útil na soma de duas senóides

Deve ficar claro o significado de (10.10), visto que alguns livros matemáticos tomam esta expressão como o valor principal do arco tangente e colocam  $\theta$  em um quadrante específico. Dizemos que o ponto terminal do ângulo  $\theta$  está no quadrante onde o ponto  $(A, B)$  está localizado.

## EXEMPLO 10.2

Como um exemplo, temos

$$\begin{aligned} -5 \operatorname{cos} 3t + 12 \operatorname{sen} 3t &= \sqrt{5^2 + 12^2} \operatorname{cos} \left[ 3t - \tan^{-1} \left( \frac{12}{-5} \right) \right] \\ &= 13 \operatorname{cos}(3t - 112,6^\circ) . \end{aligned}$$

visto que  $\tan^{-1}(12/-5)$  está no segundo quadrante, porque  $A = -5 < 0$  e  $B = 12 > 0$ .

## EXERCÍCIOS

10.1.1 Calcule o período das seguintes senóides:

(a)  $4 \cos (5t + 33^\circ)$ .

(b)  $\cos \left( 2t + \frac{\pi}{4} \right) + 3 \operatorname{sen} \left( 2t - \frac{\pi}{6} \right)$ .

(c)  $6 \cos 2\pi t$ .

Resposta: (a)  $2\pi/5$ ; (b)  $\pi$ ; (c) 1

10.1.2 Calcule a amplitude e a fase das seguintes senóides:

(a)  $3 \cos 2t + 4 \operatorname{sen} 2t$ .

(b)  $(4\sqrt{3} - 3) \cos (2t + 30^\circ) + (3\sqrt{3} - 4) \cos (2t + 60^\circ)$

[Sugestão: em (b), expanda ambas as funções e use (10.9).]

Resposta: (a) 5,  $-53,1^\circ$ ; (b) 5,  $36,9^\circ$

10.1.3 Calcule a frequência das seguintes senóides:

(a)  $3 \cos (6\pi t - 10^\circ)$ .

(b)  $4 \operatorname{sen} 377t$ .

Resposta: (a) 3; (b) 60 Hz

## 10.2

### Exemplo de um Circuito RL

Como um exemplo de um circuito com uma excitação senoidal, vamos encontrar a componente forçada  $i_f$  da corrente  $i$  na Fig. 10.4. A equação representativa é

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos \omega t \quad (10.11)$$

e, seguindo o método do capítulo anterior, vamos assumir a solução tentativa

$$i_f = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$$

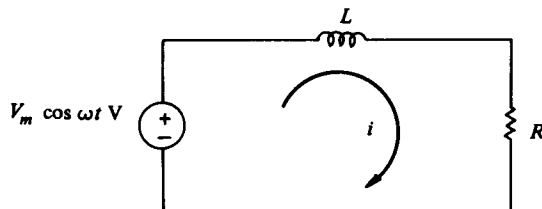


FIGURA 10.4 Circuito RL

Substituindo esta solução tentativa em (10.11) temos

$$L(-\omega A \operatorname{sen} \omega t + \omega B \cos \omega t) + R(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t) = V_m \cos \omega t$$

Portanto, igualando os coeficientes dos termos análogos da equação, temos

$$RA + \omega LB = V_m$$

$$-\omega LA + RB = 0$$

da qual

$$A = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$B = \frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

A resposta forçada é então

$$i_f = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{\omega L V_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \operatorname{sen} \omega t$$

que, por (10.9) e (10.10), pode ser escrita como

$$i_f = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left( \omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right) \quad (10.12)$$

A resposta forçada é, portanto, uma senóide como a excitação, como prevíamos quando escolhemos a solução. Podemos escrevê-la na forma

$$i_f = I_m \cos (\omega t + \phi) \quad (10.13)$$

onde

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

e

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \quad (10.14)$$

Visto que a resposta natural é

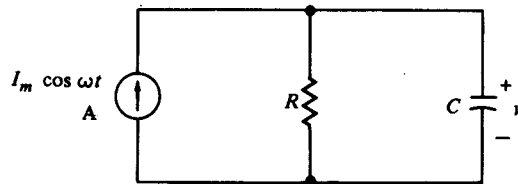
$$i_n = A_1 e^{-Rt/L}$$

é claro que após um curto intervalo de tempo,  $i_n \rightarrow 0$ , e a corrente estabiliza em seu valor de regime permanente c.a., dado por (10.2).

O método que usamos é direto e convencional, mas como o leitor certamente concordará, é muito trabalhoso para um problema tão simples. Para um circuito de segunda ordem, o método é mais tedioso, como foi ilustrado no exemplo de (9.34). Para circuitos de ordem mais elevada o procedimento é, sem dúvida, até mesmo mais complicado. Evidentemente, necessitamos de um método melhor. Um desses métodos é desenvolvido no restante deste capítulo, e seu uso nos permite estudar circuitos com elementos armazenadores da mesma forma que tratamos os circuitos resistivos nos Capítulos 2, 4 e 5.

## EXERCÍCIOS

- 10.2.1** Calcule a resposta forçada  $i_f$  na Fig. 10.4, se  $L = 60$  mH,  $R = 8$  k $\Omega$ ,  $V_m = 4$  V, e  $\omega = 100.000$  rad/s.  
Resposta:  $0,4 \cos (100.000 t - 36,9^\circ)$  mA



EXERCÍCIO 10.2.2

- 10.2.2** Calcule a componente forçada de  $v$ .  
Resposta:  $(RI_m/\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}) \cos (\omega t - \tan^{-1} \omega RC)$  V

## 10.3

### Um Método Alternativo Usando Números Complexos

O método alternativo de análise de circuitos com excitação senoidal, que iremos estudar no restante deste capítulo, apóia-se fortemente no conceito de números complexos. O leitor que não está familiarizado

com números complexos, ou que necessite rever este assunto, deve consultar os Apêndices C e D, onde os números complexos e suas propriedades são discutidos com algum detalhe. Por conveniência, iremos listar algumas destas propriedades nesta seção, antes de considerar o método alternativo de análise.

O número complexo  $A$  é escrito na forma retangular como

$$A = a + jb \quad (10.15)$$

onde  $j = \sqrt{-1}$  e os números reais  $a$  e  $b$  são a parte real e imaginária de  $A$ , respectivamente. De forma equivalente, podemos dizer que

$$a = \text{Re } A, \quad b = \text{Im } A$$

onde  $\text{Re}$  e  $\text{Im}$  denotam a *parte real de* e a *parte imaginária de*.

O número  $A$  também pode ser escrito na forma polar

$$A = |A|e^{j\alpha} = |A|/\alpha \quad (10.16)$$

onde  $|A|$  é o módulo, dado por

$$|A| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e  $\alpha$  é o ângulo ou argumento dado por

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

Estas relações entre as formas polar e retangular são ilustradas na Fig. 10.5.

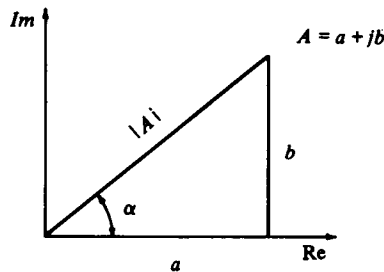


FIGURA 10.5 Representação geométrica de um número complexo  $A$

### EXEMPLO 10.3

Como um exemplo, suponha que temos  $A = 4 + j3$ . Então  $|A| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$  e  $\alpha = \tan^{-1} \frac{3}{4} = 36,9^\circ$ . Portanto, a forma polar é

$$A = 5/36,9^\circ$$

### EXEMPLO 10.4

Como outro exemplo, considere  $A = -5 - j12$ . Visto que tanto  $a$  quanto  $b$  são negativos, o segmento de linha representando  $A$  situa-se no terceiro quadrante, como mostrado na Fig. 10.6, da qual vemos que

$$|A| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

e

$$\alpha = 180^\circ + \tan^{-1} \frac{12}{5} = 247,4^\circ$$

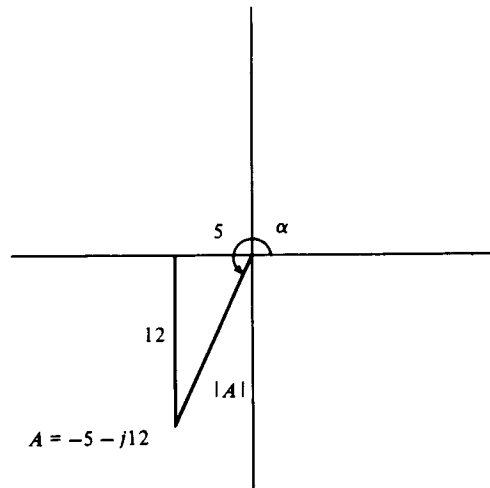
Logo, temos  $A = 13/247,4^\circ$ .

Outras expressões úteis são

$$j = 1/90^\circ$$

$$j^2 = -1 = 1/180^\circ$$

e assim por diante.



**FIGURA 10.6** Número complexo com as partes real e imaginária negativas

Pela fórmula de Euler, que é discutida no Apêndice D e que empregamos anteriormente no Capítulo 9, sabemos que

$$V_m \cos \omega t + jV_m \text{sen } \omega t = V_m e^{j\omega t}$$

Portanto, podemos dizer que

$$V_m \cos \omega t = \text{Re}(V_m e^{j\omega t}) \quad (10.17)$$

e

$$V_m \text{sen } \omega t = \text{Im}(V_m e^{j\omega t})$$

Retornando ao exemplo do circuito *RL* da Fig. 10.4, sabemos que as exponenciais são matematicamente mais fáceis de operar que as excitações senoidais. Contudo, vamos ver o que ocorre se aplicamos uma excitação complexa

$$v_1 = V_m e^{j\omega t} \quad (10.18)$$

em lugar de uma excitação real

$$v_g = V_m \cos \omega t = \text{Re } v_1 \quad (10.19)$$

Não podemos duplicar tal excitação complexa no laboratório, mas não existe razão para não considerá-la de forma abstrata. Neste caso, a componente forçada da corrente que iremos chamar  $i_1$ , satisfaz

$$L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 = v_1 = V_m e^{j\omega t} \quad (10.20)$$

Para resolver esta equação, tentaremos

$$i_1 = Ae^{j\omega t}$$

que, substituída em (10.20), fica

$$(j\omega L + R)Ae^{j\omega t} = V_m e^{j\omega t}$$

da qual

$$\begin{aligned} A &= \frac{V_m}{R + j\omega L} \\ &= \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-j \tan^{-1} \omega L/R} \end{aligned}$$

usando divisão de números complexos. Portanto, temos

$$i_1 = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\omega t - \tan^{-1} \omega L/R)}$$

Vamos agora observar que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} i_1 &= \operatorname{Re} \left[ \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\omega t - \tan^{-1} \omega L/R)} \right] \\ &= \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left( \omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right) \end{aligned}$$

que, por (10.12) é a resposta forçada correta da Fig. 10.4. Isto é,

$$i_f = \operatorname{Re} i_1 \quad (10.21)$$

Verificamos para este caso o interessante resultado que, se  $i_1$  é a resposta complexa para a função forçante complexa  $v_1$ , logo  $i_f = \operatorname{Re} i_1$  é a resposta para  $v_g = \operatorname{Re} v_1$ . Isto é,  $v_1$  produz  $i_1$  e  $\operatorname{Re} v_1 = v_g$  produz  $R$  e  $i_1 = i_f$ . A razão para isto é que a equação representativa (10.20) contém somente coeficientes reais. Desta forma, de (10.20), temos

$$\operatorname{Re} \left( L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 \right) = \operatorname{Re} v_1$$

ou

$$L \frac{d}{dt} (\operatorname{Re} i_1) + R (\operatorname{Re} i_1) = V_m \cos \omega t$$

e, portanto, de (10.11),

$$i = i_f = \operatorname{Re} i_1 \quad (10.22)$$

Desta forma, vemos que é mais fácil o uso da função de excitação complexa  $v_1$  para encontrar a resposta complexa  $i_1$ . Logo, visto que a função de excitação real é  $\operatorname{Re} v_1$ , a resposta real é  $\operatorname{Re} i_1$ . Este princípio se mantém para todos os circuitos de nossa análise, visto que as equações representativas são lineares com coeficientes reais, como pode ser visto no desenvolvimento análogo para chegar a (10.22).

## EXERCÍCIOS

- 10.3.1** Troque a função de excitação real  $I_m \cos \omega t$  no Ex. 10.2.2 pela função de excitação complexa  $I_m e^{j\omega t}$ . Calcule a resposta complexa resultante  $v_1$  e mostre que a resposta real é  $v = \operatorname{Re} v_1$ .
- 10.3.2** Demonstre que, para  $a$  real,

$$\operatorname{Re} \left( a \frac{dx}{dt} \right) = a \frac{d}{dt} (\operatorname{Re} x)$$

- e use este resultado para verificar (10.22). (*Sugestão: faça  $x = f + jg$ , onde  $f$  e  $g$  são reais.*)
- 10.3.3** No Ex. 10.2.2, substitua a fonte de corrente por  $i_1 = I_m e^{j\omega t}$ . A e demonstre que a resposta  $v_1$  tem a propriedade que  $\operatorname{Re} v_1 = v$ , onde  $v$  é a resposta original.

## 10.4

### Excitações Complexas

Vamos agora generalizar os resultados usando funções de excitação complexas na seção anterior. A excitação, bem como a resposta forçada, podem ser uma tensão ou uma corrente senoidal. Contudo, sendo específico, vamos considerar a entrada como sendo uma fonte de tensão e a saída como sendo uma corrente através de algum elemento. Os outros casos podem ser considerados de forma análoga.



Em geral, sabemos que, se

$$v_g = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad (10.23)$$

então, a resposta forçada é da forma

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi) \quad (10.24)$$

como indicado no circuito geral da Fig. 10.7. Portanto, se por algum modo podemos calcular  $I_m$  e  $\phi$  teremos nossa resposta, visto que  $\omega$ ,  $\theta$  e  $V_m$  são conhecidos.

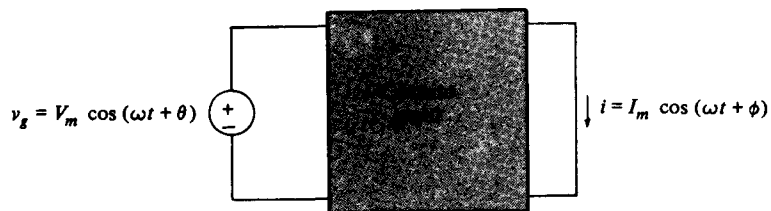


FIGURA 10.7 Circuito geral com entrada e saída

Para resolver para  $i$  na Fig. 10.7, vamos aplicar a excitação complexa

$$v_1 = V_m e^{j(\omega t + \theta)} \quad (10.25)$$

e encontrar a resposta complexa  $i_1$ , como mostrado na Fig. 10.8. Então, sabemos dos resultados da seção anterior, que a resposta real da Figura 10.7 é

$$i = \text{Re } i_1 \quad (10.26)$$

Isto é uma consequência do fato que os coeficientes na equação representativa são reais, como indicado anteriormente.

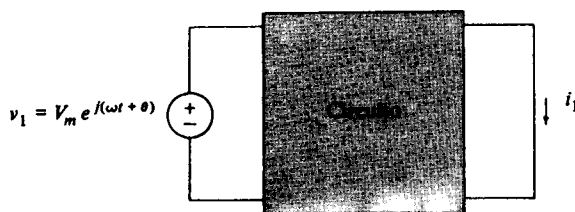


FIGURA 10.8 Circuito geral com uma excitação complexa

A equação representativa pode ser resolvida para a resposta forçada pelo método do Capítulo 9. Isto é, visto que podemos escrever a excitação como

$$v_1 = V_m e^{j\theta} e^{j\omega t} \quad (10.27)$$

que é uma constante multiplicada por  $e^{j\omega t}$ , logo a solução tentativa é

$$i_1 = A e^{j\omega t}$$

Comparando (10.14) e (10.26), devemos ter

$$I_m \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}[A e^{j\omega t}]$$

que requer que

$$A = I_m e^{j\phi}$$

e, portanto

$$i_1 = I_m e^{j\phi} e^{j\omega t} \quad (10.28)$$

Pegando a parte real, teremos a solução de (10.24), certamente.

## EXEMPLO 10.5

Como um exemplo, vamos calcular a resposta forçada  $i_f$  de

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2 \frac{di}{dt} + 8i = 12\sqrt{2} \cos(2t + 15^\circ)$$

Primeiro, trocamos a excitação real pela excitação complexa,

$$v_1 = 12\sqrt{2} e^{j(2t + 15^\circ)}$$

onde, por conveniência, a fase foi escrita em graus (isto é, certamente, uma expressão matemática inconsistente, mas se interpretada corretamente, ela não apresentará dificuldades). A resposta complexa  $i_1$  satisfaz

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + 2 \frac{di_1}{dt} + 8i_1 = 12\sqrt{2} e^{j(2t + 15^\circ)}$$

e ela deve ter a forma geral

$$i_1 = A e^{j2t}$$

Portanto, devemos ter

$$(-4 + j4 + 8)A e^{j2t} = 12\sqrt{2} e^{j2t} e^{j15^\circ}$$

ou

$$A = \frac{12\sqrt{2} e^{j15^\circ}}{4 + j4} = \frac{12\sqrt{2} / 15^\circ}{4\sqrt{2} / 45^\circ} = 3 / -30^\circ$$

que dá

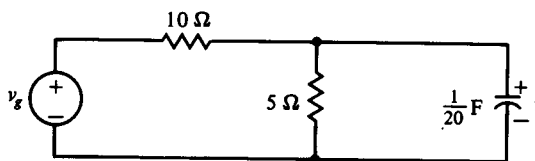
$$\begin{aligned} i_1 &= (3 / -30^\circ) e^{j2t} \\ &= 3 e^{j(2t - 30^\circ)} \end{aligned}$$

Então, a resposta real é

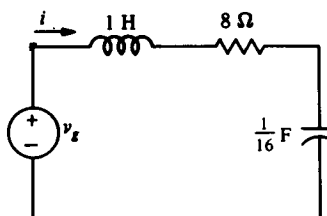
$$i_f = \text{Re } i_1 = 3 \cos(2t - 30^\circ)$$

## EXERCÍCIOS

- 10.4.1 (a) Das equações no domínio do tempo, calcule a resposta forçada  $v$  se  $v_g = 10e^{8t}$  V.  
(b) Usando o resultado em (a), calcule a resposta forçada  $v$  se  $v_g = 10 \cos 8t$  V.  
Resposta: (a)  $2e^{(8t - 53,1^\circ)}$  V; (b)  $2 \cos(8t - 53,1^\circ)$  V



EXERCÍCIO 10.4.1



EXERCÍCIO 10.4.3

- 10.4.2** Calcule a resposta forçada  $v$  no Ex. 10.4.1, se  $v_g = 10 \sin 8t$  V. (Sugestão:  $\sin 8t = \text{Im } e^{j8t}$ ).  
Resposta:  $2 \sin (8t - 53,1^\circ)$  V
- 10.4.3** Usando o método de excitação complexa, calcule a resposta forçada  $i$ , se  $v_g = 20 \cos 2t$  V.  
Resposta:  $2 \cos (2t + 36,9^\circ)$  A
- 10.4.4** Repita o Ex. 10.4.3, se  $v_g = 16 \cos 4t$  V.  
Resposta:  $2 \cos 4t$  A

## 10.5

### Fasores

Os resultados obtidos na seção precedente podem ser colocados em uma forma muito mais compacta pelo uso de grandezas chamadas *fasores*, que iremos abordar nesta seção. O método fasorial de análise de circuitos é creditado geralmente a Charles Proteus Steinmetz (1865-1923), um famoso engenheiro elétrico da General Electric Company, no início deste século.

Para iniciar, vamos lembrar a tensão senoidal geral, que

$$v = V_m \cos (\omega t + \theta) \quad (10.29)$$

sem dúvida, é a fonte de tensão  $v_g$  da seção anterior. Se a frequência  $\omega$  é conhecida, então  $v$  é completamente especificada por sua amplitude  $V_m$  e sua fase  $\theta$ . Estas grandezas são mostradas como um número complexo,

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\theta} = V_m \angle \theta \quad (10.30)$$

que é definido como um *fasor*, ou uma representação *fasorial*. Para distingui-los de outros números complexos, os fasores são impressos em **negrito**, como indicado.

A razão para a definição do fasor pode ser vista da equivalência, pela fórmula de Euler de

$$V_m \cos (\omega t + \theta) = \text{Re}(V_m e^{j\theta} e^{j\omega t}) \quad (10.31)$$

Portanto, considerando (10.29) e (10.30) temos

$$v = \text{Re}(\mathbf{V} e^{j\omega t}) \quad (10.32)$$

### EXEMPLO 10.6

Como um exemplo, suponha que

$$v = 10 \cos (4t + 30^\circ) \text{ V}$$

A representação fasorial é, então,

$$\mathbf{V} = 10 \angle 30^\circ \text{ V}$$

visto que  $V_m = 10$  e  $\theta = 30^\circ$ . Reciprocamente, visto que  $\omega = 4$  rad/s é suposto conhecido,  $v$  é prontamente obtida de  $\mathbf{V}$ .

Em uma forma idêntica, definimos a representação fasorial da corrente no domínio do tempo

$$i = I_m \cos (\omega t + \phi) \quad (10.33)$$

sendo

$$\mathbf{I} = I_m e^{j\phi} = I_m \angle \phi \quad (10.34)$$

Então, se sabemos, por exemplo, que  $\omega = 6$  rad/s e que  $\mathbf{I} = 2 \angle 15^\circ$  A, então temos

$$i = 2 \cos (6t + 15^\circ) \text{ A}$$

Optamos por representar senóides e seus fasores com base em funções cossenos, embora pudéssemos ter escolhido funções seno. Portanto, se uma função como

$$v = 8 \operatorname{sen} (3t + 30^\circ)$$

é dada, podemos mudá-la para

$$\begin{aligned} v &= 8 \cos (3t + 30^\circ - 90^\circ) \\ &= 8 \cos (3t - 60^\circ) \end{aligned}$$

Então, a representação fasorial é

$$\mathbf{V} = 8 \angle -60^\circ$$

Se tivéssemos escolhido tomar por base dos fasores a função seno, então poderíamos manter  $v$  como é, e escrever o seu fasor como  $8 \angle 30^\circ$ , que, sem dúvida, representaria  $8 \operatorname{sen} (3t + 30^\circ)$  no domínio do tempo.

### EXEMPLO 10.7

Para ver como o uso de fasores pode simplificar grandemente o trabalho, vamos considerar a Fig. 10.4, e sua equação representativa (10.11), reescrita como

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos \omega t \quad (10.35)$$

Seguindo nosso método, trocamos a excitação  $V_m \cos \omega t$  por uma função de excitação complexa

$$v_1 = V_m e^{j\omega t}$$

que pode ser escrita

$$v_1 = \mathbf{V} e^{j\omega t}$$

visto que  $\theta = 0$ , e, portanto,  $\mathbf{V} = V_m \angle 0 = V_m$ . Substituindo este valor e  $i = i_1$  em (10.35), temos

$$L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 = \mathbf{V} e^{j\omega t}$$

cuja solução  $i_1$  se relaciona à solução real  $i$  por

$$i = \operatorname{Re} i_1$$

A seguir, tentando

$$i_1 = \mathbf{I} e^{j\omega t}$$

como uma solução, temos

$$j\omega L \mathbf{I} e^{j\omega t} + R \mathbf{I} e^{j\omega t} = \mathbf{V} e^{j\omega t}$$

Eliminando o fator  $e^{j\omega t}$  temos a equação fasorial

$$j\omega L \mathbf{I} + R \mathbf{I} = \mathbf{V} \quad (10.36)$$

Portanto,

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R + j\omega L} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

Substituindo este valor na expressão para  $i_1$ , temos

$$i_1 = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\omega t - \tan^{-1} \omega L/R)}$$

Tomando a parte real, temos  $i = i_1$ , obtida anteriormente em (10.12).

É importante notar que se podemos ir diretamente de (10.35) para (10.36), economizaremos tempo e esforço. Também, neste processo convertimos a equação diferencial em uma equação algébrica, semelhante àquelas encontradas em circuitos resistivos. Com efeito, a única diferença é que, aqui, os números são

complexos, enquanto que nos circuitos resistivos eles são reais. Com as calculadoras de mão, disponíveis nos dias de hoje, a dificuldade presente nos números complexos deixa de ser um obstáculo.

No resto do capítulo veremos como podem ser pulados todos os passos entre (10.35) e (10.36), pelo estudo das relações fasoriais dos elementos de circuito e considerando as leis de Kirchhoff e como elas se relacionam com os outros fasores. De fato, como iremos ver, podemos ir diretamente do circuito para (10.36) evitando inclusive escrever a equação diferencial.

Em geral, as soluções reais são funções no domínio do tempo, e seus fasores são funções no *domínio da frequência*; i.é., elas são funções da frequência  $\omega$ . Isto é ilustrado pelo fasor I do último exemplo. Logo, para resolver problemas do domínio do tempo, podemos converter para fasores e encontrar a solução dos problemas no domínio da frequência, que são geralmente muito mais fáceis. Finalmente, convertamos de volta ao domínio do tempo encontrando a função no tempo de sua representação fasorial.

## EXERCÍCIOS

- 10.5.1** Calcule a representação fasorial de (a)  $6 \cos(2t + 45^\circ)$ , (b)  $4 \cos 2t + 3 \sin 2t$ , e (c)  $-6 \sin(5t - 65^\circ)$ .  
*Resposta:* (a)  $6\angle 45^\circ$ ; (b)  $5\angle -36,9^\circ$ ; (c)  $6\angle 25^\circ$
- 10.5.2** Calcule a função no domínio do tempo representada pelos fasores (a)  $10\angle -17^\circ$  (b)  $6 + j8$ , e (c)  $-j6$ . Em todos os casos,  $\omega = 3$ .  
*Resposta:* (a)  $10 \cos(3t - 17^\circ)$ ; (b)  $10 \cos(3t + 53,1^\circ)$ ; (c)  $6 \cos(3t - 90^\circ)$

## 10.6

### Relações Tensão-corrente para Fasores

Nesta seção iremos mostrar que as relações entre as tensões fasoriais e correntes fasoriais para resistores, indutores e capacitores são muito similares à lei de Ohm para resistores. Na realidade, a tensão fasorial é proporcional à corrente fasorial, como na lei de Ohm, com o fator de proporcionalidade sendo uma constante ou uma função da frequência  $\omega$ .

Começaremos estudando a relação tensão-corrente para os resistores,

$$v = Ri \quad (10.37)$$

onde

$$\begin{aligned} v &= V_m \cos(\omega t + \theta) \\ i &= I_m \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (10.38)$$

Se aplicamos a tensão complexa  $V_m e^{j(\omega t + \theta)}$ , a corrente complexa que resulta é  $I_m e^{j(\omega t + \phi)}$ , que, substituída em (10.37), produz

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = R I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

Eliminando o fator  $e^{j\omega t}$ , resulta em

$$V_m e^{j\theta} = R I_m e^{j\phi} \quad (10.39)$$

que, visto que  $V_m e^{j\theta}$  e  $I_m e^{j\phi}$  são os fasores  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$  respectivamente, reduz-se a

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \quad (10.40)$$

Logo, a relação fasorial ou no domínio da frequência para o resistor é exatamente igual à relação no domínio do tempo. As relações tensão-corrente para o resistor são ilustradas na Fig. 10.9.

De (10.39), temos  $V_m = R I_m$  e  $\theta = \phi$ . Logo, a tensão e a corrente senoidais para um resistor têm o mesmo ângulo de fase e, neste caso, eles são ditos como estando *em fase*. Esta relação de fase é mostrada na Fig. 10.10, onde a tensão é representada por linhas cheias e a corrente por linhas tracejadas.

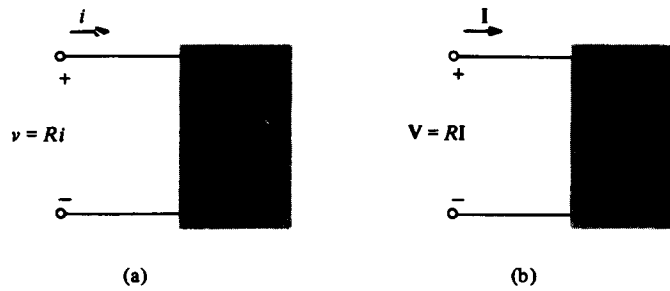


FIGURA 10.9 Relação tensão-corrente para um resistor  $R$  no domínio (a) do tempo e (b) da frequência

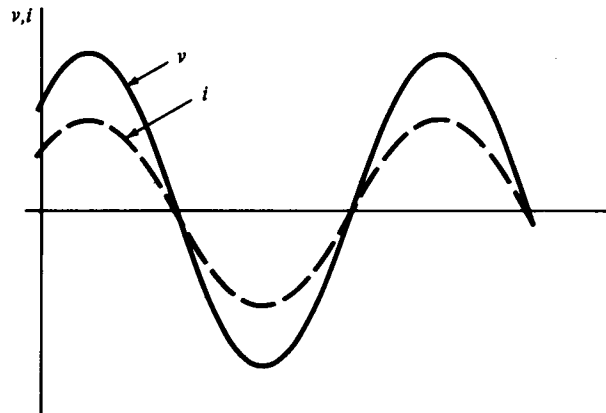


FIGURA 10.10 Formas de onda de tensão e de corrente para um resistor

### EXEMPLO 10.8

Como uma ilustração, suponha que a tensão

$$v = 10 \cos (100t + 30^\circ) \text{ V} \quad (10.41)$$

é aplicada a um resistor de  $5\text{-}\Omega$ , com a polaridade indicada na Fig. 10.9 (a). Então, a tensão fasorial é

$$\mathbf{V} = 10/\underline{30^\circ} \text{ V}$$

e a corrente fasorial é

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R} = \frac{10/\underline{30^\circ}}{5} = 2/\underline{30^\circ} \text{ A}$$

Portanto, no domínio do tempo temos

$$i = 2 \cos (100t + 30^\circ) \text{ A} \quad (10.42)$$

Isto é, sem dúvida, simplesmente o resultado que poderíamos obter usando a lei de Ohm.

No caso do indutor, substituindo a corrente e a tensão complexas na relação no domínio do tempo,

$$v = L \frac{di}{dt}$$

dá a relação complexa

$$\begin{aligned} V_m e^{j(\omega t + \theta)} &= L \frac{d}{dt} [I_m e^{j(\omega t + \phi)}] \\ &= j\omega L I_m e^{j(\omega t + \phi)} \end{aligned}$$

Novamente, dividindo pelo fator  $e^{j\omega t}$  e igualando os fasores, obtemos a relação fasorial

$$\mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I} \quad (10.43)$$

Então a tensão fasorial  $\mathbf{V}$ , como na lei de Ohm, é proporcional à corrente fasorial  $\mathbf{I}$ , com o fator de proporcionalidade  $j\omega L$ . As relações tensão-corrente para o indutor são mostradas na Fig. 10.11.

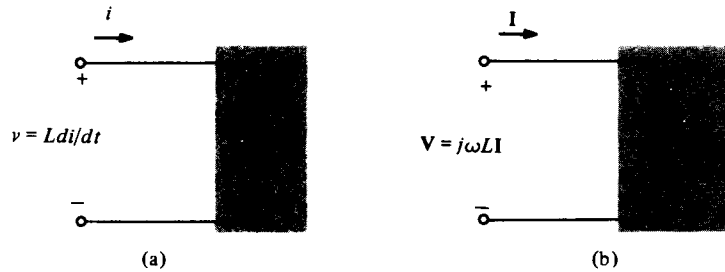


FIGURA 10.11 Relações tensão-corrente para um indutor  $L$  no domínio (a) do tempo e (b) da frequência

Se a corrente no indutor é dada pela segunda equação de (10.38), então, por (10.43), a tensão fasorial é

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= (j\omega L)(I_m \angle \phi) \\ &= \omega L I_m \angle \phi + 90^\circ \end{aligned}$$

visto que  $j = 1/90^\circ$ . Portanto, no domínio do tempo, temos

$$v = \omega L I_m \cos(\omega t + \phi + 90^\circ)$$

Comparando este resultado com a segunda equação de (10.38), vemos que no caso de um indutor, a corrente está *atrasada* da tensão de  $90^\circ$ . Outra expressão usada é que a corrente e a tensão estão  $90^\circ$  fora de fase. Isto é mostrado graficamente na Fig. 10.12.

Finalmente vamos considerar o capacitor. Substituindo a corrente e a tensão complexas na relação no domínio do tempo,

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

dando a relação complexa

$$\begin{aligned} I_m e^{j(\omega t + \phi)} &= C \frac{d}{dt} [V_m e^{j(\omega t + \theta)}] \\ &= j\omega C V_m e^{j(\omega t + \theta)} \end{aligned}$$

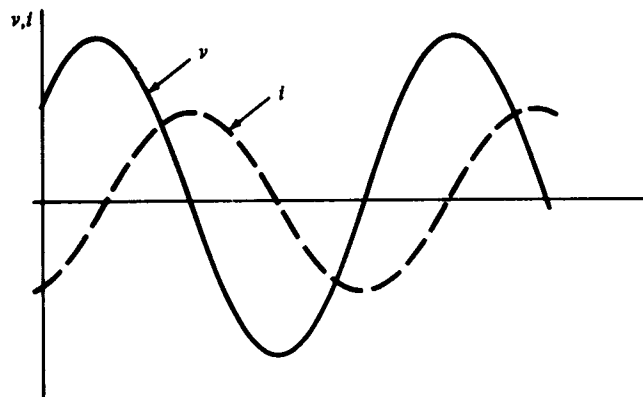


FIGURA 10.12 Formas de onda de tensão e de corrente para um indutor

Novamente, dividindo por  $e^{j\omega t}$  e igualando os fasores, obtemos a relação fasorial

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V} \quad (10.44)$$

ou

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C} \quad (10.45)$$

Logo, a tensão fasorial  $\mathbf{V}$  é proporcional à corrente fasorial  $\mathbf{I}$ , com o fator de proporcionalidade dado por  $1/j\omega C$ . A relação tensão-corrente para um capacitor no domínio do tempo e da frequência é mostrada na Fig. 10.13.

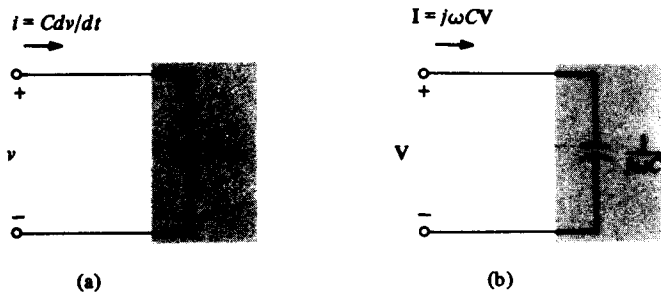


FIGURA 10.13 Relações tensão-corrente no domínio (a) do tempo e (b) da frequência

No caso geral, se a tensão no capacitor é dada pela primeira equação de (10.38), então, por (10.44), a corrente fasorial é

$$\begin{aligned} I &= (j\omega C)(V_m/\theta) \\ &= \omega CV_m/\theta + 90^\circ \end{aligned}$$

Portanto, no domínio do tempo, temos

$$i = \omega CV_m \cos(\omega t + \theta + 90^\circ)$$

que, por comparação com a primeira equação de (10.38), indica que no caso de um capacitor a corrente e a tensão estão fora de fase, com a corrente *adiantada* da tensão de  $90^\circ$ . Isto é mostrado graficamente na Fig. 10.14.

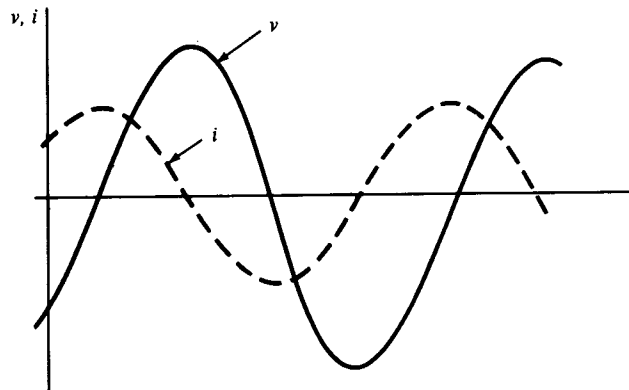


FIGURA 10.14 Formas de onda de tensão e de corrente para um capacitor

### EXEMPLO 10.9

Como um exemplo, se a tensão de (10.41) é aplicada em um capacitor de  $1\text{-}\mu\text{F}$ , então, por (10.44) a corrente fasorial é



$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= j(100)(10^{-6})(10\angle 30^\circ) \text{ A} \\ &= 1\angle 120^\circ \text{ mA} \end{aligned}$$

A corrente no domínio do tempo é, então

$$i = \cos(100t + 120^\circ) \text{ mA}$$

e por esse motivo a corrente leva a voltagem até  $90^\circ$ .

## EXERCÍCIOS

- 10.6.1** Usando fasores, calcule a corrente em regime permanente  $i$  se  $v = 12 \cos(1000t + 30^\circ) \text{ V}$  em (a) Fig. 10.9(a) para  $R = 4 \text{ k}\Omega$ , (b) Fig. 10.11(a) para  $L = 15 \text{ mH}$  e (c) Fig. 10.13(a) para  $C = \frac{1}{2} \mu\text{F}$ .  
*Resposta:* (a)  $3 \cos(1000t + 30^\circ) \text{ mA}$ ; (b)  $0,8 \cos(1000t - 60^\circ) \text{ A}$ ; (c)  $6 \cos(1000t + 120^\circ) \text{ mA}$
- 10.6.2** No Ex. 10.6.1, calcule  $i$  em cada caso, no tempo  $t = 1 \text{ ms}$ .  
*Resposta:* (a)  $0,142 \text{ mA}$ ; (b)  $0,799 \text{ A}$ ; (c)  $-5,993 \text{ mA}$

## 10.7

### Impedância e Admitância

Vamos agora considerar um circuito geral de grandezas fasoriais com dois terminais de acesso, como mostrado na Fig. 10.15. Se a tensão e a corrente no domínio do tempo em seus terminais são dados por (10.38), então as grandezas fasoriais nos terminais são

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= V_m \angle \theta \\ \mathbf{I} &= I_m \angle \phi \end{aligned} \tag{10.46}$$

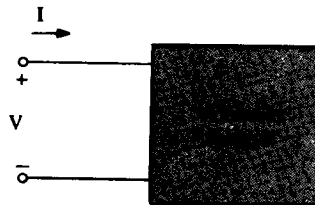


FIGURA 10.15 Circuito fasorial geral

Definimos a relação do fasor tensão pelo fasor corrente como a *impedância* do circuito, que é denominada  $\mathbf{Z}$ . Isto é,

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \tag{10.47}$$

que, por (10.46), é

$$\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}| \angle \theta_z = \frac{V_m}{I_m} \angle \theta - \phi \tag{10.48}$$

onde  $|\mathbf{Z}|$  é o módulo e  $\theta_z$  o ângulo de  $\mathbf{Z}$ . Evidentemente,

$$|\mathbf{Z}| = \frac{V_m}{I_m}, \quad \theta_z = \theta - \phi$$

A impedância, vista de (10.47), segue as mesmas regras que a resistência em um circuito resistivo. De fato, (10.47) se assemelha com a expressão da lei de Ohm; também, como a resistência, a impedância é medida em ohms, sendo uma razão de volts por ampères.

É importante lembrar que a impedância é um número complexo, sendo a relação entre dois números complexos, mas *não* é um fasor. Isto é, ela não tem uma função senoidal correspondente no domínio do tempo de sentido físico, como a corrente e a tensão fasorial o têm.

A impedância  $Z$  está escrita na forma polar em (10.48); na forma retangular é normalmente escrita por

$$\mathbf{Z} = R + jX \quad (10.49)$$

onde  $R = \text{Re } Z$  é a *componente resistiva*, ou simplesmente a resistência, e  $X = \text{Im } Z$  é a *componente reativa*, ou a *reatância*. Em geral,  $Z = Z(j\omega)$  é uma função complexa de  $j\omega$ , mas  $R = R(\omega)$  e  $X = X(\omega)$  são funções de  $\omega$ . Tanto  $R$  quanto  $X$ , como  $Z$ , são medidos em ohms. Evidentemente, comparando (10.48) e (10.49) podemos escrever

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\theta_z = \tan^{-1} \frac{X}{R}$$

e

$$R = |Z| \cos \theta_z$$

$$X = |Z| \sin \theta_z$$

Estas relações são mostradas graficamente na Fig. 10.16.

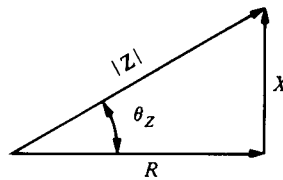


FIGURA 10.16 Representação gráfica da impedância

### EXEMPLO 10.10

Como um exemplo, suponha na Fig. 10.15 que  $V = 10/56,9^\circ$  V e  $I = 2/20^\circ$  A. Logo, temos

$$Z = \frac{10/56,9^\circ}{2/20^\circ} = 5/36,9^\circ \Omega$$

Na forma retangular, obtemos

$$\begin{aligned} Z &= 5(\cos 36,9^\circ + j \sin 36,9^\circ) \\ &= 4 + j3 \Omega \end{aligned}$$

As impedâncias de resistores, indutores e capacitores são facilmente encontradas de suas relações  $V-I$  de (10.40), (10.43) e (10.45). Representando suas impedâncias com o subíndice  $R$ ,  $L$  e  $C$ , respectivamente, temos, destas equações e de (10.47),

$$\begin{aligned} Z_R &= R \\ Z_L &= j\omega L = \omega L/90^\circ \\ Z_C &= \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}/-90^\circ \end{aligned} \quad (10.50)$$

No caso de um resistor, a impedância é puramente resistiva, sendo sua reatância zero. Impedâncias de indutores e de capacitores são reatâncias puras, tendo a componente resistiva zero. A *reatância indutiva* é chamada por

$$X_L = \omega L \quad (10.51)$$

tal que,

$$Z_L = jX_L$$

e a *reatância capacitiva* é chamada por

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad (10.52)$$

e logo

$$Z_C = jX_C \quad (10.53)$$

Visto que  $\omega$ ,  $L$  e  $C$  são positivas, vemos que a reatância indutiva é positiva e que a reatância capacitiva é negativa. No caso geral de (10.49), podemos ter  $X = 0$ , caso em que o circuito apresenta-se como sendo resistivo;  $X > 0$ , caso em que o circuito apresenta-se como sendo indutivo;  $X < 0$ , caso em que o circuito apresenta-se como sendo capacitivo. Estes casos são possíveis quando resistência, indutância e capacitância estão todos presentes no circuito, como veremos. Como um exemplo, o circuito com impedância dada por  $Z = 4 + j3$ , que estamos considerando, tem a reatância  $X = 3$ , que é do tipo indutivo. No caso de circuitos passivos, como iremos ver no Capítulo 12, a resistência é não-negativa.

O recíproco da impedância, chamado por

$$Y = \frac{1}{Z} \quad (10.54)$$

é chamado de *admitância* e é análogo à condutância (o recíproco de resistência), nos circuitos resistivos. Evidentemente, visto que  $Z$  é um número complexo, logo  $Y$  também o é, sendo a representação normalizada

$$Y = G + jB \quad (10.55)$$

As grandezas  $G = \text{Re } Y$  e  $B = \text{Im } Y$  são chamadas de *condutância* e *susceptância*, respectivamente, e são relacionadas à impedância por

$$Y = G + jB = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} \quad (10.56)$$

As unidades de  $Y$ ,  $G$  e  $B$  são todas siemens, visto que, em geral,  $Y$  é a relação da corrente fasorial pela tensão fasorial.

Para obter a relação entre os componentes de  $Y$  e  $Z$  podemos racionalizar o último membro de (10.56), o que resulta em

$$\begin{aligned} G + jB &= \frac{1}{R + jX} \cdot \frac{R - jX}{R - jX} \\ &= \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \end{aligned}$$

Igualando as partes real e imaginária, resulta em

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}$$

$$B = -\frac{X}{R^2 + X^2} \quad (10.57)$$

Portanto, notamos que  $R$  e  $G$  não são recíprocos, exceto no caso puramente resistivo ( $X = 0$ ). De forma similar,  $X$  e  $B$  nunca são recíprocos, mas no caso puramente reativo ( $R = 0$ ) eles são recíprocos negativos.

**EXEMPLO 10.11** Como um exemplo, se temos

$$Z = 4 + j3$$

então

$$Y = \frac{1}{4 + j3} = \frac{4 - j3}{4^2 + 3^2} = \frac{4}{25} - j\frac{3}{25}$$

Portanto,  $G = \frac{4}{25}$  e  $B = -\frac{3}{25}$   
Exemplos adicionais são

$$Y_R = G$$

$$Y_L = \frac{1}{j\omega L}$$

$$Y_C = j\omega C$$

que são a admitância de um resistor, com  $R = 1/G$  de um indutor e de um capacitor.

## EXERCÍCIOS

**10.7.1** Calcule a impedância vista pelos terminais da fonte na Figura 10.4, nas formas retangular e polar.

Resposta:  $R + j\omega L$ ,  $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \angle \tan^{-1} \omega L/R$

**10.7.2** Calcule a admitância vista pelos terminais da fonte na Fig. 10.4, nas formas retangular e polar.

Resposta:  $\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - j\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$

**10.7.3** Calcule a condutância e a susceptância, se  $Z$  é (a)  $3 + j4$ , (b)  $0,4 + j0,3$ , e (c)  $\sqrt{2}/2 \angle 45^\circ$ .

Resposta: (a)  $0,12$ ,  $-0,16$ ; (b)  $1,6$ ,  $-1,2$ ; (c)  $1$ ,  $-1$

## 10.8

### Leis de Kirchhoff e Associações de Impedância

As leis de Kirchhoff são válidas para os fasores, assim como para suas tensões e correntes correspondentes no domínio do tempo. Podemos ver isto observando que, se uma excitação complexa, como  $V_m e^{j(\omega t + \theta)}$  é aplicada ao circuito, então tensões complexas, tais como  $V_1 e^{j(\omega t + \theta_1)}$ ,  $V_2 e^{j(\omega t + \theta_2)}$  etc., surgem sobre os elementos do circuito. Visto que as leis de Kirchhoff são válidas no domínio do tempo, a LKT aplicada ao redor de um laço típico resulta em uma equação como

$$V_1 e^{j(\omega t + \theta_1)} + V_2 e^{j(\omega t + \theta_2)} + \dots + V_N e^{j(\omega t + \theta_N)} = 0$$

Dividindo pelo fator  $e^{j\omega t}$ , temos

$$V_1 + V_2 + \dots + V_N = 0$$

onde

$$V_n = V_n / \theta_n, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

são as tensões fasoriais em volta do laço. Então, a LKT é válida para fasores. Um raciocínio similar confirmará a LKC.

Nos circuitos tendo excitações senoidais com uma frequência comum  $\omega$ , se estamos interessados somente na resposta forçada, ou na resposta em regime permanente, podemos encontrar as tensões e correntes fasoriais de todo elemento e usar as leis de Kirchhoff para completar a análise. A análise em regime permanente c.a. é, portanto, idêntica à análise para circuitos resistivos dos Capítulos 2, 4 e 5, com impedâncias no lugar de resistências e fasores substituindo as quantidades no domínio do tempo. Uma vez encontrados os fasores, podemos imediatamente convertê-los para respostas senoidais no domínio do tempo.

### EXEMPLO 10.12

Como um exemplo, considere o circuito da Fig. 10.17, que consiste em  $N$  impedâncias associadas em série. Pela LKC para fasores, a única corrente fasorial  $I$  flui em todos os elementos. Portanto, as tensões sobre cada elemento são

$$V_1 = Z_1 I$$

$$V_2 = Z_2 I$$

⋮

⋮

$$V_N = Z_N I$$

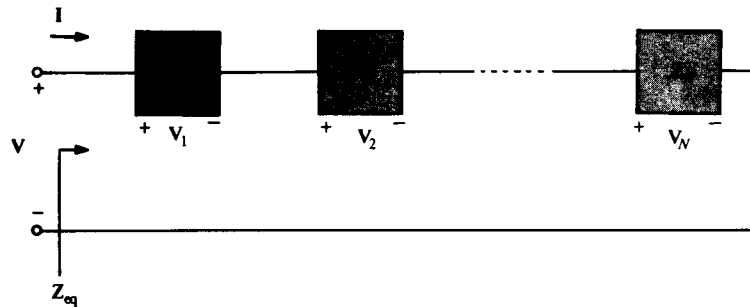


FIGURA 10.17 Impedâncias conectadas em série

e, pela LKT em volta do circuito,

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + \dots + V_N \\ &= (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N) I \end{aligned}$$

Visto que também devemos ter, da Fig. 10.17,

$$V = Z_{eq} I$$

onde  $Z_{eq}$  é a impedância *equivalente* vista em seus terminais, segue-se que

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N \quad (10.58)$$

como no caso de resistores em série.

De maneira similar, como no caso de condutâncias em paralelo no Capítulo 2, a admitância equivalente  $Y_{eq}$  de  $N$  admitâncias em paralelo é

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N \quad (10.59)$$

No caso de dois elementos em paralelo ( $N = 2$ ), temos

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} = \frac{1}{\mathbf{Y}_{\text{eq}}} = \frac{1}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2} = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \quad (10.60)$$

Da mesma forma, as regras de divisão de tensão e de corrente são válidas para os circuitos fasoriais, com a impedância e as quantidades no domínio da frequência, exatamente da mesma forma que elas são válidas para circuitos resistivos, com resistências e as quantidades no domínio do tempo. O leitor é questionado a verificar estas regras no Ex. 10.8.2.

### EXEMPLO 10.13

Por exemplo, vamos retornar ao circuito  $RL$  estudado na Seção 10.2. O circuito e seus fasores correspondentes são mostrados na Fig. 10.18(a) e (b), respectivamente. Pela LKT no circuito fasorial, temos

$$\mathbf{Z}_L \mathbf{I} + R \mathbf{I} = V_m / 0$$

ou

$$(j\omega L + R) \mathbf{I} = V_m / 0$$

da qual a corrente fasorial é

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \frac{V_m / 0}{R + j\omega L} \\ &= \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \end{aligned}$$

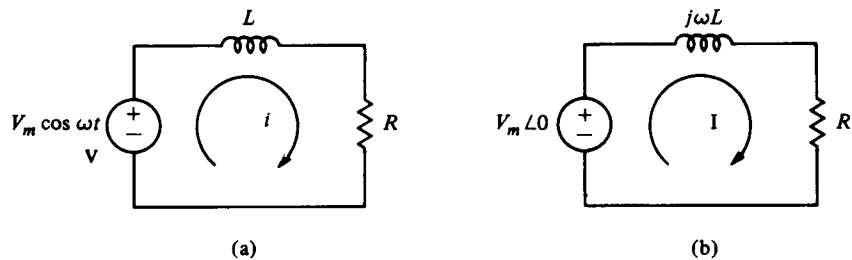


FIGURA 10.18 (a) Circuito no domínio do tempo; (b) circuito fasorial equivalente

Portanto, no domínio do tempo, temos, como antes

$$i = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left( \omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right)$$

Um método alternativo de solução é observar que a impedância  $\mathbf{Z}$ , vista nos terminais da fonte, é a impedância do indutor,  $j\omega L$ , e o resistor,  $R$ , conectados em série. Portanto,

$$\mathbf{Z} = j\omega L + R$$

e

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{V_m / 0}{R + j\omega L}$$

como obtido anteriormente.

## EXERCÍCIOS

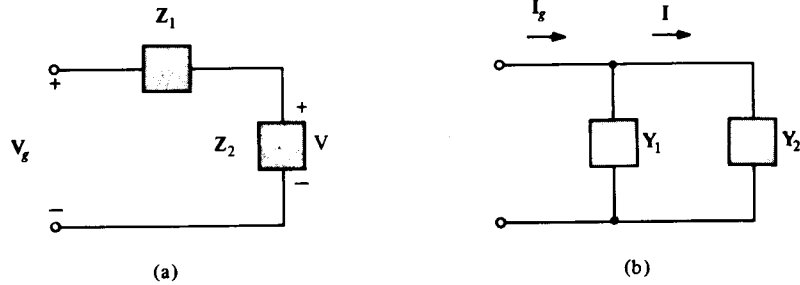
- 10.8.1 Demonstre (10.59).  
 10.8.2 Mostre em (a) que a regra de divisão de tensão,

$$V = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_g$$

e em (b) que a regra de divisão de corrente,

$$I = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} I_g = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I_g$$

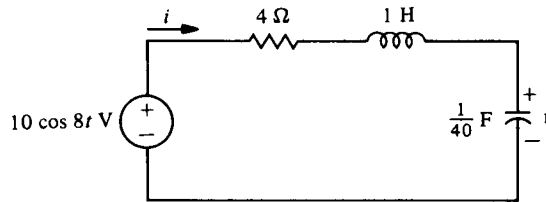
são válidas, onde  $Z_1 = 1/Y_1$  e  $Z_2 = 1/Y_2$ ,



### EXERCÍCIO 10.8.2

**10.8.3** Calcule  $i$ , a corrente em regime permanente, usando fasores.

*Resposta:*  $2 \cos(8t - 36,9^\circ)$  A



### EXERCÍCIO 10.8.3

**10.8.4** Calcule  $v$ , a tensão em regime permanente no Ex. 10.8.3, usando fasores e divisão de tensão.

*Resposta:*  $10 \cos(8t - 126,9^\circ)$  V

## 10.9

### Circuitos Fasoriais

Como a discussão na seção anterior sugere, podemos omitir os passos para encontrar a equação representativa no domínio do tempo, trocando as excitações e as respostas pelas suas funções de excitação complexas e então dividindo a equação por  $e^{j\omega t}$  para obter a equação fasorial. Podemos simplesmente partir com o circuito fasorial, que iremos agora formalmente definir como o circuito no domínio do tempo com as tensões e as correntes trocadas por seus fasores e os elementos representados por suas impedâncias, como ilustrado previamente na Fig. 10.18(a). A equação representativa obtida deste circuito é então a equação fasorial. Resolvendo esta equação, obtemos o fasor da resposta, que então pode ser convertido para a resposta no domínio do tempo.

O procedimento de partir de um circuito fasorial para obter o fasor resposta é idêntico ao usado anteriormente em circuitos resistivos. A única diferença é que os números são complexos.

### EXEMPLO 10.14

Como um exemplo, vamos calcular  $i$ , a corrente em regime permanente na Fig. 10.19(a). O circuito fasorial mostrado na Fig. 10.19(b) é obtido trocando-se a fonte de tensão e as correntes por seus fasores e representando os elementos por suas impedâncias. No circuito fasorial, a impedância vista pelos terminais da fonte é

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= 1 + \frac{(3 + j3)(-j3)}{3 + j3 - j3} \\ &= 4 - j3 \Omega \end{aligned}$$

Portanto, temos

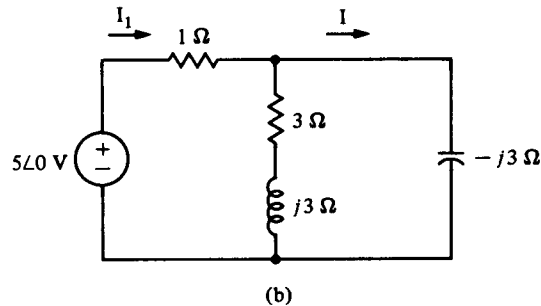
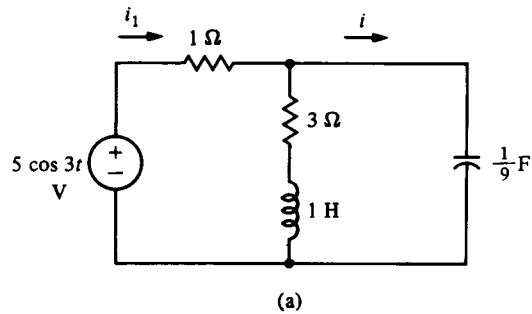
$$\mathbf{I}_1 = \frac{5/0}{4 - j3} = \frac{5/0}{5/\underline{-36,9^\circ}} = 1/\underline{36,9^\circ}$$

e por divisão de corrente,

$$\mathbf{I} = \left( \frac{3 + j3}{3 + j3 - j3} \right) \mathbf{I}_1 = \sqrt{2}/\underline{81,9^\circ} \text{ A}$$

No domínio do tempo, a resposta é

$$i = \sqrt{2} \cos(3t + 81,9^\circ) \text{ A}$$



**FIGURA 10.19** Circuito RLC no domínio do tempo e circuito fasorial

No caso de uma fonte dependente, tal como uma fonte  $kV_x$  volts controlada por uma tensão  $v_x$ , ela irá aparecer no circuito fasorial como uma fonte  $kV_x$ , onde  $V_x$  é a representação fasorial de  $v_x$ , pois  $v_x = V_m \cos(\omega t + \phi)$  no domínio do tempo torna-se  $V_m e^{j(\omega t + \phi)}$  quando uma excitação complexa for aplicada. Então, dividindo as equações por  $e^{j\omega t}$ , deixa  $v_x$ , representada pelo seu fasor  $V_m e^{j\phi}$ . Da mesma forma,  $kv_x = kV_m \cos(\omega t + \phi)$  é representada pelo seu fasor  $kV_m e^{j\phi}$ , que é  $k$  vezes o fasor de  $v_x$ .

### EXEMPLO 10.15

Como um exemplo de um circuito contendo uma fonte dependente, vamos considerar a Fig. 10.20(a), na qual é solicitado calcular o valor de  $i$  em estado permanente. O circuito fasorial correspondente é mostrado na Fig. 10.20(b). Visto que circuitos fasoriais são analisados exatamente como circuitos resistivos, podemos aplicar a LKC no nó  $a$  na Fig. 10.20(b), resultando em

$$\mathbf{I} + \frac{\mathbf{V}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{V}_1}{-j2} = 3/0 \quad (10.61)$$



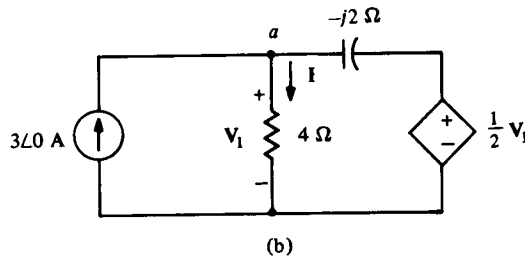
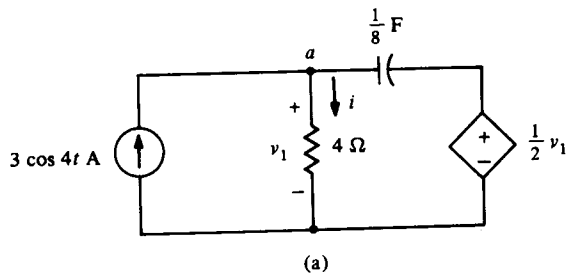


FIGURA 10.20 (a) Circuito contendo uma fonte de corrente; (b) circuito fasorial correspondente

Pela lei de Ohm, temos  $V_1 = 4 I$ , que substituído em (10.61), produz

$$-j2I + \frac{1}{2}(4I) = -j6$$

ou

$$I = \frac{-j6}{2 - j2} = \frac{6/-90}{2\sqrt{2}/-45} = \frac{3}{\sqrt{2}}/-45^\circ \text{ A}$$

Portanto, temos

$$i = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos(4t - 45^\circ) \text{ A}$$

No caso de um amp. op., o circuito fasorial é o mesmo que no circuito no domínio do tempo. Isto é, um amp. op. ideal no domínio do tempo aparece como um amp. op. ideal no circuito fasorial, pois as equações no domínio do tempo

$$i = 0, \quad v = 0$$

que caracterizam a corrente e a tensão sobre os terminais de entrada, mantêm-se de forma idêntica,

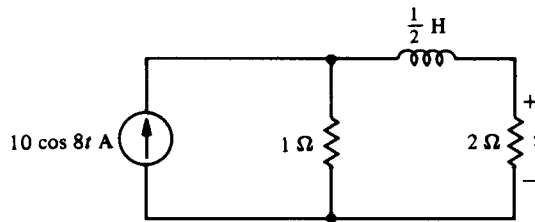
$$I = 0, \quad V = 0$$

na equação fasorial.

Como um comentário final, observamos que o método fasorial de calcular, digamos  $i$ , calculando primeiramente  $I = V/Z$  e então trocando  $I$  para  $i$ , não funciona se  $Z(j\omega) = 0$ . Este é o caso em que o circuito é excitado na frequência natural  $j\omega$ , e devemos então usar o método da Seç. 9.6. Um exemplo deste caso é proposto no Prob. 10.38.

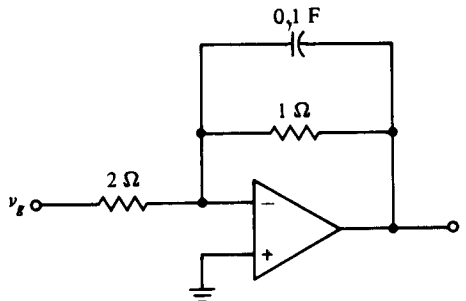
## EXERCÍCIOS

- 10.9.1 Resolva o Ex. 10.2.2 por meio do circuito fasorial.  
 10.9.2 Calcule a tensão em regime permanente  $v$ , usando o circuito fasorial  
 Resposta:  $4 \cos(8t - 53,1^\circ) \text{ V}$



EXERCÍCIO 10.9.2

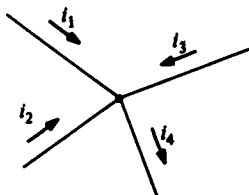
- 10.9.3** Calcule a tensão em regime permanente  $v$  no Ex. 10.4.1(b) usando circuito fasorial.  
**10.9.4** Calcule a tensão em regime permanente  $v$ , usando circuito fasorial dado que  $v_g = 4 \cos 10t$  V.  
 Resposta:  $\sqrt{2} \cos(10t + 135^\circ)$  V



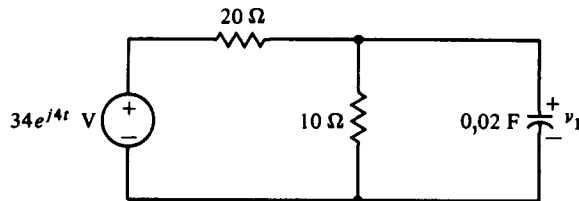
EXERCÍCIO 10.9.4

## PROBLEMAS

- 10.1** Dada a tensão  $v = 100 \cos(400\pi t + 45^\circ)$  V, calcule (a) sua amplitude, (b) seu ângulo de fase em graus, (c) seu ângulo de fase em radianos, (d) seu período em ms, (e) sua frequência em rad/s, (f) sua frequência em Hz e, (g) quantos graus ela está adiantada ou atrasada da corrente  $i = 2 \cos(400\pi t - 17^\circ)$  A.
- 10.2** Converta as seguintes funções para funções cosseno com amplitudes positivas:  
 (a)  $6 \sin(2t + 15^\circ)$ , (b)  $-2 \cos(4t + 10^\circ)$ , (c)  $8 \cos 5t - 15 \sin 5t$ .
- 10.3** Determinar se  $v_1$  está adiantada ou atrasada em relação a  $v_2$  e de quanto.  
 (a)  $v_1 = 3 \cos(4t - 30^\circ)$ ,  $v_2 = 5 \sin 4t$ ,  
 (b)  $v_1 = 10 \cos 4t$ ,  $v_2 = 5 \cos 4t + 12 \sin 4t$ ,  
 (c)  $v_1 = 20(\cos 4t + 83 \sin 4t)$ ,  
 $v_2 = 3 \cos 4t + 4 \sin 4t$ .
- 10.4** Calcule  $i_4$ , usando somente as propriedades das senóides se (a)  $i_1 = 6 \cos 3t$  A,  $i_2 = 4 \cos(3t - 30^\circ)$  A, e  $i_3 = -4\sqrt{3} \cos(3t + 60^\circ)$  A, (b)  $i_1 = 5 \cos(3t + 30^\circ)$  A,  $i_2 = 5 \sin 3t$  A, e  $i_3 = 5 \cos(3t + 150^\circ)$  A, e (c)  $i_1 = 25 \cos(3t - 53,1^\circ)$  A,  $i_2 = 2 \sin 3t$  A, e  $i_3 = 13 \cos(3t - 22,6^\circ)$  A. (Sugestão:  $\cos 22,6^\circ = 12/13$ .)
- 10.5** Calcule a resposta forçada  $i$ , na Fig. 10.4, se  $L = 8$  mH,  $R = 12$  k $\Omega$ ,  $V_m = 5$  V, e  $\omega = 2 \times 10^6$  rad/s.
- 10.6** Calcule  $R$  e  $L$  na Fig. 10.4, se a fonte é  $13 \cos 6000t$  V e a resposta é  $i = 2 \cos(6000t - 67,4^\circ)$  mA. (Tome  $\tan 67,4^\circ = 12/5$ ).
- 10.7** Na Fig. do Ex. 10.2.2, se a fonte é  $6 \cos 4000t$  mA e a saída é  $v = 18 \cos(4000t - 53,1^\circ)$  V, calcule  $R$  e  $C$ .
- 10.8** Uma tensão  $V_m \sin \omega t$  V, um resistor  $R$  e um indutor  $L$  estão em série. Mostre que a resposta forçada  $i$  é idêntica a (10.12), exceto que o cosseno substituído pelo seno dos dois modos a seguir indicados. (a) Observando que  $V_m \sin \omega t = V_m \cos(\omega t - 90^\circ)$ , use a excitação complexa  $V_m e^{j(\omega t - 90^\circ)}$  e tome a parte real da resposta da corrente. (b) Notando que  $V_m \sin \omega t = \text{Im}(V_m e^{j\omega t})$ , use a excitação complexa  $V_m e^{j\omega t}$  e tome a parte imaginária da resposta da corrente.
- 10.9** Calcule  $v_1$  da equação diferencial e use o resultado para calcular a resposta forçada  $v$  para uma tensão de entrada de  $34 \cos 4t$  V.

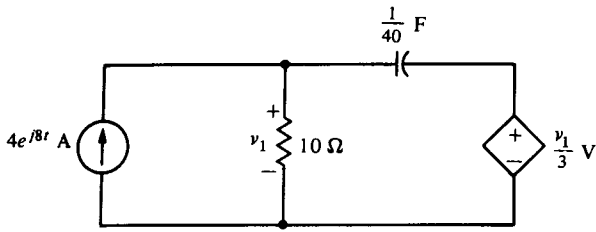


PROBLEMA 10.4



PROBLEMA 10.9

- 10.10** Calcule a resposta  $v_1$  para a fonte  $4e^{j8t}$  A e use o resultado para calcular a resposta  $v$  para (a)  $4 \cos 8t$  A e (b)  $4 \sin 8t$  A.



**PROBLEMA 10.10**

- 10.11 Uma tensão complexa de entrada  $10e^{j(2t+25^\circ)}$  V produz uma corrente de saída de  $5e^{j(2t-20^\circ)}$  A. Calcule a corrente de saída se a tensão de entrada é (a)  $40e^{j(2t+60^\circ)}$  V, (b)  $20 \cos 2t$  V e (c)  $4 \sin(2t - 15^\circ)$  V.
- 10.12 Calcule as representações fasoriais das funções no domínio do tempo (a)  $10 \cos(5t + 18^\circ)$ , (b)  $-8 \cos 5t + 6 \sin 5t$ , (c)  $18 \sin 5t$ , e (d)  $-2 \sin(5t - 10^\circ)$ .
- 10.13 Se  $\omega = 10$  rad/s, calcule as funções no domínio do tempo representadas pelos fasores (a)  $-5 + j5$ , (b)  $-5 + j12$ , (c)  $4 - j3$ , (d)  $-10$ , e (e)  $-j5$ .
- 10.14 Resolva o Prob. 10.4 usando fasores.
- 10.15 Calcule a impedância do circuito da Fig. 10.15, se as funções no domínio do tempo representadas pelos fasores  $V$  e  $I$  são  
 (a)  $v = -30 \cos 2t + 16 \sin 2t$  V,  
 $i = 1,7 \cos(2t + 20^\circ)$  A.  
 (b)  $v = \text{Re}[je^{2t}]$  V,  
 $i = \text{Re}[(1 + j)e^{j(2t+30^\circ)}]$  mA.  
 (c)  $v = aV_m \cos(\omega t + \theta)$  V,  
 $i = V_m \cos(\omega t + \theta - \alpha)$  A.
- 10.16 Mostre que se  $\text{Re } Z = R$  é positivo, logo  $\text{Re } Y = \text{Re } [1/Z] = G$  é também positivo.
- 10.17 Um circuito tem uma impedância

$$Z = \frac{4(1 + j\omega)(4 + j\omega)}{j\omega(2 + j\omega)} \Omega$$

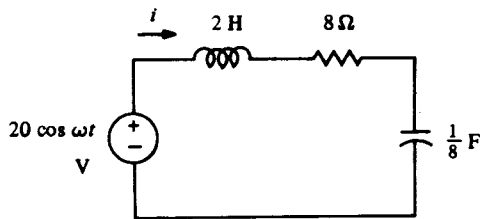
Calcule a resistência, a reatância, a condutância e a susceptância com  $\omega = 2$  rad/s. Se a tensão no domínio do tempo aplicada ao circuito é  $10 \cos 2t$  V, calcule a corrente em regime permanente.

- 10.18 Um circuito tem uma impedância

$$Z = \frac{16(2 + j\omega)(8 - \omega^2 - j2\omega)}{\omega^4 - 15\omega^2 + 64} \Omega$$

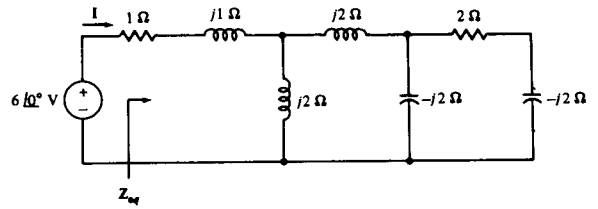
Calcule a resistência e a reatância com  $\omega = 1, 2$  e  $3$  rad/s. Se a tensão no domínio do tempo aplicada ao circuito é  $64 \cos \omega t$  V, calcule a corrente em regime permanente em cada caso.

- 10.19 No Prob. 10.9 use fasores, impedância e divisão de tensão para calcular  $v$ .
- 10.20 Calcule o valor em regime permanente de  $i$ , se (a)  $\omega = 1$  rad/s e (b)  $\omega = 2$  rad/s. Note que, no último caso, a impedância vista pelos terminais da fonte é puramente resistiva.



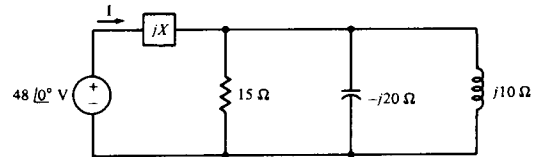
**PROBLEMA 10.20**

- 10.21 Para o circuito fasorial mostrado, calcule  $Z_{\text{eq}}$  e use o resultado para calcular o fasor corrente  $I$ . Se  $\omega = 2$  rad/s, calcule a resposta forçada  $i$  correspondente a  $I$ .



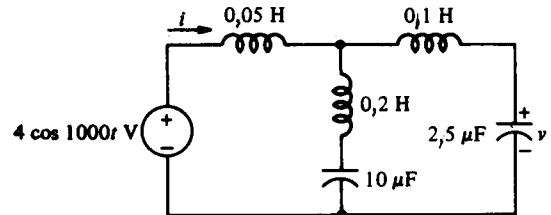
**PROBLEMA 10.21**

- 10.22 Calcule a reatância  $X$  tal que a impedância vista pela fonte seja real. Para este caso, calcule a corrente em regime permanente  $i(t)$  correspondente a  $I$  se  $\omega = 10$  rad/s.



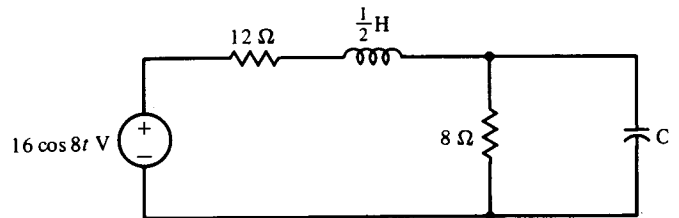
**PROBLEMA 10.22**

- 10.23 Calcule os valores  $i$  e  $v$  em regime permanente.



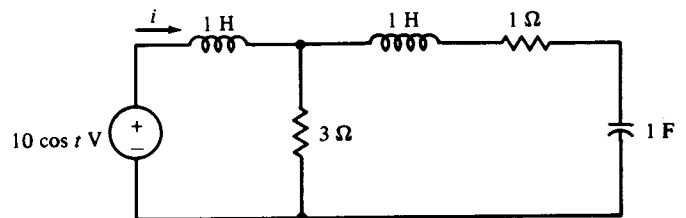
**PROBLEMA 10.23**

- 10.24 Calcule  $C$  tal que a impedância vista pela fonte seja real. Neste caso, calcule a potência absorvida pelo resistor de  $12 \Omega$ .



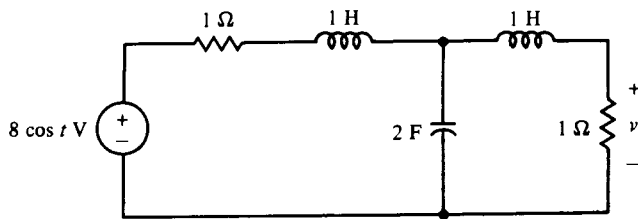
**PROBLEMA 10.24**

- 10.25 Calcule a corrente  $i$  em regime permanente.



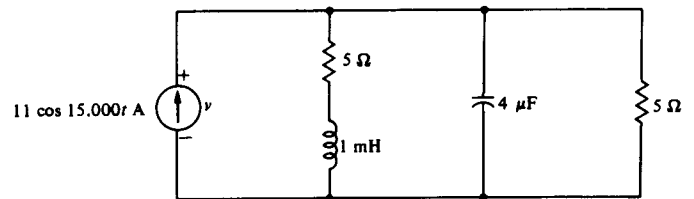
**PROBLEMA 10.25**

- 10.26 Calcule a tensão  $v$  em regime permanente.



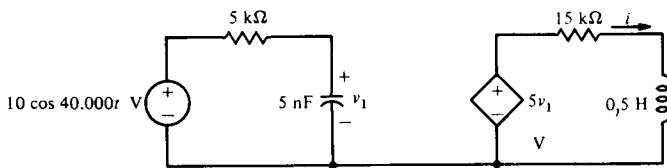
PROBLEMA 10.26

10.31 Calcule o valor de  $v$  em regime permanente.



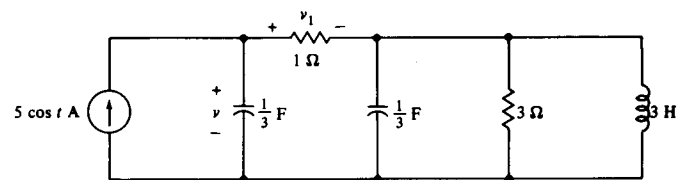
PROBLEMA 10.31

10.27 Calcule o valor da corrente  $i$  em regime permanente.



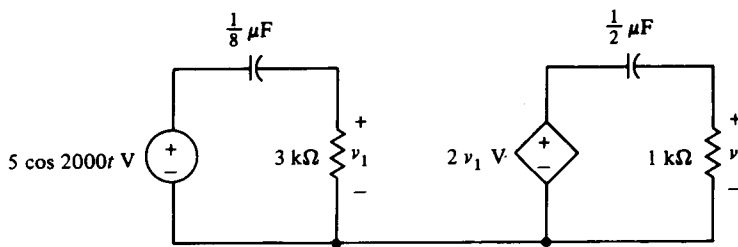
PROBLEMA 10.27

10.32 Calcule os valores  $v$  e  $v_1$  em regime permanente.



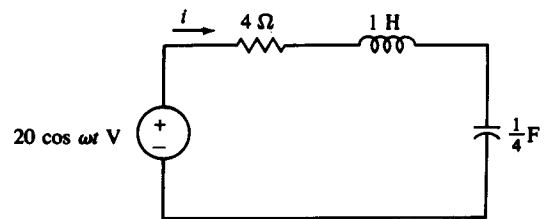
PROBLEMA 10.32

10.28 Calcule a tensão  $v$  em regime permanente.



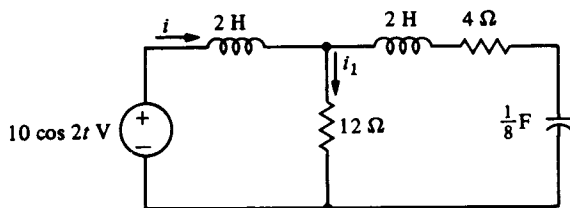
PROBLEMA 10.28

10.33 Calcule o valor de  $i$  em regime permanente quando (a)  $\omega = 1$  rad/s, (b)  $\omega = 2$  rad/s e (c)  $\omega = 4$  rad/s (note que (b) é o caso com ressonância).



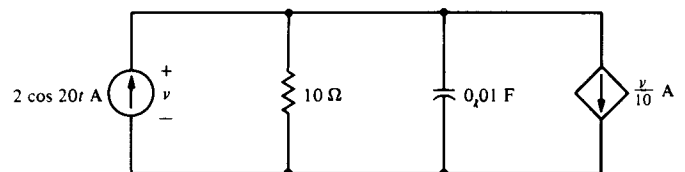
PROBLEMA 10.33

10.29 Calcule as correntes em regime permanente  $i$  e  $i_1$ , usando fasores.



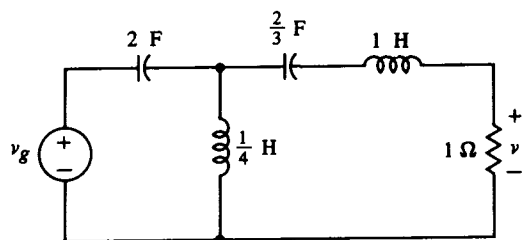
PROBLEMA 10.29

10.34 Calcule a tensão  $v$  em regime permanente.



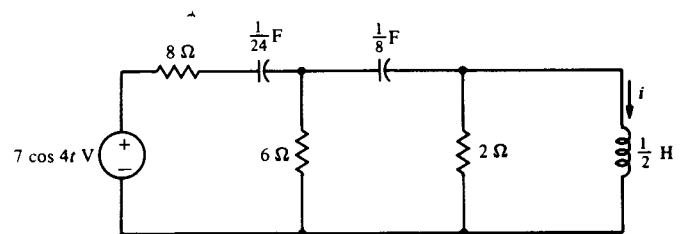
PROBLEMA 10.34

10.30 Calcule a tensão  $v$  em regime permanente, se  $v_g = 5 \cos 2t$  V.



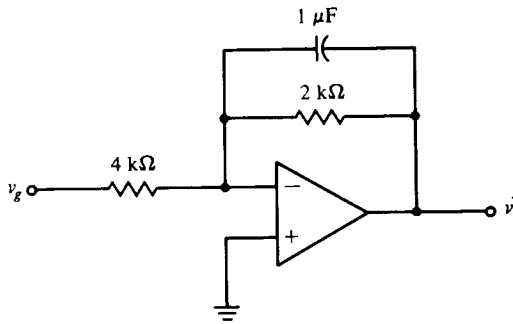
PROBLEMA 10.30

10.35 Calcule a corrente  $i$  em regime permanente.



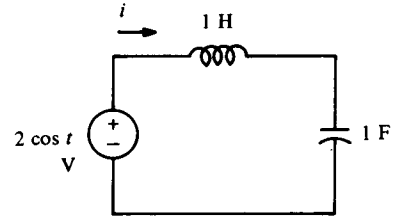
PROBLEMA 10.35

10.36 Calcule a tensão  $v$  em regime permanente, se  $v_g = 10 \cos 1000t$  V.



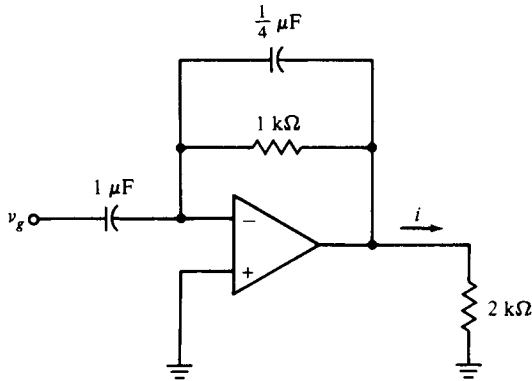
PROBLEMA 10.36

10.38 Calcule a resposta forçada  $i$ . [Sugestão: Note que  $I = V/Z$  não funciona, visto que  $Z(j1) = 0$ . Resolva a equação representativa pelo método da Seq. 9.6.]



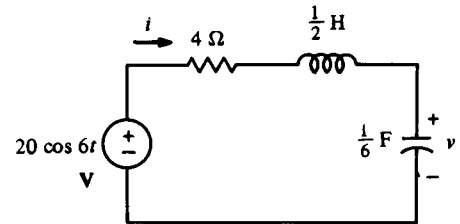
PROBLEMA 10.38

10.37 Calcule a corrente  $i$  em regime permanente, se  $v_g = 2 \cos 4000t$  V.



PROBLEMA 10.37

10.39 Calcule a resposta completa  $i$ , se  $i(0) = 2$  A e  $v(0) = 6$  V. (Sugestão: Use fasores para obter  $i_f$  e a equação diferencial para obter  $i_n$ .)



PROBLEMA 10.39

10.40 Determine  $i(0)$  e  $v(0)$  no Prob. 10.39, tal que a componente natural desapareça e  $i$  seja simplesmente a componente forçada.



# 11

## Análise em Regime Permanente C.A.

---

*Genialidade é um por cento inspiração e noventa e nove por cento transpiração.*

*Thomas A. Edison*

---

O maior inventor norte-americano e, talvez, o maior inventor na história, foi Thomas Alva Edison, que mudou a vida de todas as pessoas com suas invenções, como a luz elétrica e o fonógrafo. Ele patenteou mais de 1.100 invenções de sua autoria e aperfeiçoou diversas invenções de outros, como o telégrafo, a máquina de escrever, o gerador elétrico e o cinema. Talvez o mais importante de tudo é que ele foi um dos primeiros a organizar a pesquisa, chegando a empregar, certa vez, mais de 3.000 ajudantes.

Edison nasceu perto de Milan, Ohio, o mais novo de sete irmãos. Ele teve somente três meses de educação formal, pois sua mãe tirou-o da escola e tornou-se sua professora. Ele perguntava demais para se dar bem com o professor. Foi dispensado do serviço militar devido à sua surdez e durante a Guerra Civil errou de cidade em cidade como telegrafista. Nesta época, patenteou melhoramentos em um aparelho que registrava as cotações das ações da bolsa de valores e vendeu suas patentes pela quantia, considerada fantástica na época, de 40.000 dólares. Em 1876, mudou-se para Menlo Park, Nova Jersey, e tornou-se famoso pela grande quantidade de inventos. A luz elétrica foi sua maior invenção, mas, para vendê-la ao mundo, projetou também a primeira usina de energia elétrica. Sua descoberta do efeito de Edison, o movimento de elétrons no vácuo de seu bulbo de luz, também marcou o início da era da eletrônica. ■

Nos capítulos anteriores, vimos que, no caso de circuitos com entradas senoidais, podemos obter a resposta em regime permanente c.a. pela análise dos circuitos fasoriais correspondentes. Os circuitos encontrados eram relativamente simples e podem ser analisados pelo uso das relações corrente-tensão e as regras de divisão de corrente e de tensão.

Deve ficar claro que, devido à semelhança entre os circuitos fasoriais e os circuitos resistivos, podemos estender os métodos do Capítulo 10 a circuitos mais gerais, usando análise nodal, análise de laço, teoremas de Norton e de Thévenin, superposição etc. Neste capítulo, iremos considerar formalmente estes procedimentos mais gerais de análise, limitando-nos a obter a resposta forçada, ou de regime permanente c.a.

## 11.1 Análise Nodal

Como vimos, a relação tensão-corrente

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$$

para elementos passivos é idêntica em forma à lei de Ohm, e a LKT e a LKC se mantêm em circuitos fasoriais exatamente do mesmo modo que em circuitos resistivos. Portanto, a única diferença entre a análise de circuitos fasoriais e circuitos resistivos é que as excitações e as respostas são complexas no primeiro caso e quantidades reais no último caso. Desta forma, podemos analisar circuitos fasoriais da mesma forma que analisamos circuitos resistivos. Especificamente, os métodos de análise nodal e de malhas, ou de laços, são aplicáveis. Iremos ilustrar a análise nodal nesta seção e a análise de laço na seção subsequente.

### EXEMPLO 11.1

Para ilustrar a análise nodal, vamos calcular as tensões  $v_1$  e  $v_2$  da Fig. 11.1, em regime permanente. Primeiro, iremos obter o circuito fasorial trocando os valores de seus elementos pelos de suas impedâncias, para  $\omega = 2$  rad/s, e as fontes e tensões dos nós por seus fasores. Isto resulta no circuito da Fig. 11.2(a). Visto que estamos interessados em encontrar  $\mathbf{V}_1$  e  $\mathbf{V}_2$ , os fasores de tensão de nó, podemos substituir os dois conjuntos de impedâncias em paralelo por suas impedâncias equivalentes, resultando num circuito equivalente mais simples mostrado na Fig. 11.2 (b).

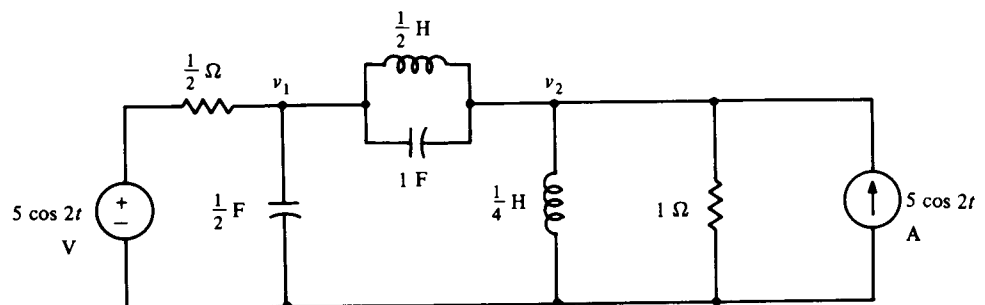
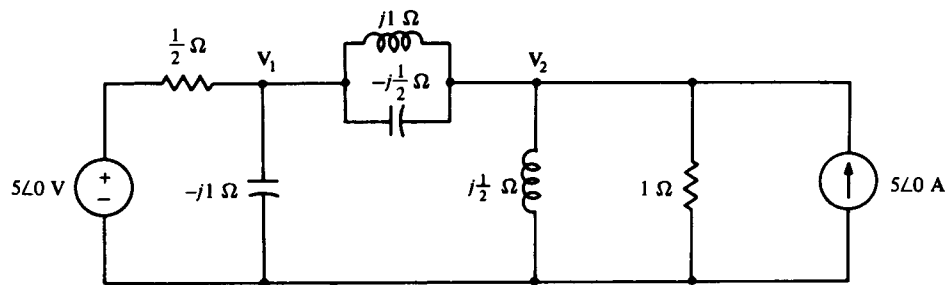
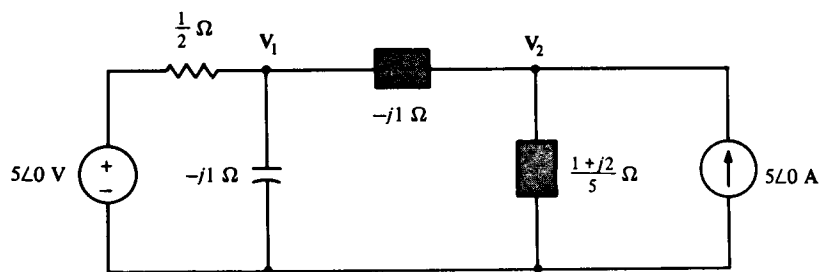


FIGURA 11.1 Circuito a ser analisado pelo método fasorial



(a)



(b)

FIGURA 11.2 Duas versões do circuito fasorial correspondente à Fig. 11.1

As equações nodais, da Fig. 11.2 (b) são

$$2(\mathbf{V}_1 - 5\angle 0) + \frac{\mathbf{V}_1}{-j1} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{-j1} = 0$$

$$\frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{-j1} + \frac{\mathbf{V}_2}{(1 + j2)/5} = 5\angle 0$$

que, na forma simplificada, são

$$(2 + j2)\mathbf{V}_1 - j1\mathbf{V}_2 = 10$$

$$-j1\mathbf{V}_1 + (1 - j1)\mathbf{V}_2 = 5$$

Resolvendo estas equações por determinantes, temos

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -j1 \\ 5 & 1 - j1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 + j2 & -j1 \\ -j1 & 1 - j1 \end{vmatrix}} = \frac{10 - j5}{5} = 2 - j1 \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 + j2 & 10 \\ -j1 & 5 \end{vmatrix}}{5} = \frac{10 + j20}{5} = 2 + j4 \text{ V}$$

Na forma polar estas grandezas são

$$\mathbf{V}_1 = \sqrt{5} \angle -26,6^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_2 = 2\sqrt{5} \angle 63,4^\circ \text{ V}$$

Portanto, as soluções no domínio do tempo, são

$$v_1 = \sqrt{5} \cos(2t - 26,6^\circ) \text{ V}$$

$$v_2 = 2\sqrt{5} \cos(2t + 63,4^\circ) \text{ V}$$



**EXEMPLO 11.2**

Como um exemplo envolvendo uma fonte dependente, vamos considerar a Fig. 11.3, na qual é solicitado calcular a resposta forçada  $i$ . Tomando o nó de terra como mostrado, temos as duas tensões de nó desconhecidas  $v$  e  $v + 3.000i$ , como indicado. O circuito fasorial, em sua forma mais simples, é mostrado na Fig. 11.4, na qual podemos observar que somente uma equação nodal é necessária. Escrevendo a LKC para o nó generalizado, mostrado tracejado, temos

$$\frac{V - 4}{\frac{1}{2}(10^3)} + \frac{V}{\frac{2}{5}(1 - j2)(10^3)} + \frac{V + 3000I}{(2 - j1)(10^3)} = 0$$

Também do circuito fasorial, temos

$$I = \frac{4 - V}{\frac{1}{2}(10^3)}$$

Eliminando  $V$  entre estas duas equações e resolvendo para  $I$ , temos

$$\begin{aligned} I &= 24 \times 10^{-3} / 53,1^\circ \text{ A} \\ &= 24 / 53,1^\circ \text{ mA} \end{aligned}$$

Portanto, no domínio do tempo, temos

$$i = 24 \cos(5000t + 53,1^\circ) \text{ mA}$$

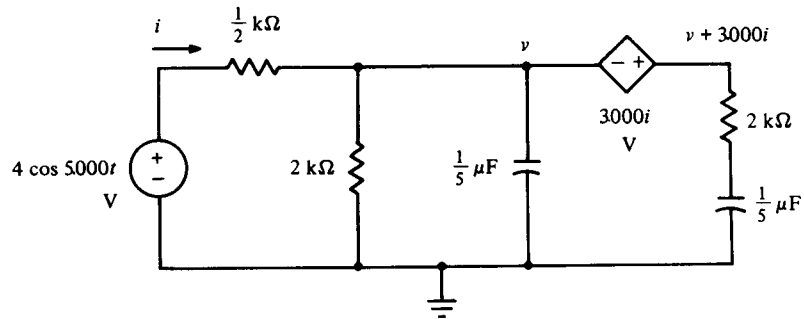


FIGURA 11.3 Circuito contendo uma fonte dependente.

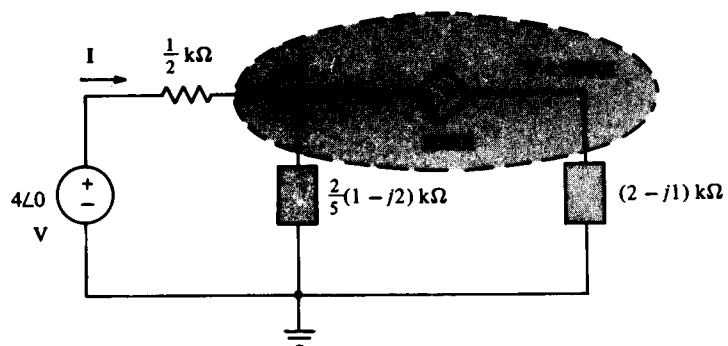


FIGURA 11.4 Circuito fasorial da Fig. 11.3

**EXEMPLO 11.3**

Como um exemplo final ilustrando a análise nodal, vamos calcular a resposta forçada  $v$  na Fig. 11.5, se

$$v_g = V_m \cos \omega t \text{ V}$$

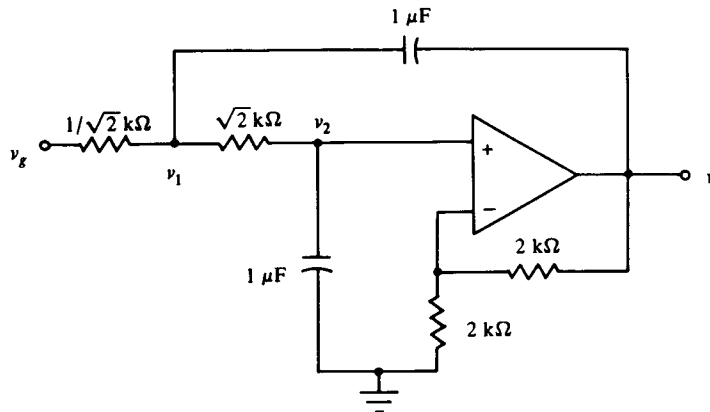


FIGURA 11.5 Circuito contendo um amp. op

Primeiro, notamos que o amp. op. e os dois resistores de 2-kΩ constituem um FTCT com o ganho de  $1 + 2000/2000 = 2$  (ver Seç. 3.4). Portanto,  $v = 2v_2$  ou  $v_2 = v/2$ , como indicado pelo fasor  $V/2$  no circuito fasorial da Fig. 11.6.

Escrevendo as equações nodais nos nós denominados por  $V_1$  e  $V/2$ , temos

$$\frac{V_1 - V_m/0}{(1/\sqrt{2})(10^3)} + \frac{V_1 - (V/2)}{\sqrt{2}(10^3)} + \frac{V_1 - V}{-j10^6/\omega} = 0$$

$$\frac{(V/2) - V_1}{\sqrt{2}(10^3)} + \frac{V/2}{-j10^6/\omega} = 0$$

Eliminando  $V_1$  e resolvendo para  $V$ , resulta em

$$V = \frac{2V_m}{[1 - (\omega^2/10^6)] + j(\sqrt{2}\omega/10^3)}$$

Na forma polar, temos

$$V = \frac{2V_m/\theta}{\sqrt{1 + (\omega/1.000)^4}} \quad (11.1)$$

onde

$$\theta = -\tan^{-1} \left[ \frac{\sqrt{2}\omega/1000}{1 - (\omega/1.000)^4} \right] \quad (11.2)$$

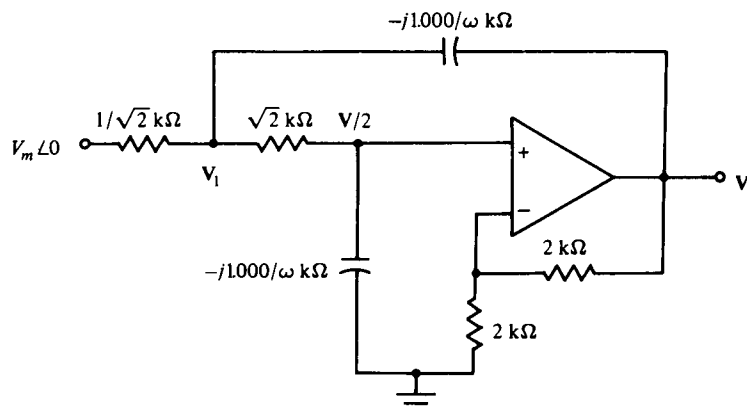


FIGURA 11.6 Circuito fasorial da Fig. 11.5

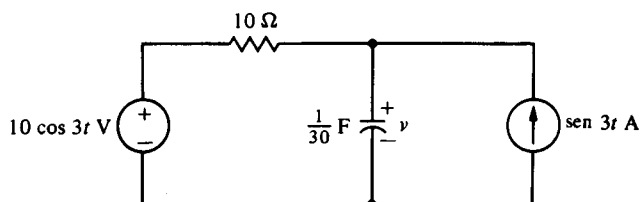
No domínio do tempo, temos

$$v = \frac{2V_m}{\sqrt{1 + (\omega / 1.000)^4}} \cos(\omega t + \theta) \quad (11.3)$$

Podemos notar neste exemplo que, para baixas frequências, digamos  $0 < \omega < 1.000$ , a amplitude da tensão de saída  $v$  é relativamente grande, e, para frequências mais altas, sua amplitude é relativamente baixa. Então o circuito da Fig. 11.5 *filtra* as altas frequências e permite que as baixas frequências “passem”. Tal circuito é chamado *filtro* e será estudado no Capítulo 15.

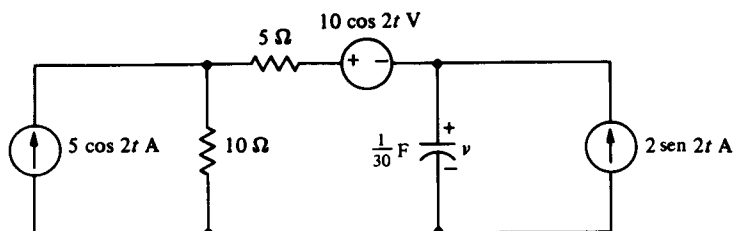
## EXERCÍCIOS

- 11.1.1** Calcule a resposta forçada  $v$  usando a análise nodal.  
*Resposta:*  $10 \text{ sen } 3t \text{ V}$



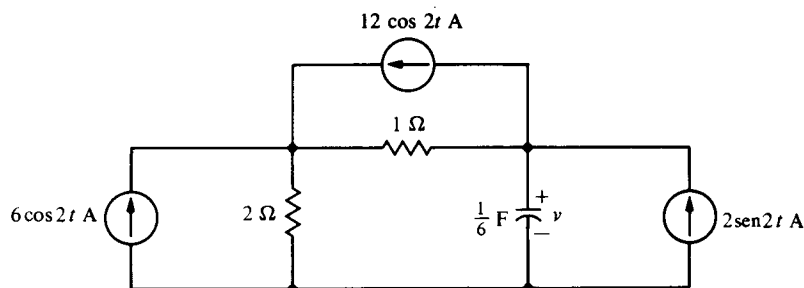
EXERCÍCIO 11.1.1

- 11.1.2** Calcule o valor de  $v$  em regime permanente, usando a análise nodal.  
*Resposta:*  $25\sqrt{2} \cos(2t - 81,9^\circ) \text{ V}$



EXERCÍCIO 11.1.2

- 11.1.3** Calcule a amplitude de  $v$  em (11.3), se  $V_m = 10 \text{ V}$  para (a)  $\omega = 0$ , (b)  $\omega = 1.000 \text{ rad/s}$ , (c)  $\omega = 10.000 \text{ rad/s}$ , e (d)  $\omega = 100.000 \text{ rad/s}$ .  
*Resposta:* (a) 20; (b) 14,14; (c) 0,2; (d) 0,002 V
- 11.1.4** Calcule o valor de  $v$  em regime permanente usando a análise nodal.  
*Resposta:*  $3\sqrt{2} \cos(2t - 135^\circ) \text{ V}$



EXERCÍCIO 11.1.4

## 11.2

### Análise de Malha

#### EXEMPLO 11.4

Para ilustrar a análise de malha de um circuito em regime permanente c.a., vamos calcular  $v_1$  na Fig. 11.1, que foi obtido, na seção anterior, usando a análise nodal. Iremos usar o circuito fasorial da Fig. 11.2 (b), que está redesenhado na Fig. 11.7., com as correntes de malha  $I_1$  e  $I_2$ , como indicado. Evidentemente, a tensão fasorial  $V_1$  pode ser obtida como

$$V_1 = 5 - \frac{I_1}{2} \quad (11.4)$$

As duas equações de malha são

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}I_1 - j1(I_1 - I_2) &= 5 \\ -j1(I_2 - I_1) - j1I_2 + \left(\frac{1+j2}{5}\right)(I_2 + 5) &= 0 \end{aligned} \quad (11.5)$$

Resolvendo estas equações para  $I_1$  temos

$$I_1 = 6 + j2 \text{ A}$$

que substituída em (11.4), fica

$$V_1 = 2 - j1 \text{ V}$$

Este é o mesmo resultado que obtivemos na seção anterior e pode ser usado na obtenção da tensão  $v_1$  no domínio do tempo.

O mesmo procedimento simplificado para escrever as equações de laço e de malha, discutido nas Seç. 4.1 e 4.5 para circuitos resistivos, se aplica a circuitos fasoriais. Por exemplo, na Fig. 11.7, se  $I_3 = -5$  é a corrente de malha da malha da direita, no sentido horário, as duas equações de malha são escritas por inspeção como

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - j1\right)I_1 - (-j1)I_2 &= 5 \\ -(-j1)I_1 + \left(-j1 - j1 + \frac{1+j2}{5}\right)I_2 - \left(\frac{1+j2}{5}\right)I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Estas equações são equivalentes a (11.5) e são formadas como no caso de circuitos resistivos. Isto é, na primeira equação o coeficiente da primeira variável é a soma das impedâncias ao redor da primeira malha. Os outros coeficientes são o negativo das impedâncias comuns à primeira e às malhas cujos números correspondem às correntes. O membro da direita é a soma das fontes de tensão na malha com as polaridades consistentes com a direção das correntes de malha. Trocando “primeiro” por “segundo”, obtém-se a próxima equação e assim por diante. O desenvolvimento dual, como descrito na Seç. 4.1, se mantém para as equações nodais.

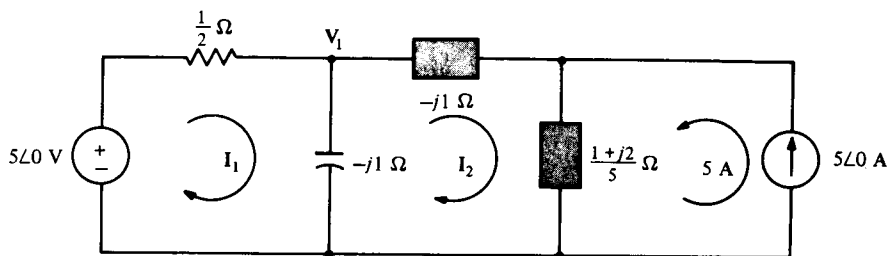


FIGURA 11.7 Circuito da Fig. 11.2 redesenhado para a análise de malha

#### EXEMPLO 11.5

Como um exemplo final, vamos considerar o circuito da Fig. 11.8(a) onde a resposta é o valor de  $v_1$  em regime permanente. O circuito fasorial é mostrado na Fig. 11.8(b), com as correntes de laço como indicado.

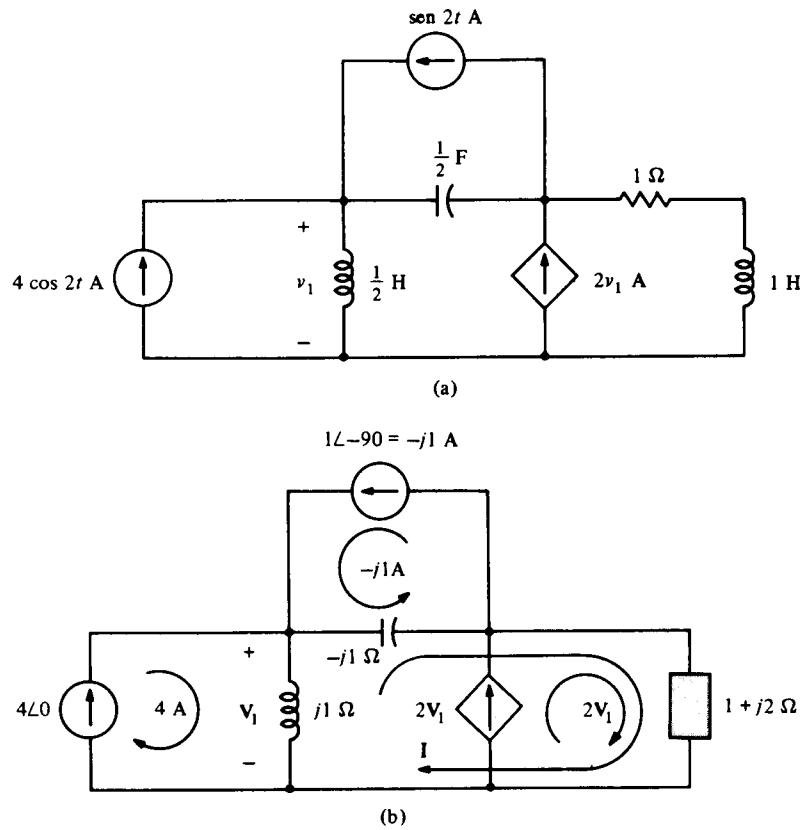


FIGURA 11.8 (a) Circuito no domínio do tempo; (b) correspondente fasorial

Aplicando a LKT ao redor do laço denominado  $I$  temos

$$-V_1 - j1(-j1 + I) + (1 + j2)(I + 2V_1) = 0$$

Também, da figura, vemos que

$$V_1 = j1(4 - I)$$

Eliminando  $I$  destas equações e resolvendo para  $V_1$  temos

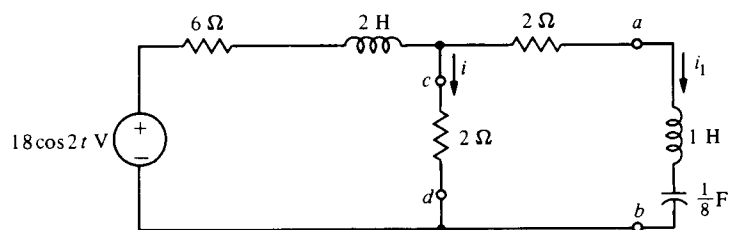
$$V_1 = \frac{-4 + j3}{5} = 1/\underline{143,1^\circ} \text{ V}$$

Portanto, no domínio do tempo, a tensão é

$$v_1 = \cos(2t + 143,1^\circ) \text{ V}$$

## EXERCÍCIOS

- 11.2.1 Calcule a resposta forçada  $i$  na Fig. 11.3 usando a análise de malha.  
 11.2.2 Resolva o Ex. 11.1.4 usando a análise de malha.



EXERCÍCIO 11.2.3

- 11.2.3** Calcule a corrente  $i$  em regime permanente, usando a análise de laço.  
 Resposta:  $\sqrt{2} \cos(2t - 45^\circ)$  A

## 11.3

### Teoremas de Rede

Porque o circuito fasorial é exatamente igual aos circuitos resistivos, exceto pela natureza das correntes, tensões e impedâncias, todos os teoremas de rede discutidos no Capítulo 5 para circuitos resistivos são aplicáveis a circuitos fasoriais. Nesta seção vamos ilustrar superposição, teoremas de Norton e de Thévenin e princípio da proporcionalidade, aplicados a circuitos fasoriais lineares.

No caso de superposição, se um circuito fasorial tem duas ou mais entradas, podemos calcular os fasores corrente e tensão devido à ação de cada entrada atuando isoladamente (i.é., com as outras mortas) e somar as respostas individuais correspondentes no domínio do tempo para obter a resposta total. No caso de um circuito como o da Fig. 11.1, podemos resolver o circuito fasorial correspondente da Fig. 11.2 por análise de malha ou de nó ou por superposição porque as duas fontes estão operando na mesma frequência, em  $\omega = 2$  rad/s. Se as fontes tiverem frequências diferentes, deveremos usar superposição, porque a definição de  $Z(j\omega)$  nos permite usar somente uma frequência de cada vez e, logo, não podemos nem mesmo construir um circuito fasorial.

#### EXEMPLO 11.6

Para ilustrar a superposição, vamos calcular a resposta forçada  $i$  na Fig. 11.9. Existem duas fontes, uma c.a. com  $\omega = 2$  rad/s e uma fonte c.c. com  $\omega = 0$ . Portanto,

$$i = i_1 + i_2$$

onde  $i_1$  é devida à fonte de tensão atuando sozinha e  $i_2$  é devida à fonte de corrente atuando sozinha. Usando fasores, podemos calcular  $i_1$  e  $i_2$  por meio de suas respectivas representações fasoriais  $I_1$  e  $I_2$ , que são as correntes fasoriais mostradas na Fig. 11.10 (a) e (b), respectivamente. A Fig. 11.10 (a) é um circuito fasorial representando o circuito no domínio do tempo com a fonte de corrente morta e  $\omega = 2$  rad/s. A Fig. 11.10 (b) também é um circuito fasorial, com a fonte de tensão morta e  $\omega = 0$ .

No último caso,  $\omega = 0$ , os indutores são curtos-circuitos ( $Z_L = j\omega L = 0$ ), e o capacitor é um circuito aberto ( $Z_C = 1/j\omega C$ , que se torna infinito quando  $\omega \rightarrow 0$ ). Também, visto que a fonte de corrente é

$$i_g = 4 \cos(0t + 0) \text{ A}$$

sua representação fasorial é

$$I_g = 4/0^\circ \text{ A}$$

Resumidamente, este é o mesmo caso c.c. considerado anteriormente, como é evidente na Fig. 11.10 (b).

Na Fig. 11.10(a), temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{5/0^\circ}{3 + j2 + [(1 + j2)(-j1)/(1 + j2 - j1)]} \\ &= \sqrt{2}/-8,1^\circ \end{aligned}$$

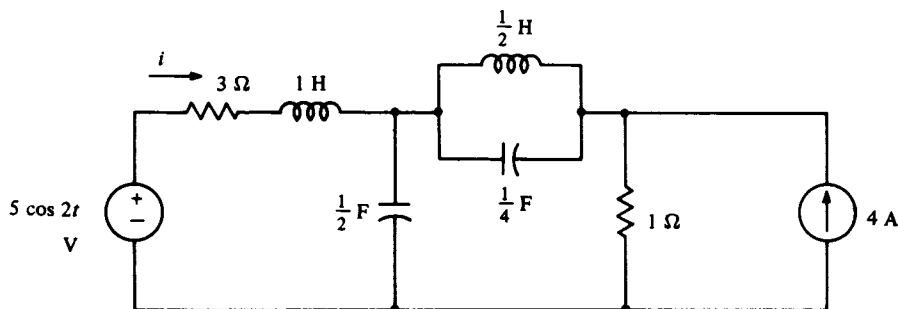


FIGURA 11.9 Circuito com uma fonte c.a. e uma c.c.

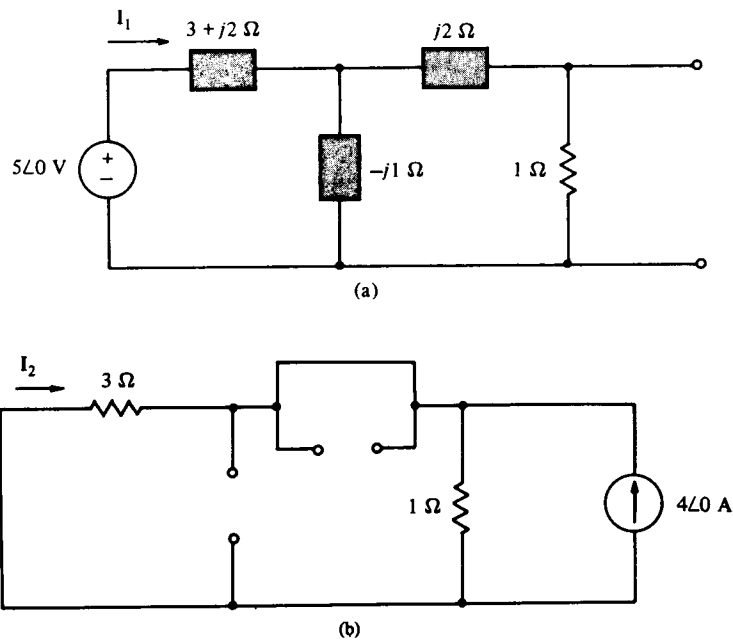


FIGURA 11.10 Circuitos fasoriais representando a Fig. 11.9

da qual

$$i_1 = \sqrt{2} \cos(2t - 8,1^\circ) \text{ A}$$

Na Fig. 11.10 (b) temos, por divisão de corrente,

$$I_2 = -\left(\frac{1}{1+3}\right)(4) = -1\angle 0^\circ \text{ A}$$

da qual, visto que  $\omega = 0$ ,

$$i_2 = -1 \text{ A}$$

Portanto, a resposta forçada total é

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 \\ &= \sqrt{2} \cos(2t - 8,1^\circ) - 1 \text{ A} \end{aligned}$$

Como exemplo de um circuito com duas fontes senoidais com frequências diferentes de zero, o leitor deve se referir ao Ex. 11.3.1. O procedimento é, sem dúvida, exatamente o mesmo do exemplo anterior.

No caso dos teoremas de Norton e de Thévenin, o procedimento é idêntico ao adotado para circuitos resistivos. A única mudança é que  $v_{oc}$  e  $i_{sc}$ , tensão de circuito aberto e corrente de curto-circuito, no domínio do tempo, são trocadas por suas representações fasoriais,  $V_{oc}$  e  $I_{sc}$  e  $R_{th}$ , a resistência de Thévenin é trocada por  $Z_{th}$ , a impedância de Thévenin (do circuito morto). Deve haver apenas uma frequência presente; por outro lado, podemos empregar superposição para dividir o problema em problemas de frequências únicas, para cada uma das quais os teoremas de Norton e de Thévenin podem ser aplicados.

Em geral, os circuitos equivalentes de Thévenin e de Norton no domínio do tempo são mostrados na Fig. 11.11. Há, sem dúvida, uma grande similaridade com o caso resistivo.

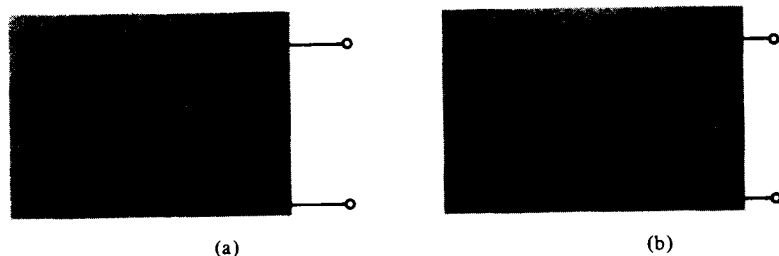


FIGURA 11.11 Circuitos fasoriais equivalentes (a) Thévenin e (b) Norton

**EXEMPLO 11.7**

Como um exemplo, vamos usar o teorema de Thévenin para calcular a resposta forçada  $v$  da Fig. 11.12. Vamos calcular sua representação fasorial  $V$  usando o equivalente de Thévenin do circuito fasorial à esquerda dos terminais  $a-b$ . A tensão fasorial do circuito aberto  $V_{oc}$  é calculada da Fig. 11.13(a), e o fasor corrente de curto-circuito é calculado da Fig. 11.13(b). Então, a impedância de Thévenin, como para circuitos resistivos, é

$$Z_{th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} \quad (11.6)$$

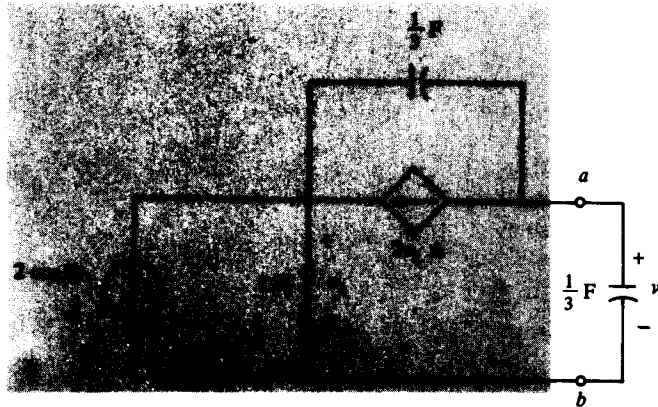
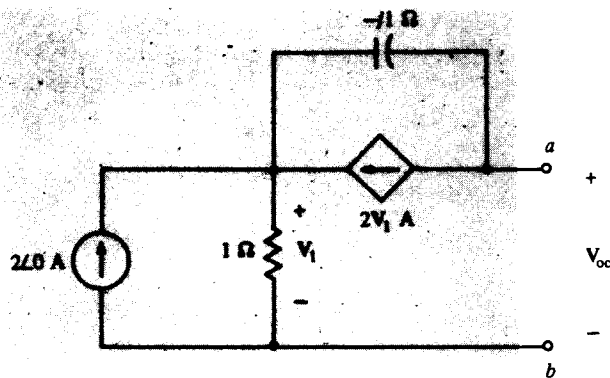
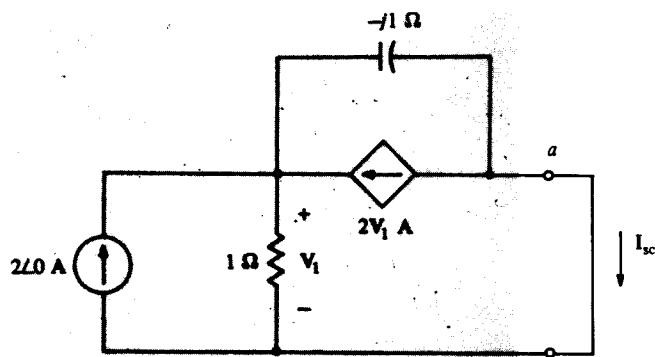


FIGURA 11.12 Circuito com uma fonte de corrente dependente



(a)



(b)

FIGURA 11.13 Circuito fasorial para emprego no teorema de Thévenin



Na Figura 11.13(a), visto que os terminais  $a$ - $b$  estão abertos, a corrente  $2\angle 0^\circ$  flui no resistor e a corrente  $2V_1$  flui no capacitor. Portanto, pela LKT, temos

$$V_{oc} = V_1 - (-j1)(2V_1)$$

onde

$$V_1 = 2(1) = 2 \text{ V}$$

Então, temos

$$V_{oc} = 2 + j4 \text{ V}$$

Na Fig. 11.13(b) as duas equações nodais necessárias são

$$\frac{V_1}{1} + \frac{V_1}{-j1} - 2V_1 = 2$$

e

$$I_{sc} = -V_1 + 2$$

Destas, encontramos

$$I_{sc} = 3 + j1 \text{ A}$$

A impedância de Thévenin, por (11.6) é, portanto,

$$Z_{th} = \frac{2 + j4}{3 + j1} = 1 + j1 \Omega$$

O circuito equivalente de Thévenin é mostrado na Fig. 11.14, com o capacitor de  $1/3$ -F, correspondendo a  $-j1\Omega$ , conectado aos terminais  $a$ - $b$ .

É simples ver, agora, por divisão de tensão, que

$$\begin{aligned} V &= \left[ \frac{-j1}{(1 + j1) + (-j1)} \right] (2 + j4) \\ &= 4 - j2 \\ &= 2\sqrt{5} \angle -26,6^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Portanto, no domínio do tempo, temos

$$v = 2\sqrt{5} \cos(3t - 26,6^\circ) \text{ V}$$

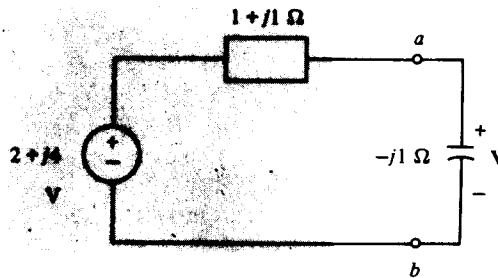


FIGURA 11.14 Circuito fasorial equivalente de Thévenin ao circuito da Fig. 11.12

### EXEMPLO 11.8

Como um tópico final nesta seção, vamos considerar a rede escada da Fig. 11.15 e usar o princípio da proporcionalidade para obter a resposta  $V$  em regime permanente. Isto requer, como no caso resistivo, que assumamos que  $V$  tenha algum valor conveniente, como  $V = 1$  e fazer o trabalho inverso para encontrar o  $V_g$  correspondente. Então, o valor correto de  $V$  é calculado pela multiplicação do valor assumido por uma constante apropriada.

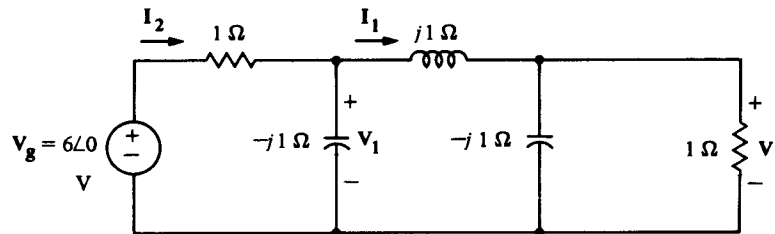


FIGURA 11.15 Rede escada fasorial

Vamos iniciar assumindo

$$V = 1 \text{ V}$$

Então, do circuito, temos

$$I_1 = \frac{V}{1} + \frac{V}{-j1} = 1 + j1 \text{ A}$$

Continuando, temos

$$V_1 = j1I_1 + V = j1(1 + j1) + 1 = j1 \text{ V}$$

$$I_2 = \frac{V_1}{-j1} + I_1 = -1 + (1 + j1) = j1 \text{ A}$$

$$V_g = 1I_2 + V_1 = j1 + j1 = j2 \text{ V}$$

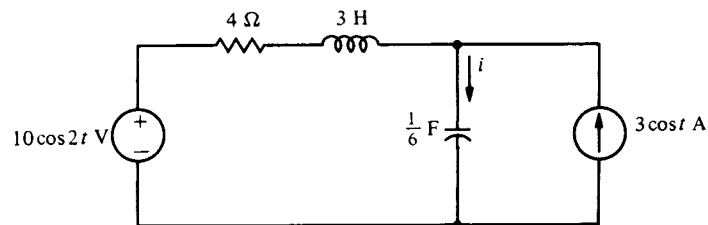
Portanto,  $V = 1$  é a resposta para  $V = j2$ . Se multiplicarmos este valor de  $V_g$  por  $6/j2$  para obter o valor correto de  $V_g$ , então, pelo princípio da proporcionalidade, devemos multiplicar a resposta assumida de 1 pelo mesmo fator  $6/j2$  para obter o valor correto de  $V$ .

Portanto, temos

$$V = \left(\frac{6}{j2}\right)(1) = -j3 \text{ V}$$

## EXERCÍCIOS

- 11.3.1** Calcule a corrente  $i$  em regime permanente.  
 Resposta:  $2 \cos(2t - 36,9^\circ) + 3 \cos(t + 73,8^\circ) \text{ A}$



EXERCÍCIO 11.3.1

- 11.3.2** Para o circuito fasorial correspondente ao Ex. 11.2.3, troque a parte à esquerda dos terminais  $a-b$  pelo equivalente de Thévenin e calcule a corrente  $i_1$  em regime permanente.  
 Resposta:  $V_{oc} = \frac{2}{5}(2 - j1) \text{ V}$ ,  $Z_{th} = \frac{1}{5}(18 + j1) \Omega$ ,  $i_1 = \cos 2t \text{ A}$
- 11.3.3** Calcule  $V_1$ ,  $I_1$  e  $I_2$  na Fig. 11.15.  
 Resposta:  $3\text{V}$ ,  $3 - j3 \text{ A}$ ,  $3 \text{ A}$

## Diagramas Fasoriais

Visto que fasores são números complexos, eles podem ser representados por vetores em um plano, onde operações, tais como soma de fasores, possam ser realizadas geometricamente. Tal desenho é chamado *diagrama fasorial*, e pode ser muito útil na análise de circuitos c.a. em regime permanente.

### EXEMPLO 11.9

Para ilustrar, vamos considerar o circuito fasorial da Fig. 11.16, para o qual desenhamos um diagrama fasorial com todas as tensões e correntes. Para iniciar, vamos observar que a corrente  $\mathbf{I}$  é comum a todos os elementos e tomá-la como nosso fasor de *referência*, denominado por

$$\mathbf{I} = |\mathbf{I}| \angle 0^\circ$$

Atribuímos arbitrariamente o ângulo zero a  $\mathbf{I}$ , visto que desejamos que  $\mathbf{I}$  seja nossa referência. Podemos sempre ajustar este valor assumido para o valor verdadeiro pelo princípio da proporcionalidade discutido na seção anterior.

As tensões fasoriais do circuito são

$$\mathbf{V}_R = R\mathbf{I} = R|\mathbf{I}|$$

$$\mathbf{V}_L = j\omega L\mathbf{I} = \omega L|\mathbf{I}| \angle 90^\circ$$

$$\mathbf{V}_C = -j\frac{1}{\omega C}\mathbf{I} = \frac{1}{\omega C}|\mathbf{I}| \angle -90^\circ$$

e

$$\mathbf{V}_g = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C$$

Estes valores são mostrados no diagrama fasorial da Fig. 11.17(a), onde foi assumido que  $|\mathbf{V}_L| > |\mathbf{V}_C|$ . Os casos,  $|\mathbf{V}_L| < |\mathbf{V}_C|$  e  $|\mathbf{V}_L| = |\mathbf{V}_C|$  são mostrados na Fig. 11.17(b) e (c), respectivamente. Em todos os casos, os comprimentos representando as unidades de corrente e de tensão não são necessariamente os mesmos, de forma que, para maior clareza,  $\mathbf{I}$  é indicado maior que  $\mathbf{V}_R$ .

No caso (a), a reatância total é indutiva, e a corrente atrasa a tensão da fonte de um ângulo  $\theta$ , que pode ser medido. Em (b) o circuito tem uma reatância total capacitiva, e a corrente está adiantada em relação à tensão. Finalmente, em (c) a corrente e a tensão estão em fase, visto que as componentes de reatância indutiva e capacitiva cancelam exatamente uma à outra. Estas conclusões se obtêm também da equação

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_g}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{V}_g}{R + j[\omega L - (1/\omega C)]} \quad (11.7)$$

O caso (c) é caracterizado por

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

ou

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11.8)$$

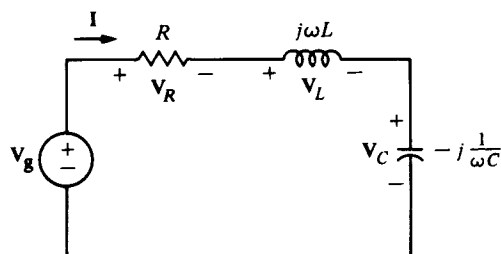


FIGURA 11.16 Circuito fasorial RLC série

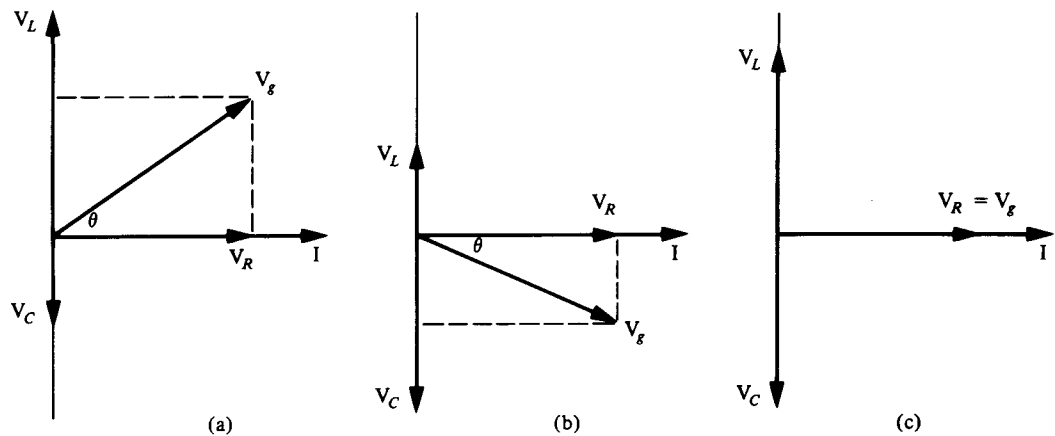


FIGURA 11.17 Diagrama fasorial para Fig. 11.16

Se a corrente na Fig. 11.16 é fixa, então a componente real da tensão  $V_g$  é fixa, visto que ela é  $R|I|$ . Neste caso, o lugar geométrico do fasor  $V_g$  (sua possível localização no diagrama fasorial) está em linha tracejada na Fig. 11.18. A tensão fasorial varia para cima e para baixo nesta linha, quando  $\omega$  varia entre zero e infinito. A amplitude mínima da tensão ocorre quando  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ , como se pode ver na figura. Para qualquer outra frequência, uma amplitude maior de tensão é necessária para a mesma corrente.

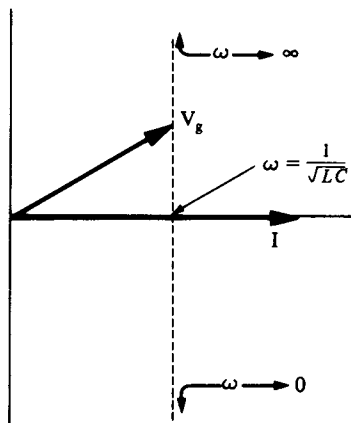


FIGURA 11.18 Lugar geométrico da tensão fasorial para uma corrente fixa

### EXEMPLO 11.10

Como um último exemplo ilustrando o uso de diagramas fasoriais, vamos calcular o lugar geométrico de  $I$  com variação de  $R$ , na Fig. 11.19. A corrente é dada por

$$I = \frac{V_m}{R + j\omega L} = \frac{V_m(R - j\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

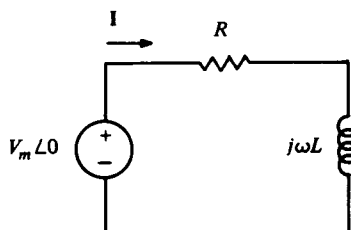


FIGURA 11.19 Circuito fasorial RL

Portanto, se

$$\mathbf{I} = x + jy \quad (11.9)$$

temos

$$x = \operatorname{Re} \mathbf{I} = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (11.10)$$

$$y = \operatorname{Im} \mathbf{I} = \frac{-\omega L V_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (11.11)$$

A equação do lugar geométrico é a equação satisfeita por  $x$  e  $y$  quando  $R$  varia; logo, precisamos eliminar  $R$  entre estas duas últimas equações.

Se dividirmos a primeira destas duas equações pela segunda, temos

$$\frac{x}{y} = -\frac{R}{\omega L}$$

da qual

$$R = -\frac{\omega L x}{y}$$

Substituindo este valor de  $R$  em (11.11), temos, após algumas simplificações,

$$x^2 + y^2 = -\frac{V_m y}{\omega L}$$

Este resultado pode ser reescrito como

$$x^2 + \left(y + \frac{V_m}{2\omega L}\right)^2 = \left(\frac{V_m}{2\omega L}\right)^2 \quad (11.12)$$

que é a equação de um círculo com o centro em  $[0, -(V_m/2\omega L)]$  e raio  $V_m/\omega L$ .

O círculo (11.12) parece ser o lugar geométrico, com  $R$  variando do fasor  $\mathbf{I} = x + jy$ . Entretanto, por (11.10),  $x > 0$ ; logo, o lugar geométrico é verdadeiramente o semicírculo mostrado em tracejado no diagrama fasorial da Fig. 11.20. A tensão  $V_m \angle 0$ , tomada como referência, é também mostrado junto

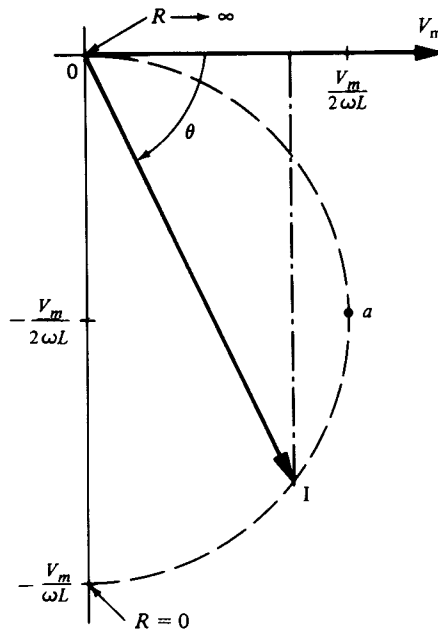


FIGURA 11.20 Lugar geométrico do fasor  $\mathbf{I}$

com o fasor  $\mathbf{I}$ . Se  $R = 0$ , temos, de (11.10) e (11.11),  $x = 0$  e  $y = -V_m/\omega L$ . Se  $R \rightarrow \infty$ , então  $x \rightarrow 0$  e  $y \rightarrow 0$ . Então,  $R$  varia de 0 a  $\infty$ , a corrente fasorial move-se ao redor do círculo no sentido anti-horário.

Se  $\mathbf{I}$  é como mostra a Fig. 11.20, a corrente fasorial pode ser resolvida em duas componentes, uma tendo amplitude  $I_m \cos \theta$ , em fase com a tensão, e outra com amplitude  $I_m \sin \theta$ , que está  $90^\circ$  fora de fase com a tensão. Esta construção está indicada pela linha vertical de traços e pontos. Como iremos ver no próximo capítulo, a componente em fase da corrente é importante para calcular a potência média entregue pela fonte. Logo, o diagrama fasorial nos dá um método para ver de relance a componente da corrente em fase máxima. Evidentemente, isto ocorre no ponto  $a$ , que corresponde a  $\theta = 45^\circ$ . Este é o caso em  $x = -y$  ou  $R = \omega L$ .

## EXERCÍCIOS

- 11.4.1 Elimine  $\omega L$  em (11.10) e (11.11) e mostre que, quando  $\omega L$  varia, o lugar geométrico do fasor  $\mathbf{I} = x + jy$  é um semicírculo.

Resposta:  $\left(x - \frac{V_m}{2R}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{V_m}{2R}\right)^2, y \leq 0$

- 11.4.2 Calcule  $\omega L$  no Ex. 11.4.1, tal que  $\text{Im } \mathbf{I}$  tenha seu maior valor negativo. Também calcule  $\mathbf{I}$  para este caso.

Resposta:  $R, (V_m/\sqrt{2} R) \angle -45^\circ$

## 11.5

### Spice para Circuitos em Regime Permanente C.A.

O SPICE é uma ferramenta poderosa na análise de circuitos em regime permanente c.a. e é particularmente útil no exercício de várias operações tediosas de aritmética complexa associadas à obtenção destas soluções. O procedimento é muito similar ao descrito para o caso c.c., usando a declaração de controle da solução .AC. SPICE analisa o circuito fasorial para as correntes e tensões fasoriais, resultantes tanto de fontes independentes como de dependentes, que também são expressas como fasores. Visto que o SPICE usa o circuito fasorial no domínio da frequência, todas as fontes c.a. devem ter a mesma frequência. O leitor deve rever a declaração .AC do Apêndice E antes de continuar com esta seção.

**EXEMPLO 11.11** Para ilustrar a aplicação do SPICE considere o circuito da Fig. 11.1. Vamos calcular a tensão do nó 1 na forma polar e a corrente no resistor de 1-ohm na forma retangular. O arquivo de circuito para calcular estes valores é

```
SOLUÇÃO EM REGIME PERMANENTE C.A. PARA O CIRCUITO DA FIG. 11.1
* DECLARAÇÕES DE DADOS
V1 100 0 AC 5 0
R1 100 1 .5
C1 1 0 .5
C2 1 2 1
L1 1 2 .5
L2 2 0 .25
R2 2 0 1
I1 0 2 AC 5 0
* DECLARAÇÃO DE CONTROLE DA SOLUÇÃO PARA ANÁLISE C.A. (f = 2/2*PI Hz)
.AC LIN 1 .3183 .3183
* DECLARAÇÃO DE CONTROLE DA SAÍDA PARA V(1) e I(R2)
.PRINT AC VM(1) VP(1) IR(R2) II(R2)
.END
```

A solução impressa neste caso é

FREQ	VM(1)	VP(1)	IR(R2)	II(R2)
83E-01	2.263E+00	-2.657E+01	2.000E+00	4.000E+00

**EXEMPLO 11.12** Como um segundo exemplo, considere calcular a corrente fasorial  $\mathbf{I}$  no circuito da Fig. 11.3. Um arquivo de circuito para os nós numerados seqüencialmente no sentido horário, iniciando com 1 no terminal positivo

da fonte senoidal, é

```
SOLUÇÃO EM REGIME PERMANENTE C.A. PARA A FIG. 11.3
*DECLARAÇÕES DE DADOS
V 1 0 AC 4 0
R1 1 2 0.5K
R2 2 0 2K
C1 2 0 0.2UF
H 3 2 V -3000
R3 3 4 2K
C2 4 0 0.2UF
* DECLARAÇÃO DE CONTROLE DA SOLUÇÃO PARA  $f = 5.000/(2*3. 1416)$ 
.AC LIN 1 795.77 795.77
.PRINT AC IM (R1) IP(R1)
.END
```

A solução é

FREQ	IM(R1)	IP(R1)
7.958E+02	2.400E-02	5.313E+01

## EXEMPLO 11.13

Para um exemplo final da utilidade do SPICE vamos calcular a tensão fasorial de saída do circuito do amp. op. da Fig. 11.5, se a tensão de entrada é  $v_g = 10 \cos(1.000 t + 30^\circ)$  V. Um arquivo de circuito para os nós do inversor de entrada do amp. op., a saída do amp. op. e a fonte de entrada, assinaladas como 3, 4 e 10, respectivamente, com nós 1 e 2, como mostrado, é

```
SOLUÇÃO EM REGIME PERMANENTE C.A. DA FIG. 11.5.
*DECLARAÇÕES DE DADOS USANDO AMP. OP. CKT DO CAPITULO 4
.LIB OPAMP.CKT
VG 10 0 AC 10 30
R1 10 1 0.707K
R2 1 2 1.414K
C1 1 4 1UF
C2 2 0 1UF
R3 3 0 2K
R4 3 4 2K
XOPAMP 3 2 4 OPAMP
DECLARAÇÃO DE CONTROLE DA SOLUÇÃO [ $F = 1.000/2*3. 1416$ ] Hz
.AC LIN 1 159.15 159.15
.PRINT AC VM(4) VP(4)
.END
```

Este arquivo de circuito dá uma solução

FREQ	VM(4)	VP(4)
1.592E+02	1.414E+01	-5.999E+01

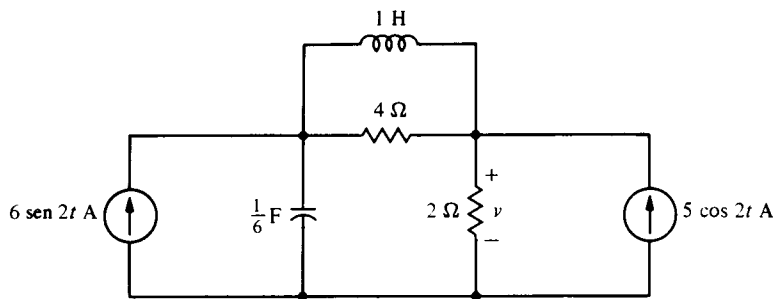
Nossa discussão limitou-se à solução para circuitos com uma única frequência. Desenhos de respostas para entradas com frequência variável serão discutidos no Capítulo 15.

## EXERCÍCIOS

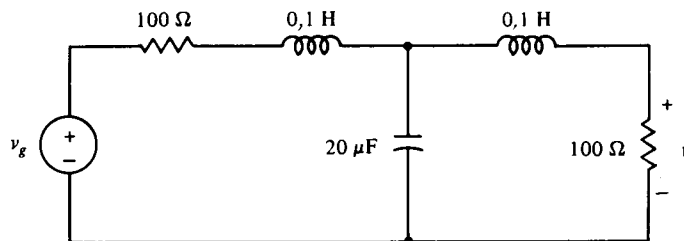
- 11.5.1 Use o SPICE para calcular a representação fasorial de  $v$  no Ex. 11.1.4, para  $\omega = 5$  rad/s.  
Resposta:  $2,224 \angle -158,2^\circ$  V
- 11.5.2 Use o SPICE para calcular a corrente fasorial do indutor de 1-H na Fig. 11.8(a), para  $\omega = 6,283$  rad/s  
Resposta:  $0,331 \angle 47,8^\circ$  A

## PROBLEMAS

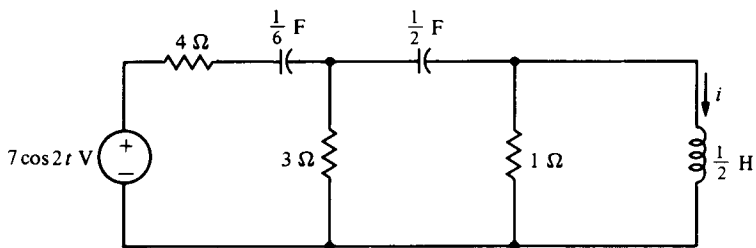
- 11.1 Calcule a tensão  $v$  em regime permanente, usando análise nodal.
- 11.2 Use análise nodal para calcular o valor de  $v$  em regime permanente, se  $v_g = V_m \cos \omega t$  e calcule a amplitude de  $v$  para os casos de  $\omega =$  (a) 0, (b) 1000 e (c)  $10^6$  rad/s. Compare o resultado para este circuito com o da Fig. 11.6
- 11.3 Calcule a corrente  $i$  em regime permanente, usando análise nodal.
- 11.4 Calcule a tensão  $v$  em regime permanente, usando análise nodal.
- 11.5 Calcule a tensão  $v$  em regime permanente, usando análise nodal.
- 11.6 Calcule a corrente  $i_1$  em regime permanente, usando análise nodal.
- 11.7 Resolva o Ex. 11.1.1, usando análise de laço.
- 11.8 Resolva o Ex. 11.1.2, usando análise de malha.
- 11.9 Calcule a tensão  $v$  em regime permanente, usando análise de laço se  $i_{g1} = 6 \cos 4t$  A =  $i_{g2} = 2 \cos 4t$  A.
- 11.10 Calcule a tensão  $v$  em regime permanente.



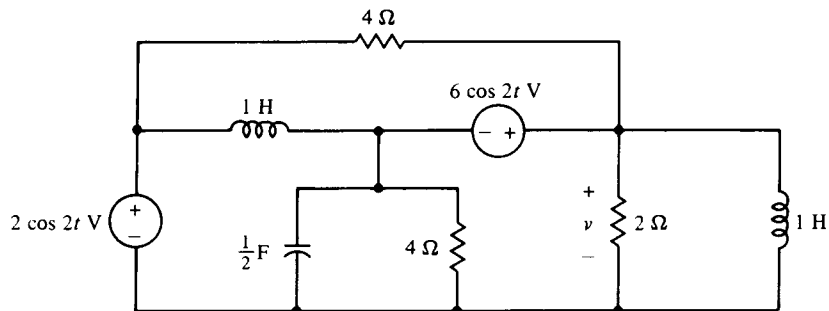
PROBLEMA 11.1



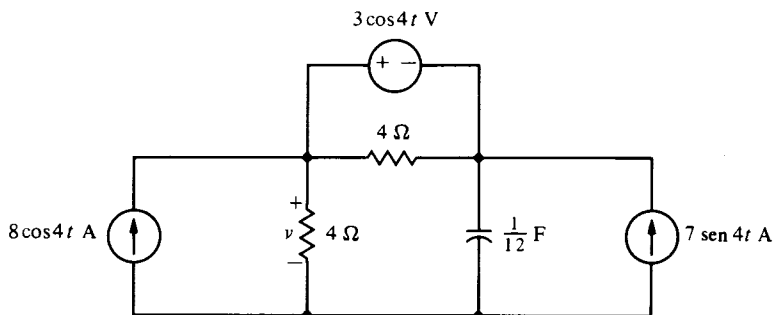
PROBLEMA 11.2



PROBLEMA 11.3



PROBLEMA 11.4

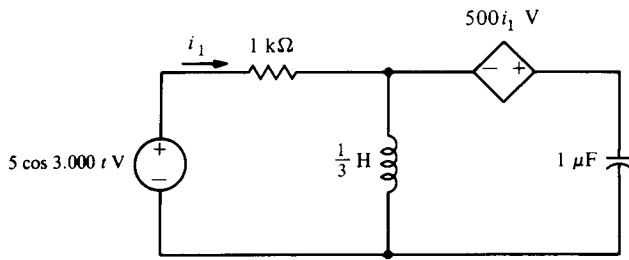


PROBLEMA 11.5

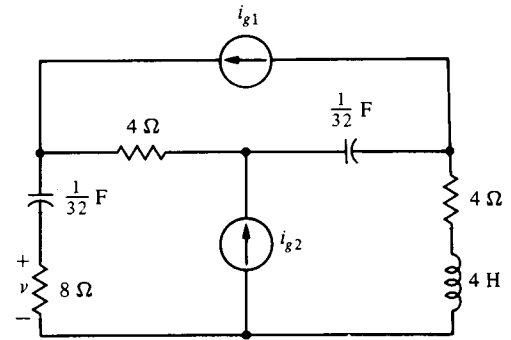


- 11.11 Calcule a corrente  $i$  em regime permanente.  
 11.12 Calcule a corrente  $i$  em regime permanente.  
 11.13 Calcule a tensão  $v$  em regime permanente.  
 11.14 Calcule a tensão  $v$  em regime permanente.  
 11.15 Calcule a resposta forçada  $i$  se  $v_g = 4 \cos 1.000t$  V.  
 11.16 Calcule a tensão  $v$  em regime permanente.

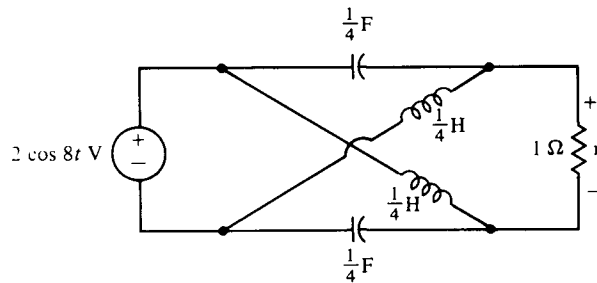
- 11.17 Calcule o valor de  $v$  em regime permanente.  
 11.18 Mostre que se  $Z_1, Z_4 = Z_2, Z_5$  no circuito "ponte" mostrado, então  $I = V = 0$  e, portanto, todas as outras correntes e tensões permanecem inalteradas para qualquer valor de  $Z_5$ . Logo, ela pode ser trocada por um circuito aberto, um curto-circuito etc. Neste caso, o circuito é dito como sendo uma *ponte equilibrada*.



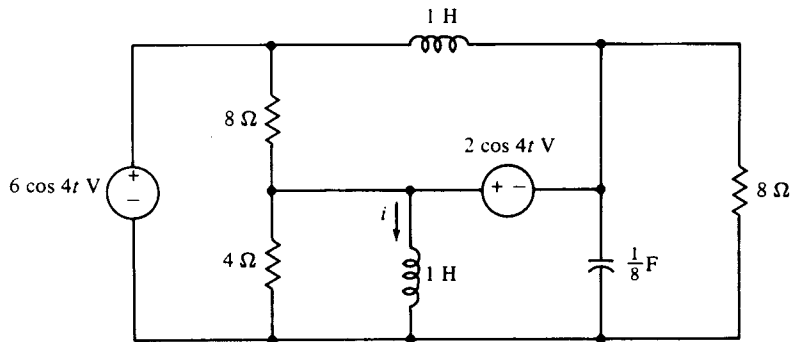
PROBLEMA 11.6



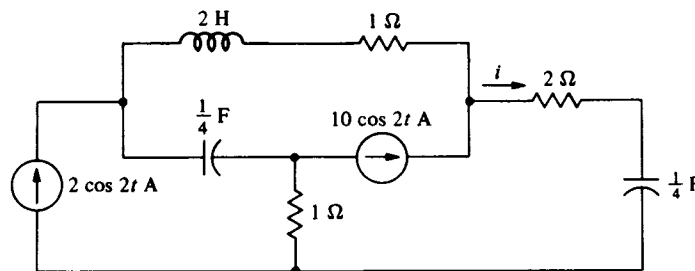
PROBLEMA 11.9



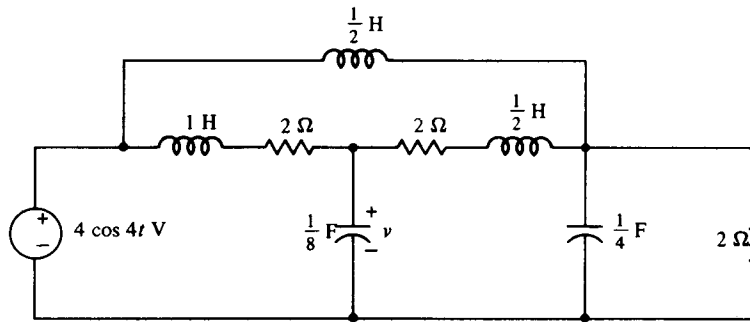
PROBLEMA 11.10



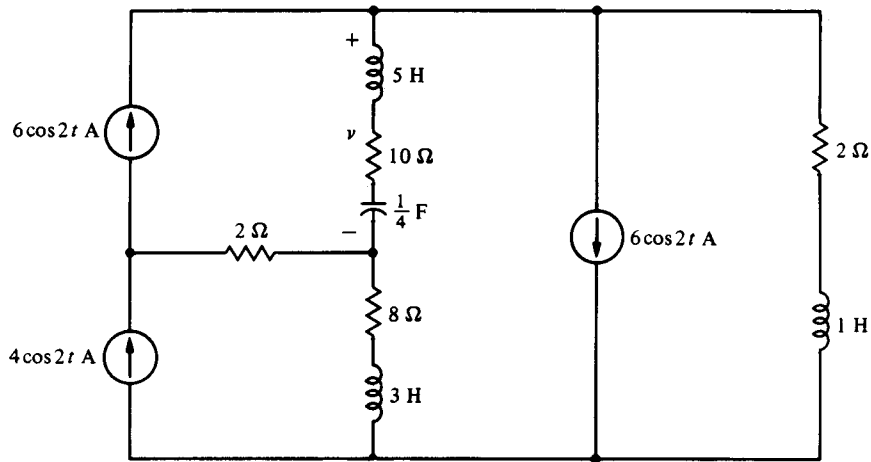
PROBLEMA 11.11



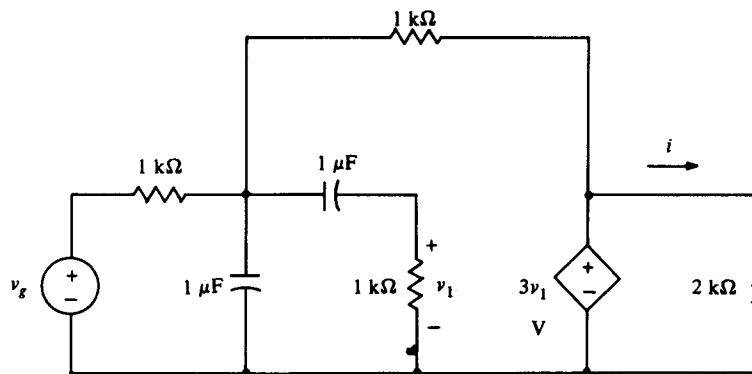
PROBLEMA 11.12



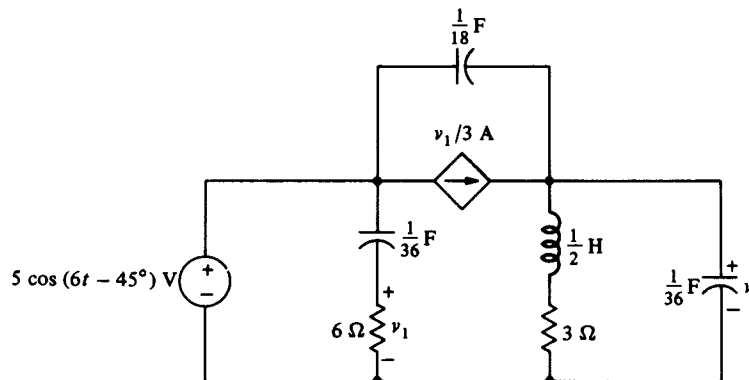
PROBLEMA 11.13



PROBLEMA 11.14



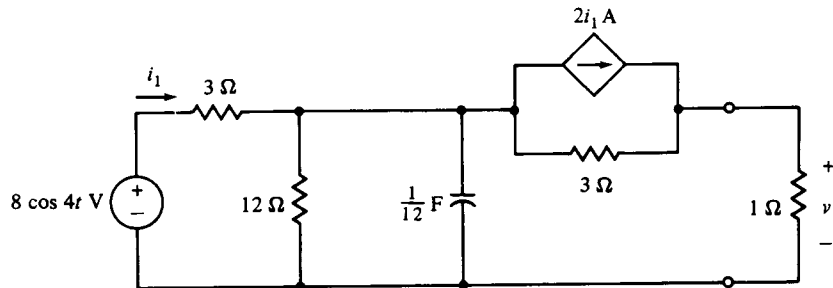
PROBLEMA 11.15



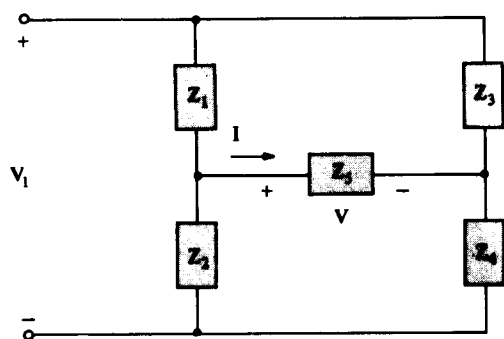
PROBLEMA 11.16

- 11.19 Mostre que o circuito do Prob. 11.13 é uma ponte equilibrada com a associação série de  $2\ \Omega$  e  $1/2\ \text{H}$ , constituindo  $Z_5$  no Prob. 11.18. Substitua  $Z_5$  por um curto e mostre que o mesmo  $v$  é obtido, como antes.
- 11.20 Note que o circuito fasorial correspondente é uma ponte equilibrada e use o método do Prob. 11.18, com  $Z_5$  substituído por um circuito aberto, para encontrar a resposta forçada  $v$ .

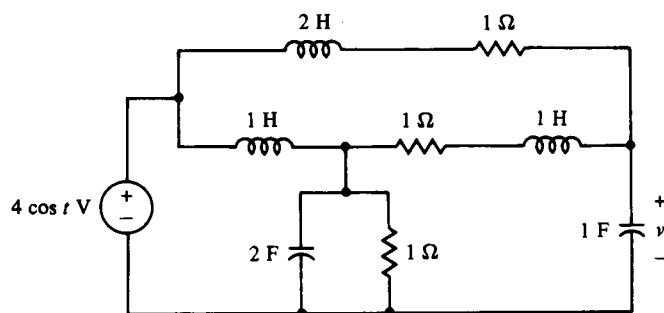
- 11.21 Calcule a corrente  $i$  em regime permanente, se  $v_g = 4 \cos 3.000t\ \text{V}$ .
- 11.22 Calcule a tensão  $v$  em regime permanente, se  $v_g = 2 \cos 2t\ \text{V}$ .
- 11.23 Calcule a resposta forçada  $v$ , se  $v_g = 2 \cos t\ \text{V}$ .
- 11.24 Calcule a tensão  $v$  em regime permanente, se  $v_g = 5 \cos 3t\ \text{V}$ .
- 11.25 Calcule a tensão  $v$  em regime permanente, se  $v_g = 3 \cos 2t\ \text{V}$ .



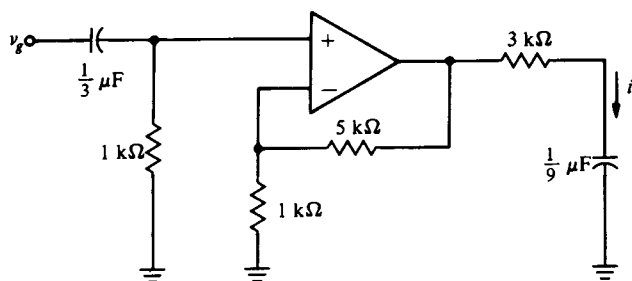
PROBLEMA 11.17



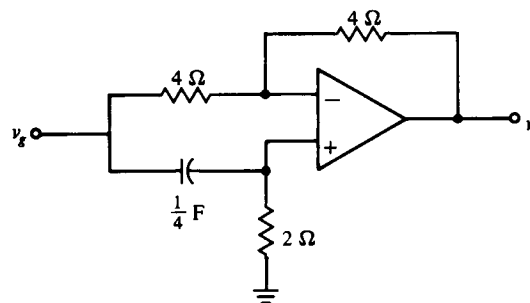
PROBLEMA 11.18



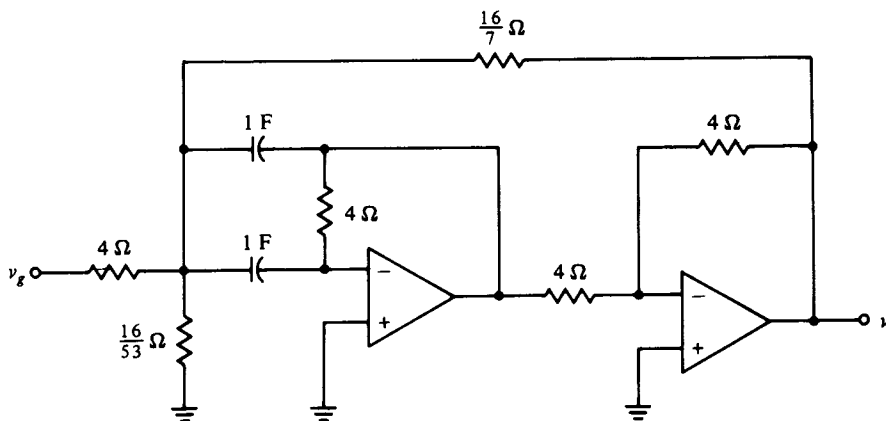
PROBLEMA 11.20



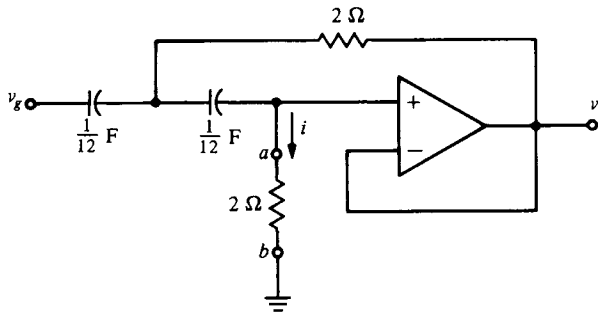
PROBLEMA 11.21



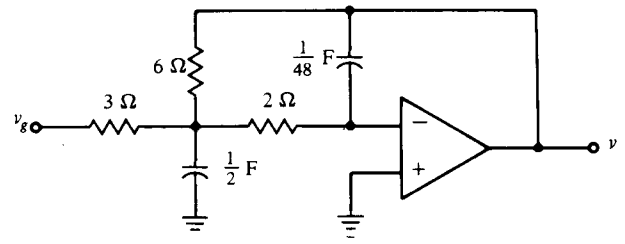
PROBLEMA 11.22



PROBLEMA 11.23



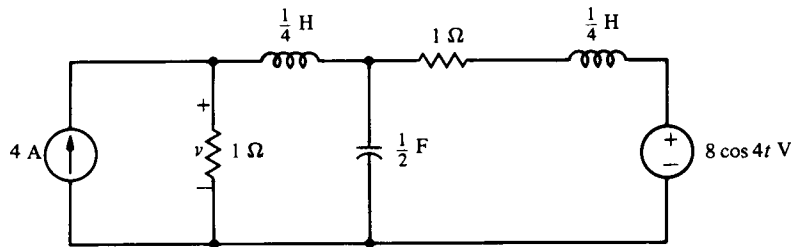
PROBLEMA 11.24



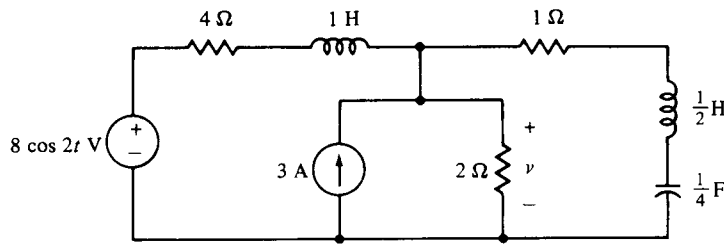
PROBLEMA 11.25

- 11.26 Calcule a tensão  $v$  em regime permanente.  
 11.27 Calcule o valor de  $v$  em regime permanente.  
 11.28 Calcule a corrente  $i$  em regime permanente, se  $i_g = 9 - 20 \cos t - 39 \cos 2t + 18 \cos 3t$  A.  
 11.29 Calcule a tensão  $v$  em regime permanente.  
 11.30 Para o circuito fasorial correspondente ao Ex. 11.2.3, substitua tudo, exceto o resistor de  $2\text{-}\Omega$  entre os terminais  $c$ - $d$  pelo seu

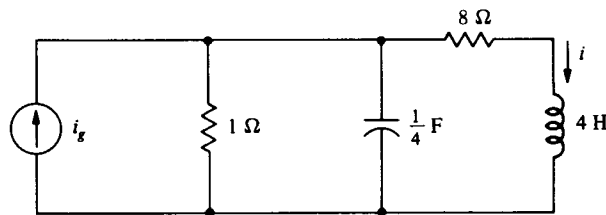
- equivalente de Thévenin e calcule a corrente  $i$  em regime permanente.  
 11.31 Para o circuito fasorial correspondente ao Ex. 11.2.3, substitua tudo à esquerda dos terminais  $a$ - $b$  por seu equivalente de Norton e calcule a corrente  $i_1$  em regime permanente  
 11.32 Substitua o circuito à esquerda dos terminais  $a$ - $b$  por seu equivalente de Norton e calcule  $V$ .



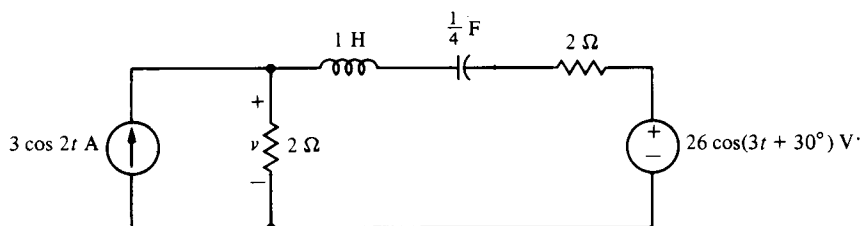
PROBLEMA 11.26



PROBLEMA 11.27

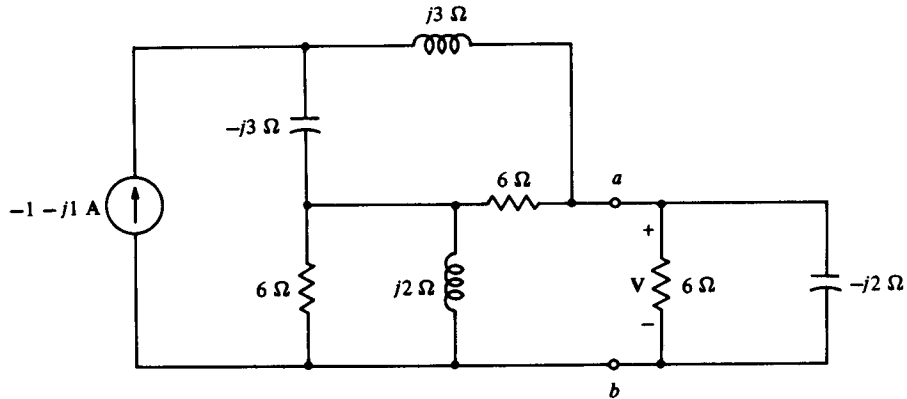


PROBLEMA 11.28

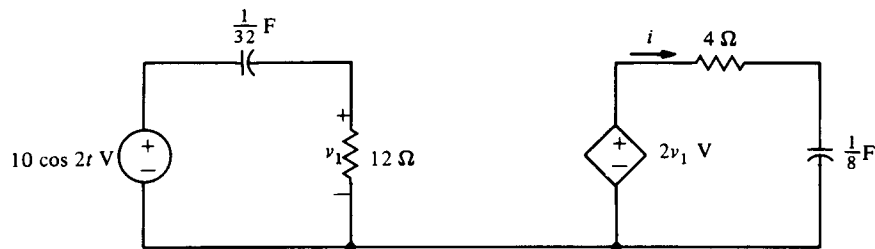


PROBLEMA 11.29

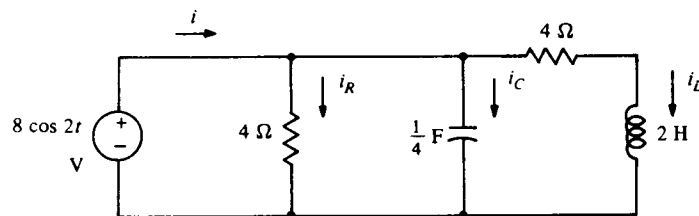
- 11.33 No circuito fasorial correspondente ao Prob. 11.10, substitua tudo, exceto o resistor de  $1\text{-}\Omega$ , pelo seu equivalente de Thévenin e use o resultado para calcular a tensão  $v$  em regime permanente.
- 11.34 No circuito fasorial correspondente ao Prob. 11.24, substitua tudo, exceto o resistor de  $2\text{-}\Omega$  entre os terminais  $a$ - $b$ , por seu equivalente de Thévenin, e use o resultado para calcular a corrente  $i$  em regime permanente.
- 11.35 Resolva o Prob. 11.2 para a tensão  $v$  em regime permanente aplicando o princípio de proporcionalidade ao circuito fasorial correspondente. Assuma que  $v_s = 2 \cos 1.000t$  V. (Sugestão: Assuma que o fasor de  $v$  é  $100$  V.)
- 11.36 Calcule a corrente  $i$  em regime permanente, usando o princípio da proporcionalidade.
- 11.37 Calcule a corrente  $i$  em regime permanente no Prob. 11.24, usando o princípio da proporcionalidade.
- 11.38 Calcule I à representação fasorial de  $i$ , usando um diagrama fasorial. Mostre os fasores de  $i_R$ ,  $i_C$  e  $i_L$ , com o fasor de tensão da fonte como referência.
- 11.39 Mostre que o lugar geométrico de  $V_C$  na Fig. 11.16 é um círculo, se  $R = 2\ \Omega$ ,  $C = 1/4\ \text{F}$ ,  $V_s = 1/\underline{0}^\circ$  V,  $\omega = 2\ \text{rad/s}$  e  $L$  varia de  $0$  a  $\infty$ . Escolha o valor de  $L$  que dá a máxima amplitude da tensão  $v_C$ , no domínio do tempo, e calcule  $v_C$  neste caso.
- 11.40 Calcule o lugar geométrico de  $V_C$  no Prob. 11.39, se  $L = 1\ \text{H}$ ,  $C = 1/2\ \text{F}$ ,  $V_s = 2 \angle 0^\circ$  V,  $\omega = 2\ \text{rad/s}$  e  $R$  varia de  $0$  a  $\infty$ . Selecione o valor de  $R$  para qual  $\text{Im } V_C$  tem seu maior valor negativo e calcule  $v_C$  para este caso.



PROBLEMA 11.32



PROBLEMA 11.36



PROBLEMA 11.38

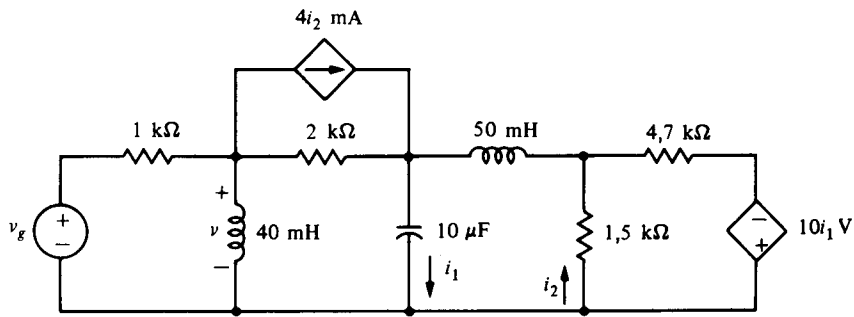
## PROBLEMAS PARA APLICAÇÃO DE COMPUTADORES

11.41 Usando SPICE, calcule  $v$  no Prob. 11.13.

11.42 Usando SPICE, calcule o circuito equivalente de Thévenin no Prob. 11.16, para a rede à esquerda do capacitor de  $1/36\text{-F}$ . (Sugestão: calcule  $V_{oc}$  e  $I_{sc}$ .)

11.43 Usando SPICE calcule  $v$  no Prob. 11.25, se a saída do circuito  $v$  do Prob. 11.22 fornece  $v_p$  para o resistor de  $3\text{-ohm}$  nesta rede.

11.44 No circuito mostrado, calcule  $v$  se  $v_g = 12 \cos(10^4 t + 45^\circ) \text{ V}$ .



PROBLEMA 11.44



# 12

## Potência em Regime Permanente C.A.

---

*O aquecimento de um condutor depende de sua resistência e do quadrado da corrente que o percorre.*

*James P. Joule*

---

O homem a quem devemos a conhecida expressão  $i^2R$  para a potência dissipada em um resistor é o físico inglês James Prescott Joule, que publicou o resultado de seu trabalho como lei de Joule, em 1841. Ele também participou da famosa descoberta da lei da conservação da energia.

Joule nasceu em Salford, Inglaterra, o segundo de cinco irmãos, filho de um rico fabricante de cerveja. Quando jovem, era autodidata em eletricidade e magnetismo, mas também estudou na Universidade de Manchester. Seus experimentos sobre calor eram feitos em seu laboratório doméstico, e para manter a precisão de suas medições, foi obrigado a desenvolver seu próprio sistema de unidades. O principal motivo para a sua fama foi seu empenho em demonstrar que o calor é uma forma de energia. Joule foi quase sempre um cientista amador isolado, mas já no final de sua vida seu trabalho foi reconhecido, recebendo o título de doutor *honoris causa* em Dublin e Oxford. Em sua homenagem, a unidade de energia foi denominada *joule*. ■

Neste capítulo, estudaremos as relações de potência para uma rede que é excitada por tensões ou correntes periódicas. Estudaremos, primeiramente, tensões e correntes senoidais, visto que quase toda a energia elétrica é gerada nesta forma. A potência instantânea, como sabemos, é a velocidade na qual a energia é absorvida por um elemento, e varia em função do tempo. A potência instantânea é uma grandeza importante em aplicações de engenharia, pois seu valor máximo deve ser limitado para todos os dispositivos físicos. Por esta razão, a potência instantânea máxima ou *potência de pico* é uma especificação usada normalmente para a caracterização de dispositivos elétricos. Em um amplificador eletrônico, por exemplo, se a potência de pico de entrada é excedida, o sinal de saída será distorcido. Exceder demasiadamente esta entrada pode inclusive danificar de modo permanente o amplificador.

A mais importante medida de potência, particularmente para tensões e correntes periódicas, é a *potência média*. A potência média é igual à velocidade média na qual a energia é absorvida por um elemento, e é independente do tempo. Esta potência, por exemplo, é a que é monitorada pela companhia de eletricidade na determinação da conta mensal do consumidor. Potências médias são encontradas na faixa entre poucos picowatts, em aplicações como em satélites de comunicação, até milhões de watts, em aplicações tais como o suprimento de eletricidade para uma grande cidade.

Nossa discussão vai se iniciar com o estudo da potência média. Então, consideraremos novamente a superposição e introduziremos uma regra matemática para caracterizar as tensões e correntes periódicas, conhecida como valor eficaz ou rms. Então, consideraremos o fator de potência associado a uma carga e apresentaremos uma potência complexa. Finalmente, descreveremos a medição de potência.

## 12.1

### Potência Média

Em redes lineares cujas entradas são funções periódicas no tempo, as tensões e correntes em regime permanente produzidas são periódicas, cada uma tendo períodos idênticos. Considere uma potência instantânea

$$p = vi \quad (12.1)$$

onde  $v$  e  $i$  são periódicas de período  $T$ . Isto é,  $v(t + T) = v(t)$  e  $i(t + T) = i(t)$ . Neste caso,

$$\begin{aligned} p(t + T) &= v(t + T)i(t + T) \\ &= v(t)i(t) \\ &= p(t) \end{aligned} \quad (12.2)$$

Portanto, a potência instantânea é também periódica, de período  $T$ . Isto é,  $p$  se repete a cada  $T$  segundos.

O período *fundamental*  $T_1$  de  $p$  (o *mínimo* tempo no qual  $p$  se repete) não é necessariamente igual a  $T$ , contudo, mas  $T$  deve conter um número inteiro de períodos  $T_1$ . Em outras palavras

$$T = nT_1 \quad (12.3)$$

onde  $n$  é inteiro e positivo.



**EXEMPLO 12.1**

Como exemplo, suponha que um resistor  $R$  é percorrido por uma corrente  $i = I_m \cos \omega t$ , com o período  $T = 2\pi/\omega$ . Então,

$$\begin{aligned} p &= Ri^2 \\ &= RI_m^2 \cos^2 \omega t \\ &= \frac{RI_m^2}{2}(1 + \cos 2\omega t) \end{aligned}$$

Evidentemente,  $T_1 = \pi/\omega$  e, portanto,  $T = 2T_1$ . Desta forma, neste caso,  $n = 2$  em (12.3). Isto é ilustrado pelos gráficos de  $p$  e  $i$  mostrados na Fig. 12.1(a).

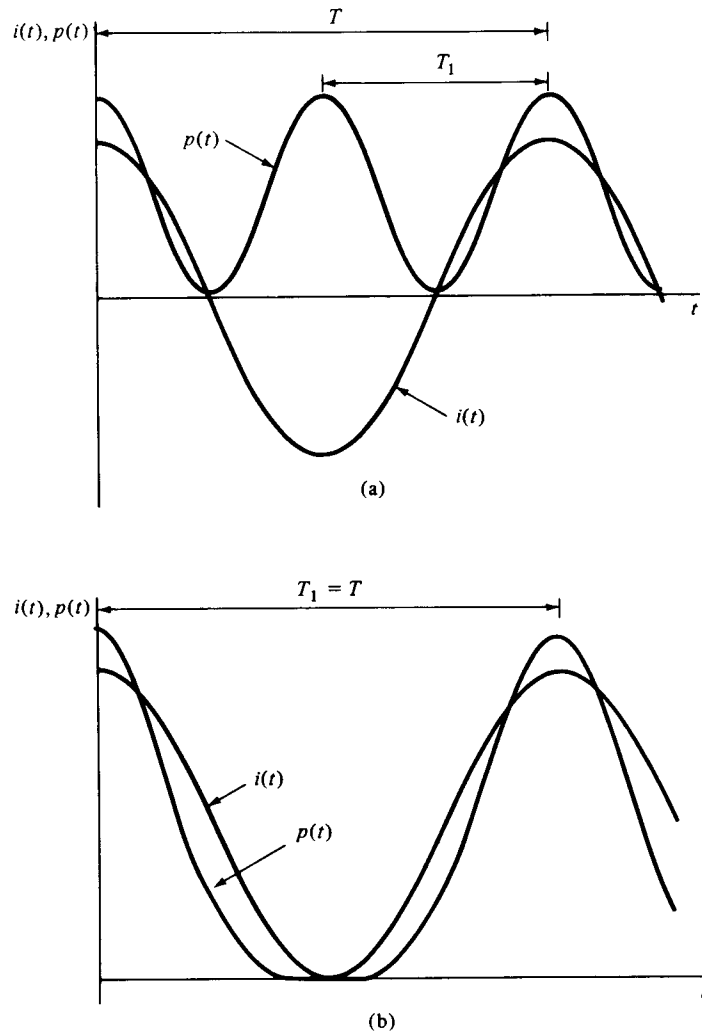
Se agora tomarmos  $i = I_m(1 + \cos \omega t)$ , então

$$p = RI_m^2(1 + \cos \omega t)^2$$

Neste caso,  $T_1 = T = 2\pi/\omega$ , e  $n = 1$  em (12.3). Isto pode ser visto também do gráfico da função na Fig. 12.1(b).

Matematicamente, o valor médio de uma função periódica é definido como a integral no tempo da função durante um período completo, dividida pelo período. Portanto, a potência média  $P$  para uma potência instantânea periódica  $p$  é dada por

$$P = \frac{1}{T_1} \int_{t_1}^{t_1+T_1} p \, dt \quad (12.4)$$



**FIGURA 12.1** Gráficos de  $p$  e  $i$

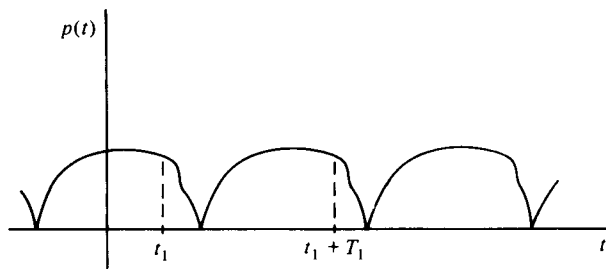


FIGURA 12.2 Potência instantânea periódica

onde  $t_1$  é arbitrária.

Uma potência instantânea periódica  $p$  é mostrada na Fig. 12.2. É claro que, se integrarmos sobre um número inteiro de períodos, digamos  $mT_1$  (onde  $m$  é inteiro e positivo), então a área total é simplesmente  $m$  vezes a integral de (12.4). Logo, podemos escrever

$$P = \frac{1}{mT_1} \int_{t_1}^{t_1+mT_1} p \, dt \quad (12.5)$$

Se selecionamos  $m$  tal que  $T = mT_1$  (o período de  $v$  ou  $i$ ), então

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} p \, dt \quad (12.6)$$

Portanto, podemos obter a potência média por integração no período de  $v$  ou  $i$ .

Consideraremos, agora, vários exemplos de potência média associada a tensões e correntes senoidais. Algumas integrais muito importantes e que ocorrem freqüentemente são dispostas na Tabela 12.1. A verificação destas integrais é deixada como exercício (Ver Ex. 12.1.1).

**TABELA 12.1** Integrais para Funções Senoidais e seus Produtos

$f(t)$	$\int_0^{2\pi/\omega} f(t) \, dt, \omega \neq 0$
1. $\text{sen}(\omega t + \alpha), \cos(\omega t + \alpha)$	0
2. $\text{sen}(n\omega t + \alpha), \cos(n\omega t + \alpha)^*$	0
3. $\text{sen}^2(\omega t + \alpha), \cos^2(\omega t + \alpha)$	$\pi/\omega$
4. $\text{sen}(m\omega t + \alpha)\cos(n\omega t + \alpha)^*$	0
5. $\cos(m\omega t + \alpha)\cos(n\omega t + \beta)^*$	$0, m \neq n$ $\pi \cos(\alpha - \beta)/\omega, m = n$

\* $m$  e  $n$  são inteiros.

Primeiro, consideremos o bipolo genérico da Fig. 12.3, que é assumido como estando em regime permanente c.a. Se, no domínio da freqüência,

$$\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}| \angle \theta$$

é a impedância de entrada do dispositivo, então para

$$v = V_m \cos(\omega t + \phi) \quad (12.7)$$

temos

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi - \theta) \quad (12.8)$$

onde

$$I_m = \frac{V_m}{|\mathbf{Z}|}$$

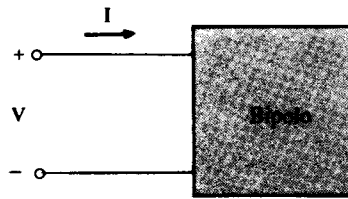


FIGURA 12.3 Bipolo genérico

A potência média entregue ao dispositivo, tomando  $t_1 = 0$  em (12.6) é

$$P = \frac{\omega V_m I_m}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega t + \phi - \theta) dt$$

Da Tabela 12.1, linha 5, encontramos, para  $m = n = 1$ ,  $\alpha = \phi$  e  $\beta = \phi - \theta$ ,

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta \quad (12.9)$$

Logo, a potência média absorvida pelo bipolo é determinada pelas amplitudes  $V_m$  e  $I_m$  e pelo ângulo  $\theta$ , pelo qual a tensão  $v$  antecede a corrente  $i$ .

Em termos de fatores de  $v$  e de  $i$

$$\mathbf{V} = V_m \angle \phi = |\mathbf{V}| \angle \phi$$

$$\mathbf{I} = I_m \angle \phi - \theta = |\mathbf{I}| \angle \phi - \theta$$

temos, de (12.9),

$$P = \frac{1}{2} |\mathbf{V}| |\mathbf{I}| \cos(\text{ang } \mathbf{V} - \text{ang } \mathbf{I}) \quad (12.10)$$

onde

$$\text{ang } \mathbf{V} = \phi, \quad \text{ang } \mathbf{I} = \phi - \theta$$

são os ângulos dos fasores  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$ .

Se o bipolo é um resistor  $R$ , então  $\theta = 0$ , e  $V_m = R I_m$ , de forma que (12.9) torna-se

$$P_R = \frac{1}{2} R I_m^2$$

É importante notar, neste ponto, que se  $i = I_{dc}$ , uma corrente (c.c.) constante, então  $\omega = \phi = \theta = 0$  e  $I_m = I_{dc}$ , em (12.8). Neste caso especial, a Tabela 12.1 não se aplica, mas por (12.6) temos

$$P_R = R I_{dc}^2$$

No caso de um indutor,  $\theta = 90^\circ$ , e no caso de um capacitor,  $\theta = -90^\circ$ , logo para qualquer dos dois, por (12.9),  $P = 0$ . Portanto, um indutor ou um capacitor, ou para o caso de uma rede constituída somente por indutores e capacitores ideais, em qualquer combinação, a potência média dissipada é zero. Por esta razão, indutores e capacitores ideais são chamados algumas vezes de elementos *sem perdas*. Fisicamente, elementos sem perdas armazenam energia durante uma parte do período e a devolvem durante a outra parte, de forma que a potência média entregue é zero.

Uma forma alternativa de (12.9) muito útil pode ser obtida lembrando que

$$\mathbf{Z} = \text{Re } \mathbf{Z} + j \text{Im } \mathbf{Z} = |\mathbf{Z}| \angle \theta$$

e, portanto,

$$\cos \theta = \frac{\text{Re } \mathbf{Z}}{|\mathbf{Z}|}$$

Substituindo este valor em (12.9) e notando que  $V_m = |\mathbf{Z}| I_m$ , temos

$$P = \frac{1}{2} I_m^2 \operatorname{Re} \mathbf{Z} \quad (12.11)$$

Consideremos agora este resultado, se o dispositivo é uma carga passiva. Sabemos da definição de elemento passivo em (1.7) que a energia total entregue a uma carga passiva é não-negativa. Visto que a potência média é a velocidade média na qual a energia é entregue à carga, segue-se que a potência média é não negativa. Isto é,  $p \geq 0$ . Isto requer, por (12.11) que

$$\operatorname{Re} \mathbf{Z}(j\omega) \geq 0$$

ou, de modo equivalente,

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Se  $\theta = 0$ , o dispositivo é equivalente a um resistor, e se  $\theta = \pi/2$  (ou  $-\pi/2$ ), o dispositivo é equivalente a uma indutância (ou a uma capacitância). Para  $-\pi/2 < \theta < 0$ , o dispositivo é equivalente a um circuito  $RC$ , enquanto para  $0 < \theta < \pi/2$ , ele é equivalente a um circuito  $RL$ .

Finalmente, se  $|\theta| > \pi/2$ , então  $P < 0$ , e o dispositivo é mais ativo que passivo. Neste caso, o dispositivo entrega potência através de seus terminais e, é claro, atua como uma fonte.

### EXEMPLO 12.2

Como um exemplo, vamos calcular a potência entregue pela fonte da Fig. 12.4. A impedância sobre a fonte é

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= 100 + j100 \\ &= 100\sqrt{2}/45^\circ \Omega \end{aligned}$$

A máxima corrente é

$$I_m = \frac{V_m}{|\mathbf{Z}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ A}$$

Portanto, de (12.9), a potência entregue a  $\mathbf{Z}$  é

$$P = \frac{100}{2\sqrt{2}} \cos 45^\circ = 25 \text{ W}$$

De outro modo, de (12.11),

$$P = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 (100) = 25 \text{ W}$$

Podemos também notar que a potência absorvida pelo resistor de  $100\text{-}\Omega$  é

$$P_R = \frac{RI_m^2}{2} = \frac{(100)(1/\sqrt{2})^2}{2} = 25 \text{ W}$$

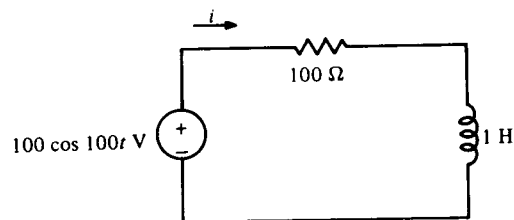


FIGURA 12.4 Circuito  $RL$  em regime permanente a.c.

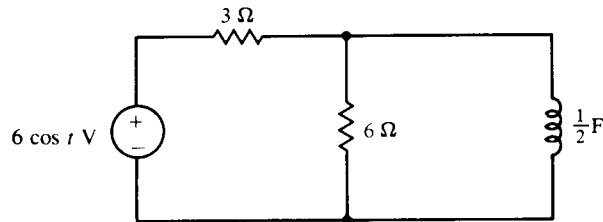
Esta potência, sem dúvida, é igual à entregue a  $Z$ , visto que o indutor não absorve potência. A potência absorvida pela fonte é

$$P_g = -\frac{V_m I_m}{2} \cos \theta = -25 \text{ W}$$

onde o sinal negativo é empregado porque a corrente sai pelo terminal positivo da fonte. A fonte está, portanto, entregando 25 W para  $Z$ . Notamos que a potência saindo da fonte é igual à absorvida pela carga, que ilustra o princípio da conservação de potência.

## EXERCÍCIOS

- 12.1.1** Verifique as integrais da Tabela 12.1.
- 12.1.2** Para um capacitor de  $C$  farads, conduzindo uma corrente  $i = I_m \cos \omega t$ , verifique por (12.6) que a potência média é zero. Repita para um indutor de  $L$  henrys.
- 12.1.3** Calcule a potência média entregue a um resistor de  $10\text{-}\Omega$  percorrido por uma corrente de  
 (a)  $i = 5 \text{ sen } 10t \text{ mA}$   
 (b)  $i = 10 \text{ sen } 10t \text{ mA}$ ,  $0 \leq t < \pi/10 \text{ s}$   
      $= 0$ ,  $\pi/10 \leq t < \pi/5 \text{ s}$ ;  $T = \pi/5 \text{ s}$   
 (c)  $i = 5 \text{ mA}$ ,  $0 \leq t < 10 \text{ ms}$   
      $= -5 \text{ mA}$ ,  $10 \leq t < 20 \text{ ms}$ ;  $T = 20 \text{ ms}$   
 (d)  $i = 2t$ ,  $0 \leq t < 2 \text{ s}$ ;  $T = 2 \text{ s}$   
 Resposta: (a)  $125 \text{ }\mu\text{W}$ ; (b)  $0,25 \text{ mW}$ ; (c)  $0,25 \text{ mW}$ ; (d)  $\frac{160}{3} \text{ W}$
- 12.1.4** Calcule a potência média absorvida pelo capacitor, os dois resistores e a fonte  
 Resposta:  $0$ ,  $10/3$ ,  $2/3$ ,  $-4 \text{ W}$ .



EXERCÍCIO 12.1.4

- 12.1.5** Se  $f_1(t)$  é periódica com um período  $T_1$  e  $f_2(t)$  é periódica com um período  $T_2$ , mostre que  $f_1(t) + f_2(t)$  é periódica com período  $T$  se existem números inteiros e positivos  $m$  e  $n$  tais que

$$T = mT_1 = nT_2$$

Amplie este resultado para a função  $(1 + \cos \omega t)^2$ , considerada nesta seção, para encontrar seu período,  $T = 2\pi/\omega$ .

## 12.2

### Superposição e Potência

Nesta seção, consideraremos a potência em redes contendo duas ou mais fontes, tais como o circuito simples da Fig. 12.5. Por superposição, sabemos que

$$i = i_1 + i_2$$

onde  $i_1$  e  $i_2$  são as correntes em  $R$  devido a  $v_{g1}$  e  $v_{g2}$ , respectivamente. A potência instantânea é

$$\begin{aligned} p &= R(i_1 + i_2)^2 \\ &= Ri_1^2 + Ri_2^2 + 2Ri_1i_2 \\ &= p_1 + p_2 + 2Ri_1i_2 \end{aligned}$$

onde  $p_1$  e  $p_2$  são as potências instantâneas, respectivamente, devidas a  $v_{g1}$  atuando sozinha para  $v_{g2}$  atuando isoladamente. Em geral,  $2Ri_1i_2 \neq 0$ ; desta forma  $p \neq p_1 + p_2$  e a superposição *não* pode ser aplicada para a potência instantânea.

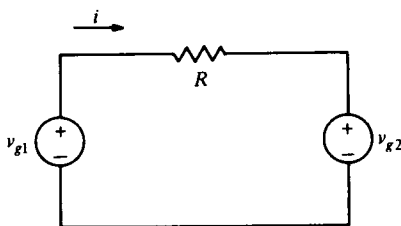


FIGURA 12.5 Circuito simples com duas fontes

No caso de  $p$  periódica com período  $T$ , a potência média é

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (p_1 + p_2 + 2Ri_1i_2) \, dt \\ &= P_1 + P_2 + \frac{2R}{T} \int_0^T i_1i_2 \, dt \end{aligned}$$

onde  $P_1$  e  $P_2$  são as potências médias de  $v_{g1}$  e  $v_{g2}$ , respectivamente, atuando isoladamente (estamos assumindo, sem dúvida, que cada componente de  $p$  é periódica, com período  $T$ ). A superposição para a potência média aplica-se quando

$$P = P_1 + P_2 \quad (12.12)$$

Evidentemente, essa condição é mantida se

$$\int_0^T i_1i_2 \, dt = 0 \quad (12.13)$$

O caso mais importante no qual esta equação é satisfeita é quando  $i(t)$  for composta de componentes senoidais de diferentes freqüências. Suponha, por exemplo, que

$$i_1 = I_{m1} \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

e

$$i_2 = I_{m2} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Visto que assumimos que  $i = i_1 + i_2$  é periódica com período  $T$ , devemos ter

$$\begin{aligned} I_{m1} \cos[\omega_1(t + T) + \phi_1] + I_{m2} \cos[\omega_2(t + T) + \phi_2] \\ = I_{m1} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + I_{m2} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned}$$

a qual requer que

$$\omega_1 T = 2\pi m, \quad \omega_2 T = 2\pi n$$

onde  $m$  e  $n$  são inteiros e positivos. Portanto, se  $\omega$  é um número tal que  $T = 2\pi/\omega$ , então  $\omega_1 = m\omega$  e  $\omega_2 = n\omega$ . Neste caso, a integral em (12.13) torna-se, usando a Tabela 12.1,

$$\begin{aligned} \int_0^T i_1i_2 \, dt &= I_{m1}I_{m2} \int_0^{2\pi/\omega} \cos(m\omega t + \phi_1) \cos(n\omega t + \phi_2) \, dt \\ &= \frac{I_{m1}I_{m2}\pi \cos(\phi_1 - \phi_2)}{\omega}, & m = n \\ &= 0, & m \neq n \end{aligned}$$

Logo, se  $m = n$  ( $\omega_1 = \omega_2$ ), a superposição *não pode* ser aplicada. Portanto, se  $m \neq n$ , a superposição *pode* ser aplicada. Podemos generalizar este resultado para o caso de uma senóide periódica com qualquer número de componentes senoidais de diferentes frequências. *A potência média devida à soma das componentes é a soma das potências médias devida a cada componente atuando isoladamente.*

Pode ser mostrado que a superposição da potência média é mantida para senóides cujas frequências não são múltiplos inteiros de alguma frequência  $\omega$ , com a condição de generalizarmos a definição da potência média para

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} p \, dt$$

Esta generalização aplica-se a casos periódicos com o considerado, bem como para o caso  $i = i_1 + i_2$ , onde

$$i_1 = \cos t$$

$$i_2 = \cos \pi t$$

Neste caso  $i$  não é nem periódica (a razão  $\omega_1/\omega_2 = 1/\pi$  não é um número racional  $m/n$ ), mas

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} i_1 i_2 \, dt = 0$$

### EXEMPLO 12.3

Como um exemplo, suponha, na Fig. 12.5, que  $v_{g1} = 100 \cos(377t + 60^\circ)$  V,  $v_{g2} = 50 \cos 377t$  V e  $R = 100 \, \Omega$ . Visto que  $\omega_1 = \omega_2$ , não podemos aplicar superposição para a potência. Contudo, podemos usar a superposição para calcular a corrente e subsequentemente calcular a potência. As correntes fasoriais devidas às respectivas fontes são

$$\mathbf{I}_1 = 1/\underline{60^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_2 = -0,5 \text{ A}$$

Portanto,

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = j0,866 \text{ A}$$

logo  $I_m = 0,866$  A. De (12.11), encontramos

$$P = \frac{1}{2} (100)(0,866)^2 = 37,5 \text{ W}$$

### EXEMPLO 12.4

Vamos agora repetir o exemplo acima com  $v_{g2} = 50$  V c.c. Visto que  $v_{g1}$  e  $v_{g2}$  são senoidais com  $\omega_1 = 377$ , e  $\omega_2 = 0$  rad/s, respectivamente, a superposição para potência média é aplicável. Procedendo como antes, encontramos

$$\mathbf{I}_1 = 1/\underline{60^\circ} \quad \text{para } \omega = 377$$

$$\mathbf{I}_2 = -0,5 \quad \text{para } \omega = 0$$

onde  $\mathbf{I}_2$  é agora uma corrente c.c. Portanto,

$$P_1 = \frac{RI_{m1}^2}{2} = 50 \text{ W}$$

$$P_2 = RI_{m2}^2 = 25 \text{ W}$$

e a potência média é

$$P = P_1 + P_2 = 75 \text{ W}$$

Este exemplo ilustra um caso muito importante para os amplificadores eletrônicos com entradas senoidais. Estes amplificadores contêm uma fonte de alimentação c.c. que produz correntes c.c., que fornecem a energia para sinais amplificados c.a. Logo, a superposição é muito útil para calcular a potência média associada a cada frequência, incluindo  $\omega = 0$ .

Estendendo o procedimento acima para uma corrente periódica que é a soma de  $N + 1$  senóides de diferentes frequências,

$$i = I_{dc} + I_{m1} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + I_{m2} \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \dots + I_{mN} \cos(\omega_N t + \phi_N) \quad (12.14)$$

encontramos a potência média entregue a uma resistência  $R$ .

$$P = RI_{dc}^2 + \frac{R}{2}(I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + \dots + I_{mN}^2) \quad (12.15)$$

O primeiro termo,  $RI_{dc}^2$ , que não tem o valor  $\frac{1}{2}$ , é o caso especial de frequência zero e deve ser considerado separadamente, como na Seção 12.1, isto é, por (12.6),

$$\frac{1}{T} \int_0^T RI_{dc} I_{mi} \cos(\omega_i t + \phi_i) dt = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

e

$$\frac{1}{T} \int_0^T RI_{dc}^2 dt = RI_{dc}^2$$

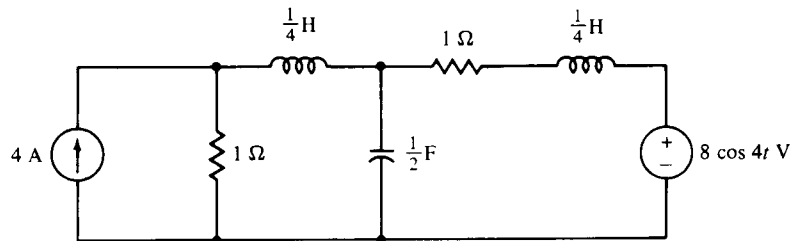
Esta última expressão é  $P_{dc}$ , a potência média entregue por  $I_{dc}$ . Desta forma, se chamarmos os outros termos em (12.15) por  $P_1$  (devida a  $i_1$ ),  $P^2$  (devida a  $i_2$ ), e assim por diante, temos a superposição das potências na forma

$$P = P_{dc} + P_1 + P_2 + \dots + P_N$$

## EXERCÍCIOS

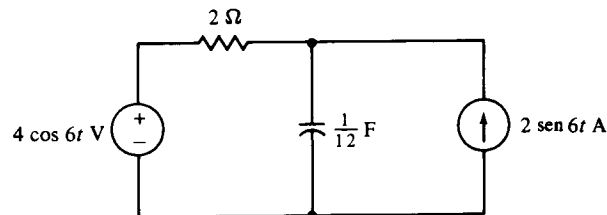
- 12.2.1** Calcule a potência média entregue ao resistor da Fig. 12.5 se  $R = 10 \Omega$  e  
 (a)  $v_{g1} = 10 \cos 100t$  e  $v_{g2} = 20 \cos(100t + 60^\circ)$  V.  
 (b)  $v_{g1} = 100 \cos(t + 60^\circ)$  e  $v_{g2} = 50 \sin(2t - 30^\circ)$  V.  
 (c)  $v_{g1} = 50 \cos(t + 30^\circ)$  e  $v_{g2} = 100 \sin(t + 30^\circ)$  V.  
 (d)  $v_{g1} = 20 \cos(t + 25^\circ)$  e  $v_{g2} = 30 \sin(5t - 35^\circ)$  V.  
 Resposta: (a) 15 W; (b) 625 W; (c) 625 W; (d) 65 W

- 12.2.2** Calcule a potência média absorvida por cada resistor e cada fonte.  
 Resposta: W, 24 W, -8 W, -24 W



EXERCÍCIO 12.2.2

- 12.2.3** Calcule a potência média absorvida pelo resistor e por cada fonte.  
 Resposta: 8 W, -4 W, -4 W



EXERCÍCIO 12.2.3



## Valores Eficazes

Vimos nas seções anteriores que tensões e correntes periódicas entregam uma potência média a cargas resistivas. A quantidade de potência que é entregue depende das características da forma de onda particular. Um método de comparação da potência entregue por diferentes formas de onda é, portanto, muito útil. Um destes métodos é empregar os valores *rms* ou *eficazes* para tensões e correntes periódicas.

O valor eficaz de uma corrente (tensão) periódica é uma constante que é igual à corrente (tensão) c.c., que iria entregar a mesma potência média para uma resistência  $R$ . Desta forma, se  $I_{\text{eficaz}}$  é o valor eficaz de  $i$ , podemos escrever

$$P = RI_{\text{eficaz}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T Ri^2 dt$$

da qual a corrente eficaz é

$$I_{\text{eficaz}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (12.16)$$

De forma similar, é fácil mostrar que a tensão eficaz é

$$V_{\text{eficaz}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt}$$

O termo eficaz é a tradução da abreviatura de *root-mean-square*. Inspecionando (12.16), vemos que, na verdade, estamos tomando a raiz (*root*) quadrada da média (*mean*) do valor ao quadrado (*square*) da corrente.

De nossa definição, o valor eficaz de uma constante (c.c.) é simplesmente a própria constante. O caso c.c. é um caso especial ( $\omega = 0$ ) do mais importante tipo de forma de onda, a tensão ou a corrente senoidal.

Vamos, agora, considerar uma corrente senoidal  $i = I_m \cos(\omega t + \phi)$ . Então, de (12.16) e da Tabela 12.1, encontramos

$$\begin{aligned} I_{\text{eficaz}} &= \sqrt{\frac{\omega I_m^2}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t + \phi) dt} \\ &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Desta forma, uma corrente senoidal tendo uma amplitude  $I_m$ , entrega a mesma potência média a uma resistência  $R$ , que uma corrente c.c. de valor igual a  $I_m/\sqrt{2}$ . Também vemos que a corrente eficaz é independente da frequência  $\omega$  ou da fase  $\phi$  da corrente  $i$ . Do mesmo modo, no caso da tensão senoidal, encontramos que

$$V_{\text{eficaz}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

Substituindo estes valores nas duas importantes relações de potência de (12.9) e (12.11) para um bipolo, temos

$$P = V_{\text{eficaz}} I_{\text{eficaz}} \cos \theta \quad (12.17)$$

e

$$P = I_{\text{eficaz}}^2 \text{Re } Z \quad (12.18)$$

Na prática, valores eficazes são empregados normalmente nas áreas de geração e distribuição de potência. Por exemplo, uma rede com valor de tensão nominal de 115-V, que é usada em instalações domésticas, é um valor eficaz. Logo, a potência que é fornecida em 60-Hz às nossas residências vem através de uma tensão que tem um valor máximo de  $115\sqrt{2} \approx 163$  V. Por outro lado, valores máximos são mais normalmente empregados em eletrônica e comunicações.

Finalmente, vamos considerar o valor eficaz da corrente em (12.14), que é formado por senóides de diferentes frequências. Em termos de correntes eficazes (12.15) torna-se

$$P = R (I_{dc}^2 + I_{1eficaz}^2 + I_{2eficaz}^2 + \dots + I_{Neficaz}^2) \quad (12.19)$$

Visto que  $P = RI_{eficaz}^2$ , vemos que o valor eficaz de uma corrente senoidal composta de diferentes frequências é

$$I_{eficaz} = \sqrt{I_{dc}^2 + I_{1eficaz}^2 + I_{2eficaz}^2 + \dots + I_{Neficaz}^2} \quad (12.20)$$

De modo análogo

$$V_{eficaz} = \sqrt{V_{dc}^2 + V_{1eficaz}^2 + V_{2eficaz}^2 + \dots + V_{Neficaz}^2}$$

Esses resultados são particularmente importantes no estudo de ruídos em redes elétricas, objetivo de estudo de disciplinas posteriores.

## EXERCÍCIOS

**12.3.1** Calcule os valores eficazes de uma corrente periódica para a qual um período é definido por:

- (a)  $i = I$ ,  $0 \leq t < 2$  s  
 $= -I$ ,  $2 \leq t < 4$  s  
 (b)  $i = 2t$ ,  $0 \leq t < T$   
 (c)  $i = I_m \sin \omega t$ ,  $0 \leq t \leq \pi/\omega$   
 $= 0$ ,  $\pi/\omega \leq t \leq 2\pi/\omega$  ( $T = 2\pi/\omega$ )

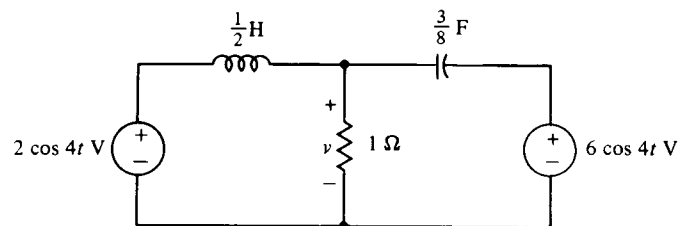
Resposta: (a)  $I$ , (b)  $2T/\sqrt{3}$ ; (c)  $I_m/2$

**12.3.2** Calcule os valores eficazes de (a)  $i = 10 \sin \omega t + 20 \cos (\omega t + 30^\circ)$ ; (b)  $i = 8 \sin \omega t + 6 \cos (2\omega t + 10^\circ)$  e (c)  $i = I(1 + \cos 377t)$ .

Resposta: (a) 12,25; (b) 7,07; (c)  $I\sqrt{2}$

**12.3.3** Calcule  $V_{eficaz}$ .

Resposta: 4 V



EXERCÍCIO 12.3.3

## 12.4

### Fator de Potência

A potência média entregue a uma carga em regime permanente c.a., repetindo (12.17) é

$$P = V_{eficaz} I_{eficaz} \cos \theta$$

Logo, a potência é igual ao produto da tensão eficaz, pela corrente eficaz, e pelo coseno do ângulo entre os fasores da tensão e da corrente. Na prática, tensões e correntes eficazes são de fácil medição e seu produto,  $V_{eficaz} I_{eficaz}$ , é chamado de *potência aparente*. A potência aparente é normalmente referida

em termos de suas unidades, voltamperes (VA) ou kilovoltamperes (kVA), de forma a se evitarem enganos e confusão com a unidade de potência média, o watt. É óbvio que a potência média não pode nunca ser superior à potência aparente.

A relação da potência média para a potência aparente é definida como o *fator de potência*. Logo, se chamarmos o fator de potência por  $fp$ , então no caso senoidal

$$fp = \frac{P}{V_{\text{eficaz}} I_{\text{eficaz}}} = \cos \theta \quad (12.21)$$

que, é claro, é adimensional. O ângulo  $\theta$ , neste caso, é frequentemente referido como o *ângulo do  $fp$* . Também o reconhecemos como o ângulo da impedância  $Z$  da carga.

No caso de cargas puramente resistivas, a tensão e a corrente estão em fase. Portanto,  $\theta = 0$ ,  $fp = 1$ , e as potências média e aparente são iguais. Um fator de potência unitário ( $fp = 1$ ) também pode existir para cargas que contenham indutores e capacitores, se as reatâncias destes elementos são tais que elas se cancelam. Ajustar as reatâncias das cargas para que se aproximem desta condição é muito importante em sistemas elétricos de potência, como logo veremos.

Em uma carga puramente reativa,  $\theta = \pm 90^\circ$ ,  $fp = 0$ , e a potência média é zero. Neste caso, a carga equivalente é uma indutância ( $\theta = 90^\circ$ ) ou uma capacitância ( $\theta = -90^\circ$ ), e a corrente e a tensão diferem em fase de  $90^\circ$ .

Uma carga para a qual  $-90^\circ < \theta < 0$  é equivalente a um circuito  $RC$ , enquanto uma tendo  $0 < \theta < 90^\circ$  é equivalente a um circuito  $RL$ . Visto que  $\cos \theta = \cos (-\theta)$  é evidente que o  $fp$  para uma carga  $RC$  tendo  $\theta = -\theta_1$ , onde  $0 < \theta_1 < 90^\circ$ , é igual ao de uma carga  $RL$  com  $\theta = \theta_1$ . Para evitar esta dificuldade em identificar tais cargas, o  $fp$  é caracterizado como *adiantado* ou *atrasado* pela *fase da corrente com referência à da tensão*. Portanto, uma carga  $RC$  tem um  $fp$  adiantado e uma carga  $RL$  tem um  $fp$  atrasado. Por exemplo, a associação série de um resistor de  $100\text{-}\Omega$  e um indutor de  $0,1\text{-H}$  em  $60$  hertz tem  $Z = 100 + j37,7 = 106,9/20,66^\circ \Omega$  e tem um  $fp$  de  $\cos 20,66^\circ = 0,936$  atrasado.

## EXEMPLO 12.5

Na prática, o fator de potência de uma carga é muito importante. Em aplicações industriais, por exemplo, cargas podem requerer milhares de watts para operar e o fator de potência afeta grandemente a conta de eletricidade. Suponha, por exemplo, que um moinho consome  $100\text{ kW}$  de uma linha de  $220\text{-V}$  (eficazes). Com  $fp$  de  $0,85$ , atrasado, vemos que a corrente eficaz no moinho é

$$I_{\text{eficaz}} = \frac{P}{V_{\text{eficaz}} fp} = \frac{10^5}{(220)(0,85)} = 534,8\text{ A}$$

o que quer dizer que a potência aparente fornecida é

$$V_{\text{eficaz}} I_{\text{eficaz}} = (220)(534,8)\text{ VA} = 117,66\text{ kVA}$$

Agora, suponha que o  $fp$  é aumentado, de alguma forma, para  $0,95$  atrasado. Então

$$I_{\text{eficaz}} = \frac{10^5}{(220)(0,95)} = 478,5\text{ A}$$

e a potência aparente é reduzida para

$$V_{\text{eficaz}} I_{\text{eficaz}} = 105,3\text{ kVA}$$

Comparando-se o último caso com o anterior, vemos que  $I_{\text{eficaz}}$  foi reduzido de  $56,3\text{ A}$  ( $10,5\%$ ). Portanto, a usina geradora precisa gerar uma corrente maior no caso de menor  $fp$ . Visto que as linhas de transmissão que transmitem a potência têm resistência, a usina precisa produzir uma potência média maior para fornecer os  $100\text{ kW}$  à carga. Se a resistência for de  $0,1\ \Omega$ , por exemplo, então a potência gerada pela fonte deve ser

$$P_g = 10^5 + 0,1 I_{\text{eficaz}}^2$$

Portanto, encontramos

$$\begin{aligned} P_g &= 128,6\text{ kW}, & fp &= 0,85 \\ &= 122,9\text{ kW}, & fp &= 0,95 \end{aligned}$$

que requer que a usina produza 5,7 kW (4,64%) a mais de potência para fornecer a carga de mais baixo  $fp$ . Por essa razão é que as concessionárias de energia encorajam um  $fp$  superior a 0,9 e impõem penalidades a grandes usuários industriais que não a cumprem.

Vamos agora considerar um método de correção do fator de potência de uma carga tendo uma impedância.

$$\mathbf{Z} = R + jX$$

Podemos alterar o fator de potência conectando uma impedância  $\mathbf{Z}_1$  em paralelo com  $\mathbf{Z}$ , como mostrado na Fig. 12.6. Por esta conexão, fica claro que a tensão da carga não muda. Visto que  $\mathbf{Z}$  é fixa,  $\mathbf{I}$  não muda e a potência entregue à carga não é afetada. A corrente  $\mathbf{I}_1$  fornecida pelo gerador, entretanto, muda.

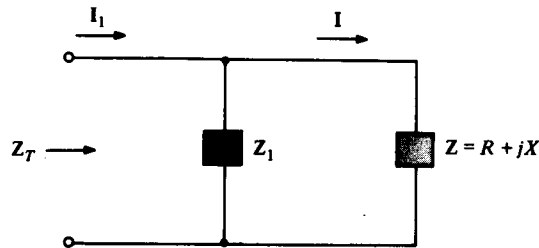


FIGURA 12.6 Circuito para correção do fator de potência

Vamos chamar a impedância da associação em paralelo por

$$\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{Z}\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_1}$$

Em geral, selecionamos  $\mathbf{Z}_1$  tal que (1)  $\mathbf{Z}_1$  absorva a potência média igual a zero, e (2)  $\mathbf{Z}_T$  tenha o fator de potência desejado  $fp = FP$ . A primeira condição requer que  $\mathbf{Z}_1$  seja puramente reativa. Isto é,

$$\mathbf{Z}_1 = jX_1$$

A segunda condição requer que

$$\cos \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im } \mathbf{Z}_T}{\text{Re } \mathbf{Z}_T} \right) \right] = FP$$

Substituindo  $\mathbf{Z}_T$  em termos de  $R$ ,  $X$  e  $X_1$ , nesta equação, encontramos que (ver Prob. 12.25)

$$X_1 = \frac{R^2 + X^2}{R \tan(\cos^{-1} FP) - X} \quad (12.22)$$

onde notamos que  $\tan(\cos^{-1} FP)$  é positivo se  $FP$  é atrasado e negativo se  $FP$  é adiantado.

### EXEMPLO 12.6

Como exemplo da aplicação de (12.22), vamos mudar o fator de potência do circuito da Fig. 12.4 para 0,95 (atrasado). Já calculamos que

$$\mathbf{Z} = 100 + j100 = 141,4/45^\circ$$

Portanto, antes da reatância paralela ser adicionada através de  $\mathbf{Z}$ , o fator de potência é

$$fp = \cos \theta = \cos 45^\circ = 0,707 \text{ atrasado}$$

Visto que desejamos um fator de potência 0,95 (atrasado),  $\tan(\cos^{-1} FP)$  é positiva, tal que por (12.22), temos

$$X_1 = \frac{100^2 + 100^2}{100 \tan(\cos^{-1} 0,95) - 100} = -297,92 \Omega$$

Visto que  $X_1 < 0$ , a reatância é uma capacitância  $C = -1/\omega X_1 = 33,6 \mu\text{F}$ . A impedância de carga torna-se agora

$$\mathbf{Z}_T = \frac{(100 + j100)(-j297,92)}{100 + j100 - j297,92} = 190,0/18,2^\circ$$

Portanto, a potência para a carga corrigida é

$$P = \frac{100^2}{2(190,0)} \cos(18,2^\circ) = 25 \text{ W}$$

que é a mesma que a entregue a  $\mathbf{Z}$  na Fig. 12.4. A corrente, contudo, é

$$I_{\text{eficaz}} = \frac{100}{190\sqrt{2}} = 0,372 \text{ A}$$

em comparação com aquela da Fig. 12.4, dada por

$$I_{\text{eficaz}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,5 \text{ A}$$

Vemos, portanto, que a corrente foi reduzida de 0,128 A, ou 25,6%.

## EXERCÍCIOS

- 12.4.1** Calcule a potência aparente para (a) uma carga que requer 20 A eficaz de uma linha de 115-V (eficazes) e (b) uma carga constituída por um resistor de  $100\text{-}\Omega$  em paralelo com um capacitor de  $25\text{-}\mu\text{F}$  conectados a uma fonte de 120-V (eficazes) 60-Hz.  
*Resposta:* (a) 2,3 kVA; (b) 197,9 VA
- 12.4.2** Calcule o fator de potência para (a) uma carga consistindo em uma associação em série de um resistor de  $10\text{-}\Omega$  e um indutor de 10-mH operando em 60 Hz, (b) uma carga capacitiva que consome 25 A (eficazes) e 5 kW em 230 V eficazes, e (c) uma carga formada pela associação em paralelo de uma carga de 5-kW com fator de potência de 0,9 (adiantado) e uma carga de 10-kW com um fator de potência de 0,95 (atrasado).  
*Resposta:* (a) 0,936 (atrasado); (b) 0,87 (adiantado); (c) 0,998 (atrasado)
- 12.4.3** Use (12.22) para correção do fator de potência, visto pela fonte da Fig. 12.4 para (a) 0,9 (adiantado) e (b) 0,9 (atrasado).  
*Resposta:* (a)  $C = 74,22 \mu\text{F}$ ; (b)  $C = 25,78 \mu\text{F}$

## 12.5

### Potência Complexa

Vamos agora apresentar uma *potência complexa* em regime permanente c.a., que é muito útil para a determinação e a correção de fatores de potência associados com cargas interconectadas. Vamos iniciar por definir fasores eficazes para tensões e correntes senoidais genéricas. As representações fasoriais para (12.7) e (12.8) são

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi}$$

$$\mathbf{I} = I_m e^{j(\phi-\theta)}$$

Os fasores eficazes para essas grandezas são definidos como

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\text{eficaz}} &= \frac{\mathbf{V}}{\sqrt{2}} = V_{\text{eficaz}} e^{j\phi} \\ \mathbf{I}_{\text{eficaz}} &= \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}} = I_{\text{eficaz}} e^{j(\phi-\theta)} \end{aligned} \tag{12.23}$$

Vamos agora considerar a potência média dada em (12.17). Usando a fórmula de Euler, podemos escrever

$$P = V_{\text{eficaz}} I_{\text{eficaz}} \cos \theta = \text{Re}(V_{\text{eficaz}} I_{\text{eficaz}} e^{j\theta})$$

Em seguida, inspecionando (12.33), vemos que

$$V_{\text{eficaz}} \mathbf{I}_{\text{eficaz}}^* = V_{\text{eficaz}} I_{\text{eficaz}} e^{j\theta}$$

onde  $\mathbf{I}_{\text{eficaz}}^*$  é o conjunto complexo de  $\mathbf{I}_{\text{eficaz}}$ . Logo,

$$P = \text{Re}(V_{\text{eficaz}} \mathbf{I}_{\text{eficaz}}^*) \quad (12.24)$$

e o produto  $V_{\text{eficaz}} \mathbf{I}_{\text{eficaz}}^*$  é uma potência complexa cuja parte real é a potência média. Chamando esta potência complexa por  $\mathbf{S}$  temos

$$\mathbf{S} = V_{\text{eficaz}} \mathbf{I}_{\text{eficaz}}^* = P + jQ \quad (12.25)$$

onde  $Q$  é a *potência reativa*. Dimensionalmente,  $P$  e  $Q$  têm a mesma unidade; entretanto, a unidade de  $Q$  é definida como *var* (volt-ampère reativo) para distingui-lo do watt. O módulo da potência complexa é

$$|\mathbf{S}| = |V_{\text{eficaz}} \mathbf{I}_{\text{eficaz}}^*| = V_{\text{eficaz}} I_{\text{eficaz}} = V_{\text{eficaz}} I_{\text{eficaz}}$$

que, é claro, é igual à potência aparente.

De (12.25), vemos que

$$Q = \text{Im } \mathbf{S} = V_{\text{eficaz}} I_{\text{eficaz}} \text{ sen } \theta \quad (12.26)$$

Para uma impedância  $\mathbf{Z}$ , sabemos que  $\text{sen } \theta = (\text{Im } \mathbf{Z})/|\mathbf{Z}|$ , de forma que

$$Q = V_{\text{eficaz}} I_{\text{eficaz}} \frac{\text{Im } \mathbf{Z}}{|\mathbf{Z}|}$$

Portanto, desde que  $V_{\text{eficaz}}/|\mathbf{Z}| = I_{\text{eficaz}}$ , vemos que

$$\begin{aligned} Q &= I_{\text{eficaz}}^2 \text{Im } \mathbf{Z} \\ &= V_{\text{eficaz}}^2 \frac{\text{Im } \mathbf{Z}}{|\mathbf{Z}|^2} \end{aligned} \quad (12.27)$$

Um diagrama fasorial de  $V_{\text{eficaz}}$  e  $\mathbf{I}_{\text{eficaz}}$  é mostrado na Fig. 12.7. Vemos que a corrente fasorial pode ser decomposta em duas componentes,  $I_{\text{eficaz}} \cos \theta$  e  $I_{\text{eficaz}} \text{ sen } \theta$ . A componente  $I_{\text{eficaz}} \cos \theta$  está em fase com  $V_{\text{eficaz}}$ , e produz a potência ativa  $P$ . Em contraste,  $I_{\text{eficaz}} \text{ sen } \theta$  está fora de fase  $90^\circ$  com  $V_{\text{eficaz}}$  e gera a potência reativa  $Q$ . Visto que  $I_{\text{eficaz}} \text{ sen } \theta$  está  $90^\circ$  fora de fase  $V_{\text{eficaz}}$  é chamada de *componente*

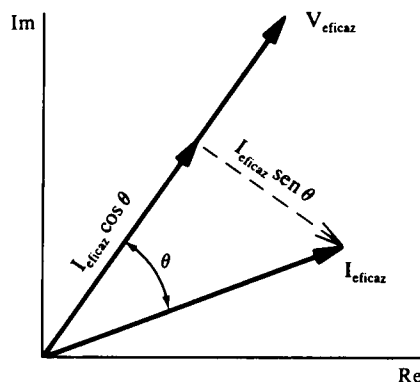


FIGURA 12.7 Diagrama fasorial de  $V_{\text{eficaz}}$  e  $\mathbf{I}_{\text{eficaz}}$

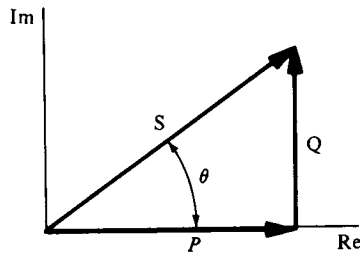


FIGURA 12.8 Diagrama para a potência complexa

em quadratura de  $I_{\text{eficaz}}$ . Como consequência, a potência reativa é algumas vezes chamada de *potência em quadratura*.

Freqüentemente é conveniente visualizar a potência complexa em termos de um diagrama como o da Fig. 12.8. É evidente que para uma carga indutiva ( $fp$  atrasado)  $0 < \theta \leq 90^\circ$ ,  $Q$  é positiva e  $S$  situa-se no primeiro quadrante. Para uma carga capacitiva ( $fp$  adiantado)  $-90^\circ \leq \theta < 0$ ,  $Q$  é negativo e  $S$  situa-se no quarto quadrante. Uma carga tendo fator de potência unitário requer que  $Q = 0$ , visto que  $\theta = 0$ . Em geral, vemos que

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Q}{P}\right) \quad (12.28)$$

Vamos agora considerar a potência complexa associada a uma carga constituída de duas impedâncias  $Z_1$  e  $Z_2$ , como mostrado na Fig. 12.9. A potência complexa entregue à associação de impedâncias é

$$\begin{aligned} S &= V_{\text{eficaz}} I_{\text{eficaz}}^* = V_{\text{eficaz}} (I_{1\text{eficaz}} + I_{2\text{eficaz}})^* \\ &= V_{\text{eficaz}} I_{1\text{eficaz}}^* + V_{\text{eficaz}} I_{2\text{eficaz}}^* \end{aligned}$$

Portanto, a potência complexa entregue pela fonte às cargas interconectadas é a soma das potências entregues a cada carga individual e logo a potência complexa se conserva. Esta afirmativa é verdadeira, qualquer que seja o número de cargas individuais existentes e qualquer que seja a associação, pois depende apenas das leis de Kirchhoff e da definição de potência complexa. Este princípio é conhecido como *conservação de potência complexa*.

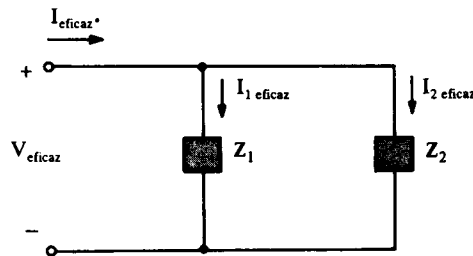


FIGURA 12.9 Carga consistindo em  $Z_1$  e  $Z_2$  em paralelo

A conservação da potência complexa pode ser usada de forma direta para correção do fator de potência. Como um exemplo, vamos considerar de novo o circuito da Fig. 12.6. A potência complexa entregue à carga original  $Z$  é

$$S = P + jQ$$

Conectando uma reatância pura  $Z_1$  em paralelo com  $Z$  resulta numa potência complexa para  $Z_1$  de

$$S_1 = jQ_1$$

Portanto, da conservação da potência complexa, para a carga resultante, temos

$$\begin{aligned} S_T &= S + S_1 \\ &= P + j(Q + Q_1) \end{aligned}$$

É evidente que o acréscimo de  $Z_1$  não afeta a potência média  $P$  entregue à carga. Entretanto, afeta

a potência reativa total da rede. Podemos, portanto, selecionar  $Q_1$  para obter o fator de potência desejado, que é normalmente aumentado. Isto causa uma redução na corrente necessária para produzir  $P$ , como discutido anteriormente.

### EXEMPLO 12.7

Vamos considerar novamente o circuito da Fig. 12.4 e mudar o fator de potência para  $FP = 0,95$  (atrasado). A potência complexa para a carga não corrigida é

$$S = V_{\text{eficaz}} I_{\text{eficaz}}^* = P + jQ = 25 + j25$$

visto que

$$V_{\text{eficaz}} = 70,7 \text{ V}$$

$$I_{\text{eficaz}} = \frac{V_{\text{eficaz}}}{Z} = 0,3535(1 - j1) \text{ A}$$

De (12.28), vemos que  $Q_T = Q + Q_1$  deve satisfazer

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Q_T}{P}\right)$$

Portanto,

$$\cos \theta = FP = \cos\left(\tan^{-1}\frac{Q_T}{P}\right)$$

e

$$\begin{aligned} Q_T &= P \tan(\cos^{-1} FP) \\ &= 25 \tan 18,2^\circ = 8,22 \text{ vars} \end{aligned}$$

O valor de  $Q_1$  necessário é

$$Q_1 = Q_T - Q = 8,22 - 25 = -16,78 \text{ vars}$$

Visto que  $Q_1 = V_{\text{eficaz}}^2 (\text{Im } Z_1)/|Z_1|^2$  e  $Z_1 = jX_1$ , podemos escrever

$$Q_1 = \frac{V_{\text{eficaz}}^2}{X_1}$$

Resolvendo para  $X_1$  no caso em análise, temos

$$X_1 = \frac{(70,7)^2}{-16,78} = -297,9 \Omega$$

que representa uma capacitância  $C = -1/\omega X_1 = 33,6 \mu\text{F}$ . Isto é idêntico ao nosso resultado anterior na Seç. 12.4.

### EXEMPLO 12.8

Como exemplo final, vamos calcular o fator de potência de duas cargas conectadas em paralelo, como mostrado na Fig. 12.9. Suponha que  $Z_1$  representa uma carga de 10-kW com um fator de potência  $fp_1 = 0,9$  (atrasado) e  $Z_2$  uma carga de 5-kW com  $fp_2 = 0,95$  (adiantado) para  $Z_1$ , temos

$$S_1 = P_1 + jQ_1$$

onde  $P_1 = 10^4 \text{ W}$ ,  $\theta_1 = \cos^{-1} fp_1 = 25,84^\circ$  e de (12.28),

$$Q_1 = P_1 \tan \theta_1 = 4843 \text{ vars}$$

Do mesmo modo, para  $Z_2$ , temos

$$S_2 = P_2 + jQ_2$$



onde  $P_2 = 5 \times 10^3 \text{ W}$ ,  $\theta_2 = -\cos^{-1} fp_2 = -18,2^\circ$ , e

$$Q_2 = 5 \times 10^3 \tan \theta_2 = -1.643 \text{ vars}$$

A potência complexa total é

$$\begin{aligned} S_T &= P_1 + P_2 + j(Q_1 + Q_2) \\ &= 1,5 \times 10^4 + j3200 \end{aligned}$$

Portanto, para as cargas associadas,

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{3200}{1,5 \times 10^4} \right) = 12,04^\circ$$

e

$$fp = 0,978 \text{ (atrasado)}$$

## EXERCÍCIOS

- 12.5.1** Calcule a potência complexa entregue a uma carga que tem um fator de potência de 0,85 (adiantado) e (a) absorve 10 kW (b) 10 kvar e (c) 1 kVA.  
*Resposta:* (a)  $11,76/-31,8^\circ$ ; (b)  $18,98/-31,8^\circ$ ; (c)  $1/-31,8^\circ \text{ kVA}$
- 12.5.2** Calcule as impedâncias para as cargas no Ex. 12.5.1, se  $V_{\text{eficaz}} = 240 \text{ V}$ .  
*Resposta:* (a)  $4,90/-31,8^\circ$ ; (b)  $3,03/-31,8^\circ$ ; (c)  $57,6/-31,8^\circ \Omega$ .
- 12.5.3** Repita o Ex. 12.4.2, usando o conceito de potência complexa.
- 12.5.4** Repita o Ex. 12.4.3 usando o conceito de potência complexa.

## 12.6

### Medição da Potência

Um *wattímetro* é um dispositivo que mede a potência média que é entregue a uma carga. Ele contém uma *bobina rotativa* e de *alta resistência de tensão* ou de *potencial*, conectada em paralelo com a carga, e uma bobina fixa de baixa resistência de corrente, que é conectada em série com a carga. O dispositivo tem quatro terminais, cada par dedicado a uma bobina. Uma conexão típica é mostrada na Fig. 12.10. Vemos que a bobina de corrente responde à corrente da carga, enquanto a bobina de tensão responde à tensão da carga. Para frequências superiores a poucos hertz, o movimento do medidor responde à potência média. Idealmente, a tensão através da bobina de corrente e a corrente na bobina de tensão são ambas iguais a zero, de forma que a presença do medidor não influencia a potência que está sendo medida.

Um terminal de cada bobina é marcado com  $\pm$  tal que, se a corrente entra no terminal  $\pm$  da bobina de corrente e o terminal  $\pm$  da bobina de tensão é positivo com relação ao seu outro terminal, então o medidor dá uma leitura positiva. Na Fig. 12.10 isto corresponde à carga absorvendo a potência. Se a conexão dos terminais ou da bobina de corrente ou da bobina de tensão (mas não de ambas) for invertida, a leitura será negativa. Muitos medidores não possuem zero central, logo o ponteiro não indicará

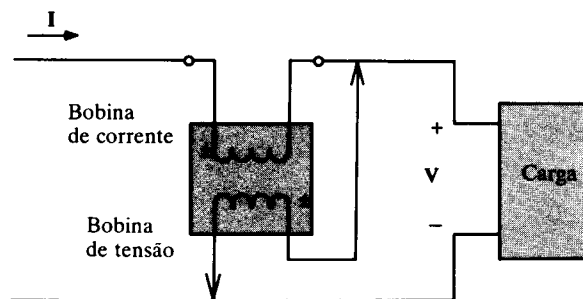


FIGURA 12.10 Conexão típica de um wattímetro

leituras negativas. Tais medidores necessitam, então, uma reversão na conexão de uma das bobinas, usualmente a bobina de tensão. Invertendo-se as conexões de ambas as bobinas não afeta a leitura.

O wattímetro da Fig. 12.10, representado por um retângulo e duas bobinas, está conectado para indicar

$$P = |\mathbf{V}| \cdot |\mathbf{I}| \cos \theta$$

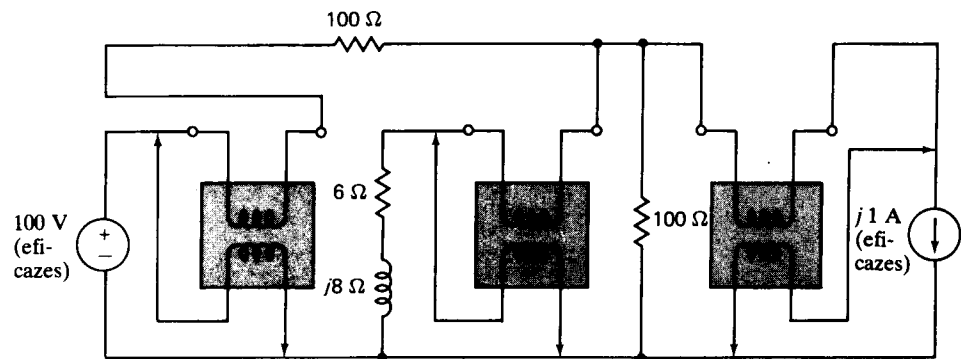
onde  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$  são como indicados e  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$  (ou equivalentemente, o ângulo da impedância da carga). Isto, é claro, é a potência entregue à carga.

Outros tipos de medidores estão disponíveis para medição da potência aparente e da potência reativa. Um medidor de *potência aparente* ou VA simplesmente mede o produto da corrente eficaz pela tensão eficaz. O *varímetro*, por outro lado, mede a potência reativa.

## EXERCÍCIOS

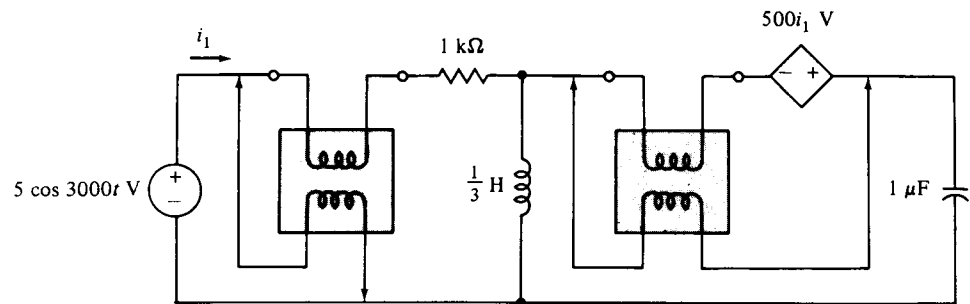
- 12.6.1** Determine a potência medida em cada wattímetro após designação da marcação dos terminais necessária para leitura positiva.

Resposta: 87,5 W, 9,375 W, 0 W



- 12.6.2** Repita o Exerc. 12.6.1 para o circuito mostrado.

Resposta: 10, 30 mW



EXERCÍCIO 12.6.1

## PROBLEMAS

- 12.1** Um ciclo de uma corrente periódica é dado por

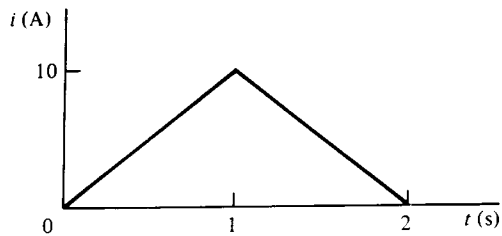
$$i = 10 \text{ A}, \quad 0 \leq t < 1 \text{ ms}$$

$$= 0, \quad 1 \leq t < 4 \text{ ms}$$

Se a corrente flui em um resistor de 20-Ω, calcule a potência média.

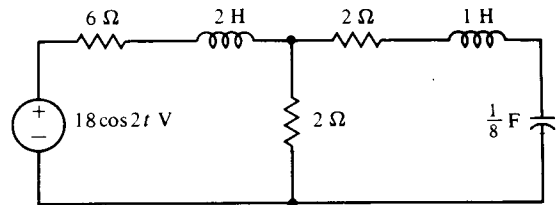
- 12.2** Um ciclo de uma corrente periódica é como mostrado. Se a corrente flui em um resistor de 20-Ω, calcule a potência média.

- 12.3** Calcule a potência média dissipada em um resistor de resistência  $R$ , se a corrente é  $i = I_m (1 + \cos \omega t)$ .



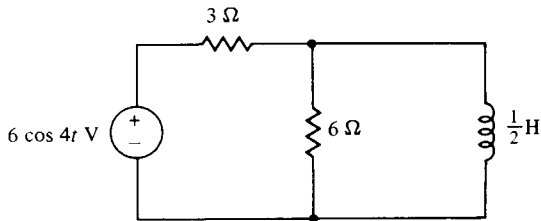
PROBLEMA 12.2

12.6 Calcule a potência média absorvida pelo resistor de 6- $\Omega$ .



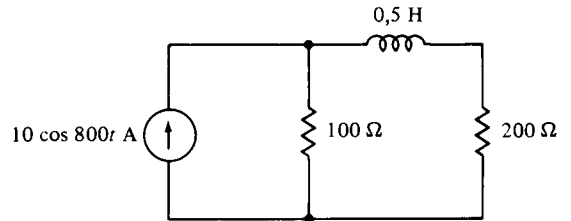
PROBLEMA 12.6

12.4 Calcule a potência média absorvida pelo resistor, pelo indutor e pela fonte.



PROBLEMA 12.4

12.7 Calcule a potência média absorvida pelos resistores e pela fonte.



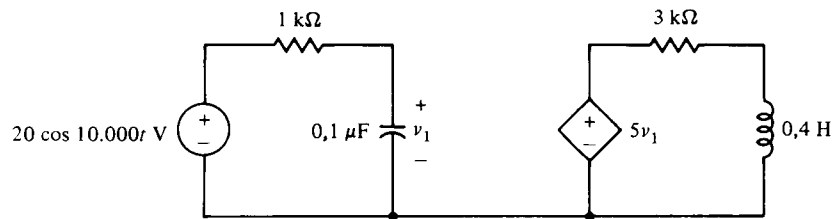
PROBLEMA 12.7

12.5 Uma fonte de tensão  $v = 4 \cos 4t$  V é aplicada a um circuito RL série com  $R = 4 \Omega$  e  $L = 0,5$  H. Calcule a potência fornecida pela fonte.

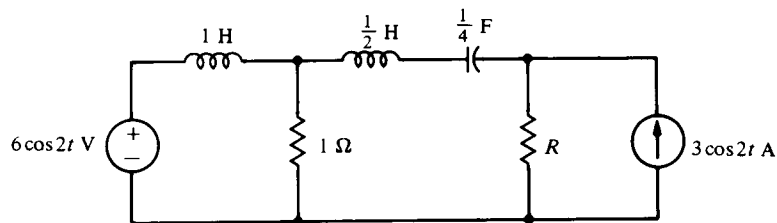
12.8 Calcule a potência média absorvida pelo resistor de 3-k $\Omega$  e pela fonte dependente.

12.9 Calcule a potência média entregue ao resistor  $R$ , se  $R = 0,4 \Omega$ .

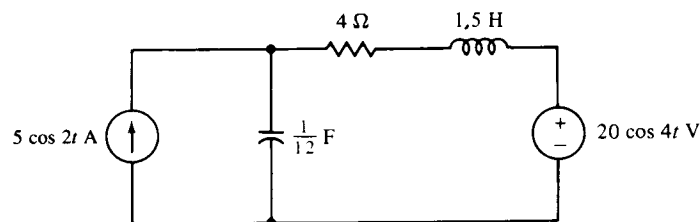
12.10 Calcule a potência média entregue ao resistor de 4- $\Omega$ .



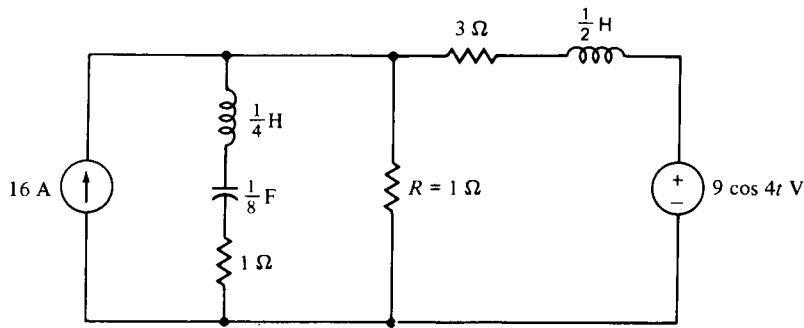
PROBLEMA 12.8



PROBLEMA 12.9

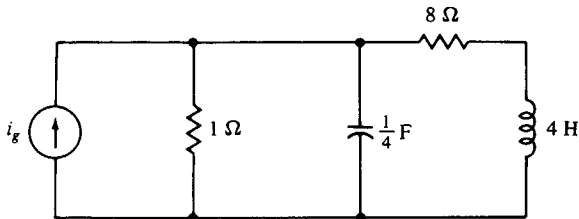


PROBLEMA 12.10



PROBLEMA 12.11

- 12.11 Calcule a potência média entregue ao resistor  $R$ .  
 12.12 Calcule a potência média entregue ao resistor de  $8\text{-}\Omega$  se  $i_g = 18 - 10 \cos t - 39 \cos 2t + 9 \cos 3t$  A.



PROBLEMA 12.12

- 12.13 Definimos a potência média para uma potência instantânea  $p(t)$ , que não é necessariamente periódica, por

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} p(t) dt$$

Mostre para  $v$  e  $i$  de (12.7) – (12.8) que esta definição mantém o mesmo resultado de (12.6).

- 12.14 Dado  $i = i_1 + i_2$ , onde

$$i_1 = I_{1m} \cos \omega_1 t$$

$$i_2 = I_{2m} \cos \omega_2 t$$

é a corrente que flui no resistor  $R$ . Usando a definição do Prob. 12.13, mostre, para  $\omega_1 \neq \omega_2$ , que

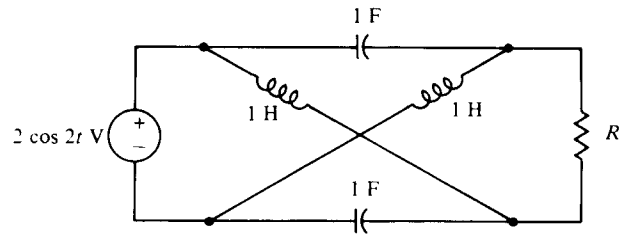
$$P = P_1 + P_2$$

onde  $P_1$  e  $P_2$  são as potências médias, associadas, a  $i_1$  e  $i_2$  respectivamente, atuando isoladamente. Note que isto inclui o caso de  $p(t)$  não sendo periódica.

- 12.15 Para um circuito equivalente de Thévenin constituído de uma fonte de tensão  $V_g$  e uma impedância  $Z_g = R_g + jX_g$ ; (a) mostre que o circuito entrega a potência máxima para a carga  $Z_L = R_L + jX_L$ , quando  $R_L = R_g$  e  $X_L = -X_g$  e (b) mostre que a potência máxima média é entregue para a carga  $R_L$  quando  $R_L = |Z_g|$ . Isto é o teorema da transferência de potência máxima para circuitos c.a.. (Em ambos os casos,  $V_g$  e  $Z_g$  são fixos e a carga é variável.)

- 12.16 Usando o resultado do Prob. 12.15, substitua  $R$  no Prob. 12.9 por (a) uma carga resistiva que irá consumir a potência máxima e (b) uma carga genérica (elementos resistivos e reativos) que irá consumir a potência máxima. Em ambos os casos, calcule a potência resultante.

- 12.17 (a) Calcule a potência absorvida por  $R$  se  $R = 1\ \Omega$ .  
 (b) Calcule a potência máxima que pode ser entregue a  $R$  e o valor de  $R$  para a potência máxima.



PROBLEMA 12.17

- 12.18 Calcule  $R$  tal que ela absorva potência máxima e calcule a potência máxima. (b) Calcule a potência absorvida por  $R$  se  $R = 2\ \Omega$ .

- 12.19 Calcule o valor eficaz da tensão

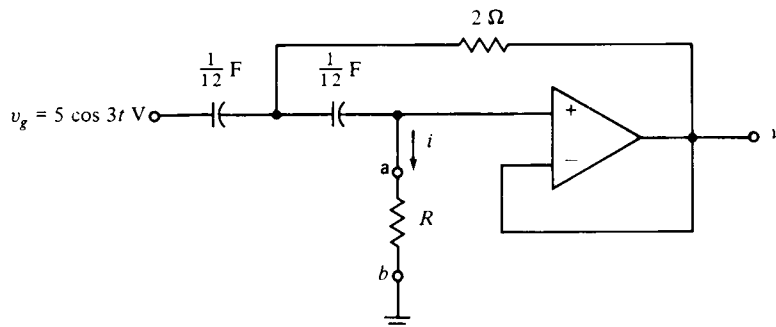
(a)  $v = 8 + 6\sqrt{2} \cos t$  V,

(b)  $v = 4 \cos 3t + \sqrt{2} \cos 6t +$

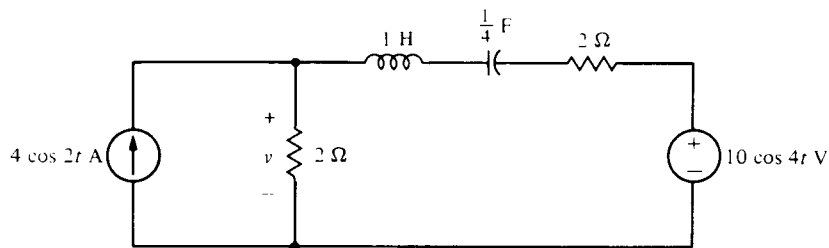
$12 \cos (8t - 60^\circ)$  V, e

(c)  $v = 4 \cos 2t - 8 \cos 5t +$

$6\sqrt{2} \cos (3t - 45^\circ)$  V.



PROBLEMA 12.18



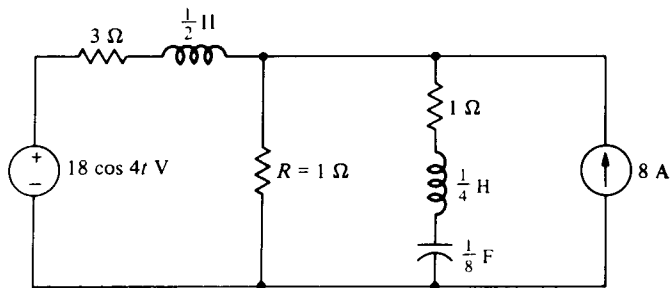
PROBLEMA 12.21

12.20 Calcule o valor eficaz de uma corrente periódica para a qual um ciclo é dado por

- (a)  $i = 3t$  A,  $0 \leq t \leq 2$  s  
 $= 0$ ,  $2 < t \leq 4$  s.  
 (b)  $i = 6$  A,  $0 < t < 2$  s  
 $= 0$ ,  $2 < t < 8$  s.  
 (c)  $i = I_m \sin \frac{2\pi t}{T}$  A,  $0 < t < \frac{T}{2}$  s  
 $= 0$ ,  $\frac{T}{2} < t < T$  s.  
 (d)  $i = I_m \sin \frac{\pi t}{T}$  A,  $0 < t < T$  s.

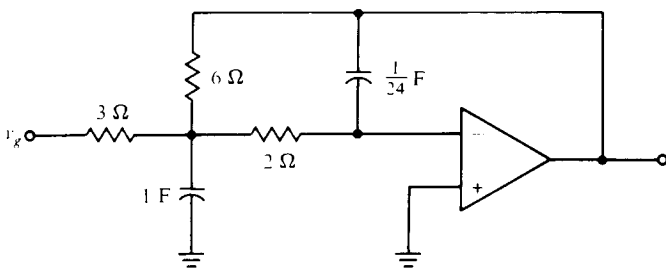
12.21 Calcule o valor eficaz da tensão  $v$  em regime permanente.

12.22 Calcule o valor eficaz da corrente em regime permanente em  $R$ .



PROBLEMA 12.22

12.23 Calcule o valor eficaz da corrente em regime permanente através de resistor de 2-Ω, se  $v_x = 3 \cos t$  V.



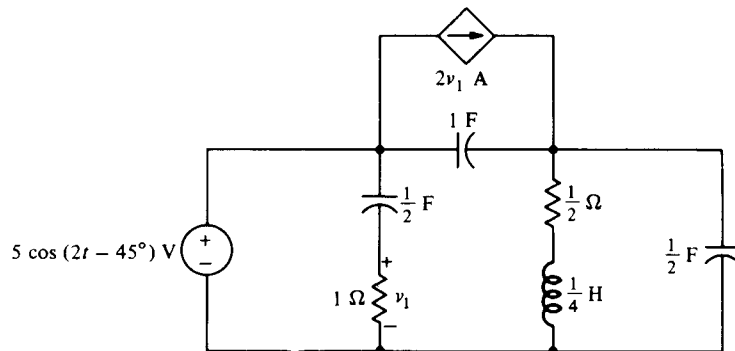
PROBLEMA 12.23

12.24 Calcule o valor eficaz da corrente em regime permanente sobre o resistor de  $\frac{1}{2}$ -Ω.

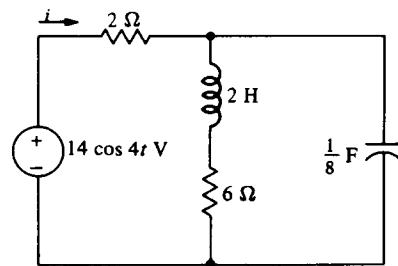
12.25 Derive (12.22).

12.26 Calcule o valor eficaz da corrente  $i$  em regime permanente e o fator de potência visto pelos terminais da fonte. Que elementos deve-se conectar em paralelo com a fonte para corrigir o fator de potência para 0,8 (atrasado)?

12.27 Calcule o fator de potência visto pelos terminais da fonte e a reatância necessária a ser conectada em paralelo com a fonte para mudar o fator de potência para a unidade.

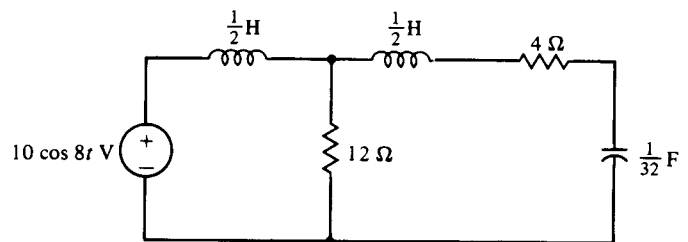


PROBLEMA 12.24

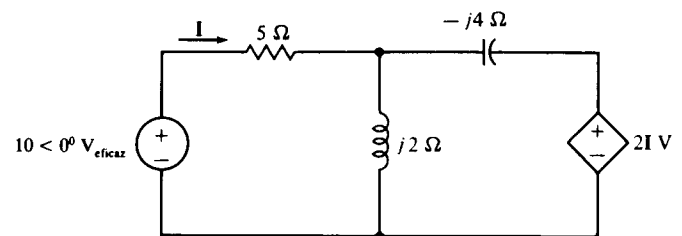


PROBLEMA 12.26

12.28 Calcule o fator de potência visto pelos terminais da fonte independente e a reatância que deve ser conectada em paralelo com a fonte independente para mudar o fator de potência para 0,8 (atrasado).

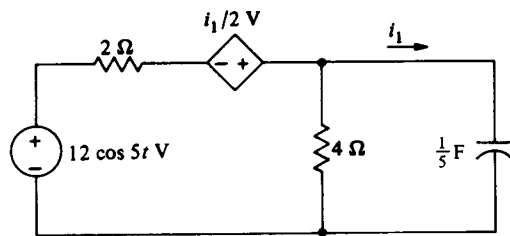


PROBLEMA 12.27



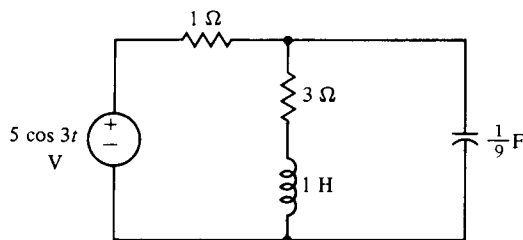
PROBLEMA 12.28

- 12.29 Calcule a potência ativa, a potência reativa e a potência complexa entregue pela fonte independente. Calcule também o elemento reativo a ser colocado em paralelo com a fonte independente para corrigir o fator de potência visto pela fonte para 0,8 (adiantado).



PROBLEMA 12.29

- 12.30 Calcule a potência ativa, a potência reativa e a potência complexa entregue pela fonte e o elemento reativo que deve ser colocado em paralelo com a fonte para tornar o fator de potência visto pela fonte (a) 0,9 (adiantado) e (b) 0,8 (atrasado).

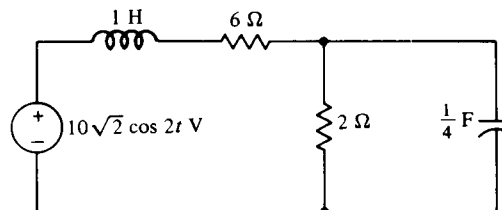


PROBLEMA 12.30

- 12.31 Duas cargas em paralelo consomem respectivamente 210 W com um fator de potência de 0,6 (adiantado) e 40 W com um fator

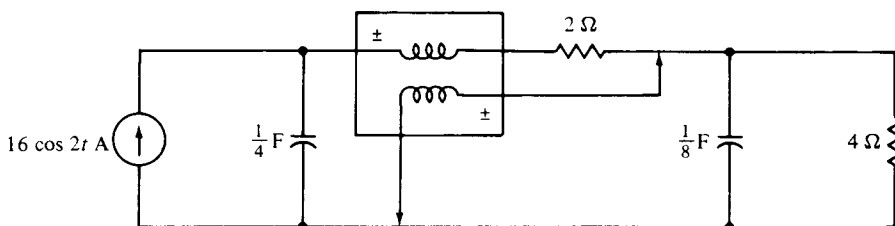
de potência de 0,8 (atrasado). Se a tensão através da associação em paralelo é  $V_g = 50/15^\circ \text{ V}_{\text{eficazes}}$ , calcule a corrente  $I$  entregue pela fonte.

- 12.32 Três cargas passivas paralelas,  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$  estão recebendo potências complexas de valores  $3 - j4$ ,  $2 + j5$ , e  $3 + j5 \text{ VA}$ , respectivamente. Se uma fonte de tensão de  $20/0^\circ \text{ V}_{\text{eficazes}}$  é conectada a estas cargas, calcule o valor eficaz da corrente que flui da fonte e o valor de potência visto pela fonte.
- 12.33 Uma carga é alimentada da potência complexa  $S = 6 + j8 \text{ VA}$  por uma fonte de tensão de  $10 \cos 100t \text{ V}$ . Calcule a capacitância que deve ser conectada em paralelo com a carga para que o fator de potência visto pela fonte seja (a) unitário e (b) 0,8 (atrasado).
- 12.34 Duas cargas em paralelo consomem um total de 3 kW com um fator de potência de 0,9 (atrasado) de uma linha de 115-V (eficazes), 60 Hz. Uma carga conhecida absorve 1.000 W com o fator de potência de 0,8 (atrasado). Calcule (a) o fator de potência da segunda carga e (b) o elemento reativo em paralelo necessário para corrigir o fator de potência para 0,95 (atrasado) da carga resultante.
- 12.35 Calcule a potência ativa, a potência reativa e a potência complexa entregue pela fonte.

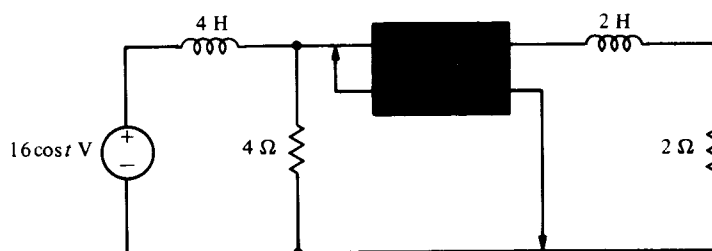


PROBLEMA 12.35

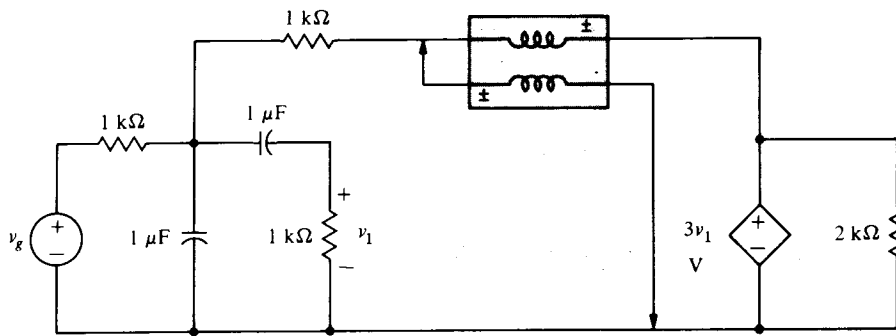
- 12.36 Calcule a leitura do wattímetro.
- 12.37 Calcule a leitura do wattímetro.
- 12.38 Calcule a leitura do wattímetro, se  $v_g = 4 \cos 1.000t \text{ V}$ .
- 12.39 Se  $Z = 10/30^\circ \Omega$ , calcule a leitura do wattímetro.
- 12.40 Calcule a leitura do wattímetro.



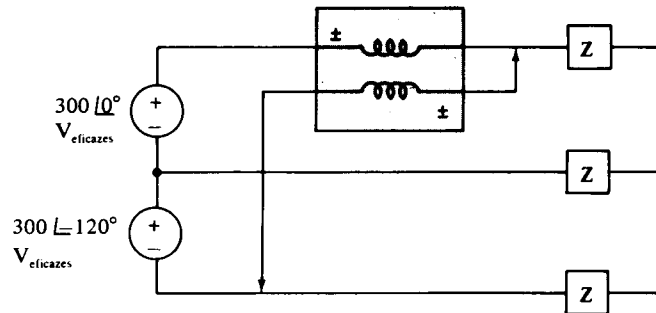
PROBLEMA 12.36



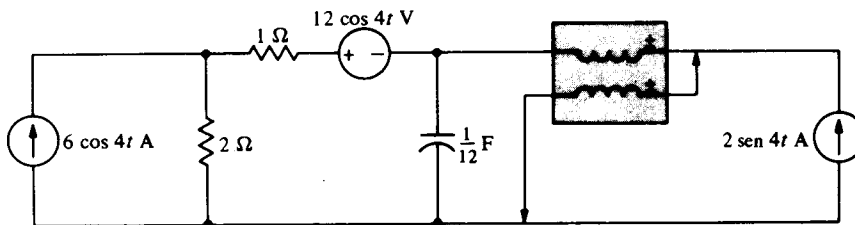
PROBLEMA 12.37



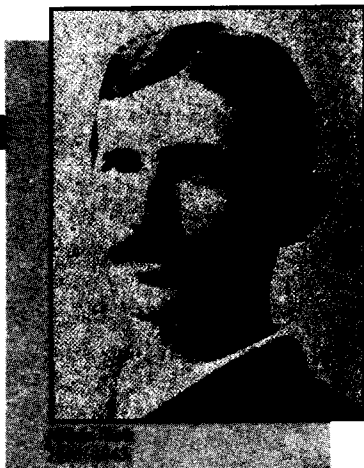
PROBLEMA 12.38



PROBLEMA 12.39



PROBLEMA 12.40



# 13

## Circuitos Trifásicos

---

*Ele [Tesla] foi o maior inventor no ramo da engenharia elétrica.*

*W. H. Eccles*

---

Se Thomas A. Edison tem um rival para o título de maior inventor do planeta, é certamente o engenheiro croata-americano, Nikola Tesla. Quando o alto e magro Tesla chegou aos Estados Unidos em 1884, o país estava em meio a uma "batalha de correntes" entre Thomas A. Edison, a favor da corrente contínua, e George Westinghouse, liderando as hostes da corrente alternada. Tesla rapidamente definiu a discussão em favor da corrente alternada com suas extraordinárias invenções, como o sistema polifásico, o motor de indução, a bobina de Tesla e as lâmpadas fluorescentes.

Tesla nasceu em Smiljan, Áustria-Hungria (depois Iugoslávia), filho de um sacerdote da Igreja Ortodoxa Grega. Na infância, Tesla mostrou talento para a matemática e uma memória fantástica, com a habilidade de recitar de cor livros e poemas inteiros. Ele cursou dois anos do Instituto Politécnico de Graz, Áustria, onde idealizou o conceito de campo magnético rotativo, mais tarde base para o motor de indução. Neste momento da vida de Tesla, seu pai faleceu e ele decidiu deixar os estudos, empregando-se em Paris, na Companhia Continental Edison. Dois anos mais tarde mudou-se para a América, onde permaneceu até sua morte. Durante sua notável vida, registrou os direitos de mais de 700 patentes, definiu a disputa entre c.a. e c.c. e foi, principalmente, responsável pela seleção de 60 Hz como a frequência padrão nos Estados Unidos e em boa parte do mundo. Após sua morte, foi homenageado com a escolha de "tesla" como unidade de densidade de fluxo magnético. ■



Como já observado, um uso muito importante da análise em regime permanente em corrente alternada é sua aplicação a sistemas de potência, em sua maioria sistemas de corrente alternada. A razão principal do uso de c.a. é que só é possível transmitir potência a longas distâncias se as tensões consideradas são muito elevadas, e é mais simples elevar e reduzir tensões em sistemas c.a. do que em c.c. Corrente alternada pode ser elevada para transmissão e reduzida para distribuição por meio de transformadores, como veremos no Capítulo 16. Transformadores não têm partes móveis e são relativamente simples de construir, ao passo que, com a tecnologia disponível no momento, máquinas girantes são normalmente necessárias para elevar e reduzir tensões contínuas. (\*) Nota do Tradutor: Na atualidade, diversos sistemas estão comissionados no mundo, em corrente contínua, sem o uso de máquinas girantes. É o caso, por exemplo, do sistema de Itaipu, no Brasil, que opera linhas de transmissão de  $\pm 600$  kV c.c. e onde são usados tiristores para a conversão de c.a. em c.c. Este fato, porém, em nada prejudica ou invalida a importância do estudo dos sistemas c.a. trifásicos.

Além disso, por questões econômicas e de desempenho, praticamente toda energia elétrica é gerada por fontes *polifásicas* (tensões com mais de uma fase). Em um circuito monofásico, a potência entregue a uma carga é pulsante, mesmo se a corrente e a tensão estão em fase. Um sistema polifásico, por outro lado, é como um motor de automóvel com vários cilindros, onde a potência entregue é uniforme. Conseqüentemente, há menos vibração nas máquinas girantes, que, assim, têm um desempenho mais eficiente. Uma vantagem econômica é que o peso do condutor e dos componentes associados necessários num sistema polifásico é sensivelmente inferior ao necessário para um sistema monofásico que entrega a mesma potência. Virtualmente, toda a potência gerada no mundo é polifásica de 50 ou 60 Hertz. Nos Estados Unidos, 60 Hz é a frequência padronizada.

Neste capítulo, começaremos com sistemas monofásicos a três fios, mas iremos nos concentrar nos sistemas trifásicos que são, de longe, os mais comuns dos sistemas polifásicos. Neste último caso, as fontes são geradoras trifásicas, que geram um conjunto *equilibrado* de tensões, ou seja, três tensões senoidais com a mesma amplitude e frequência, porém defasadas de 120 graus. Desta forma, a fonte trifásica é equivalente a três fontes monofásicas interconectadas, cada uma gerando uma tensão, com diferentes fases. Se as três correntes que saem dos geradores também constituem um conjunto equilibrado, o sistema é dito como um sistema trifásico *equilibrado*. Este é o caso ao qual nos restringiremos, na maior parte do texto.

## 13.1

### Sistemas Monofásicos, a Três Fios

Antes de entrarmos no caso trifásico, vamos digressionar nesta seção para estabelecer nossa notação e considerar o exemplo de um circuito monofásico usado normalmente em residências. Este exemplo servirá para nos dar alguma prática com um circuito monofásico, com o qual já estamos familiarizados, e que servirá como uma introdução ao circuito trifásico, a ser considerado a seguir.

Neste capítulo será extremamente útil a notação em subíndice duplo, introduzida no Capítulo 1 para tensões. No caso de fasores, a notação é  $V_{ab}$  para a tensão do ponto *a* em relação ao ponto *b*. Usaremos também a notação em subíndice duplo para corrente, fazendo, por exemplo,  $I_{ab}$  como a corrente circulando no caminho *direto* do ponto *a* ao *b*. Estas variáveis estão ilustradas na Fig. 13.1, onde o percurso direto de *a* para *b* é diferenciado do percurso alternativo de *a* para *b* através de *c*.

Por causa das expressões mais simples que resultam para a potência média, usaremos valores eficazes para tensões e correntes neste capítulo. (Estes são também os valores lidos pela maioria dos medidores.) Ou seja, se

$$\begin{aligned} V &= |V| \angle 0^\circ \text{ V eficaz} \\ I &= |I| \angle -\theta \text{ A eficaz} \end{aligned} \tag{13.1}$$

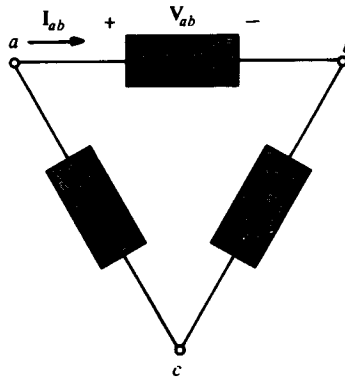


FIGURA 13.1 Ilustração da notação em subíndice duplo

são os fasores associados com um elemento que tem impedância,

$$\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}| \angle \theta \ \Omega \quad (13.2)$$

a potência média entregue ao elemento é

$$\begin{aligned} P &= |\mathbf{V}| \cdot |\mathbf{I}| \cos \theta \\ &= |\mathbf{I}|^2 \operatorname{Re} \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (13.3)$$

No domínio do tempo, a tensão e a corrente são

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2} |\mathbf{V}| \cos \omega t \\ i &= \sqrt{2} |\mathbf{I}| \cos (\omega t - \theta) \end{aligned}$$

### EXEMPLO 13.1

O uso de subíndices duplos facilita o manuseio de fasores analiticamente e geometricamente. Por exemplo, na Fig. 13.2 (a), a tensão  $\mathbf{V}_{ab}$  é

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{nb}$$

Isso é evidente qualquer que seja o circuito, pois, pela LKT, a tensão entre dois pontos  $a$  e  $b$  é a mesma, qualquer que seja o percurso, que, neste caso, é  $a, n, b$ . Também, como  $\mathbf{V}_{nb} = -\mathbf{V}_{bn}$ , temos

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ab} &= \mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn} \\ &= 100 - 100 \angle -120^\circ \end{aligned}$$

que, após simplificações, torna-se

$$\mathbf{V}_{ab} = 100\sqrt{3} \angle 30^\circ \text{ V eficaz}$$

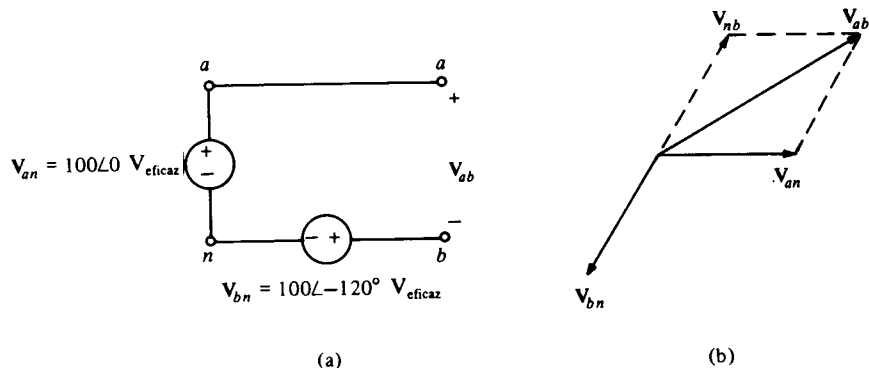


FIGURA 13.2 (a) Circuito fasorial; (b) diagrama fasorial correspondente

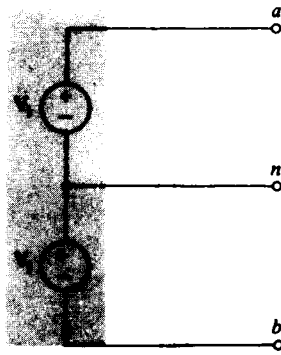


FIGURA 13.3 Fonte monofásica, a três fios

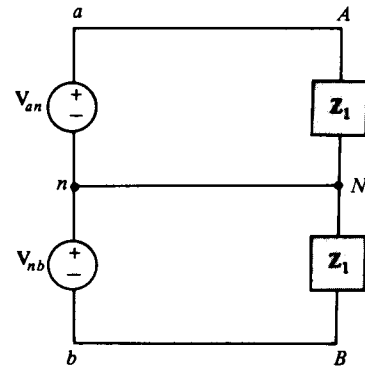


FIGURA 13.4 Sistema monofásico, a três fios, com duas cargas idênticas

Estes passos estão ilustrados graficamente na 13.2(b).

Uma fonte monofásica, a três fios, como ilustrado na Fig. 13.3, é a que tem três terminais de saída  $a$ ,  $b$  e o terminal *neuro*  $n$ , em relação ao qual as tensões terminais são iguais. Ou seja,

$$V_{an} = V_{nb} = V_1 \quad (13.4)$$

Este é um circuito normal numa residência alimentada com 115 V e 230 V (eficazes), pois se  $|V_{an}| = |V_1| = 115$  V, então  $|V_{ab}| = |2V_1| = 230$  V.

Vamos, agora, considerar a fonte indicada na Fig. 13.3, alimentando duas cargas idênticas, ambas tendo uma impedância  $Z_1$ , como mostrado na Fig. 13.4. As correntes nos ramos  $aA$  e  $bB$  são

$$I_{aA} = \frac{V_{an}}{Z_1} = \frac{V_1}{Z_1}$$

$$I_{bB} = \frac{V_{bn}}{Z_1} = -\frac{V_1}{Z_1} = -I_{aA}$$

Por esta razão, a corrente no fio neutro,  $nN$ , pela LKC é

$$I_{nN} = -(I_{aA} + I_{bB}) = 0$$

Logo, o neutro poderia ser retirado sem alterar qualquer corrente ou tensão no sistema.

Se os ramos  $aA$  e  $bB$  não são condutores perfeitos mas têm impedâncias iguais  $Z_2$ , então  $I_{nN}$  ainda seria zero por que podemos simplesmente acrescentar as impedâncias série  $Z_1$  e  $Z_2$  e ter essencialmente a mesma situação da Fig. 13.4. Certamente, no caso mais geral indicado na Fig. 13.5, a corrente de neutro  $I_{nN}$  é ainda zero. Isso pode ser visto escrevendo-se as duas equações de malha

$$(Z_1 + Z_2 + Z_3)I_{aA} + Z_3I_{bB} - Z_1I_3 = V_1$$

$$Z_3I_{aA} + (Z_1 + Z_2 + Z_3)I_{bB} + Z_1I_3 = -V_1$$

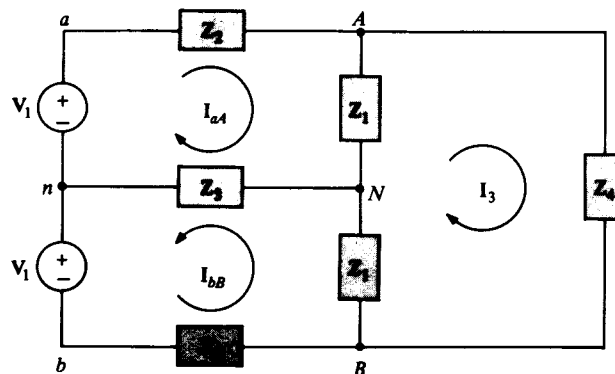


FIGURA 13.5 Sistema simétrico monofásico, a três fios

e somando-se o resultado, do que resulta

$$(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)(\mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB}) + \mathbf{Z}_3(\mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB}) = 0$$

ou

$$\mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} = 0 \quad (13.5)$$

Como pela LKC o termo à esquerda da última equação é  $-\mathbf{I}_{nN}$ , a corrente de neutro é zero. Isto é, claro, consequência da simetria da Fig. 13.5.

Se a simetria da Fig. 13.5 for destruída pela presença de cargas desiguais nos terminais  $A-N$  e  $B-N$  ou impedâncias de linha desiguais nas linhas  $aA$  e  $bB$ , então haverá uma corrente no neutro.

### EXEMPLO 13.2

Por exemplo, vamos considerar a situação da Fig. 13.6, que tem duas cargas operando com aproximadamente 115 V e uma com aproximadamente 230 V. As equações de malha são

$$43\mathbf{I}_1 - 2\mathbf{I}_2 - 40\mathbf{I}_3 = 115$$

$$-2\mathbf{I}_1 + 63\mathbf{I}_2 - 60\mathbf{I}_3 = 115$$

$$-40\mathbf{I}_1 - 60\mathbf{I}_2 + (110 + j10)\mathbf{I}_3 = 0$$

Resolvendo para as correntes, teremos

$$\mathbf{I}_1 = 16,32/-33,7^\circ \text{ A eficaz}$$

$$\mathbf{I}_2 = 15,73/-35,4^\circ \text{ A eficaz}$$

$$\mathbf{I}_3 = 14,46/-39,9^\circ \text{ A eficaz}$$

Por esta razão, a corrente de neutro é

$$\mathbf{I}_{nN} = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1 = 0,76/184,3^\circ \text{ A eficaz}$$

e, certamente, não é zero.

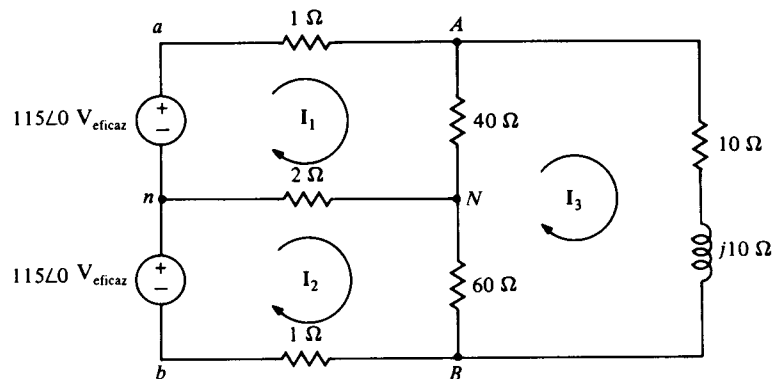


FIGURA 13.6 Sistema assimétrico monofásico, a três fios

### EXERCÍCIOS

- 13.1.1 Demonstre (13.5) por superposição, baseado na Fig. 13.5.
- 13.1.2 Calcule as potências  $P_{40}$ ,  $P_{60}$ , e  $P_{10+j10}$  entregues às cargas 40Ω, 60Ω, e  $(10 + j10)\Omega$ , respectivamente, da Fig. 13.6.  
Resposta: 249; 181; 2091 W
- 13.1.3 Calcule as potências  $P_{aA}$ ,  $P_{bB}$  e  $P_{nN}$  perdidas nas linhas da Fig. 13.6.  
Resposta: 266,3; 247,4; 1,2 W
- 13.1.4 Calcule as potências  $P_{an}$  e  $P_{nb}$  entregues pelas duas fontes da Fig. 13.6. Confira os resultados dos exercícios 13.1.2 e 13.1.3 para conservação da potência.  
Resposta: 1561,4, 1474,5 W

## Sistemas Trifásicos Y-Y

Vamos considerar a fonte trifásica da Fig. 13.7 (a), que tem terminais *de linha*  $a, b$  e  $c$  e um terminal *neutro*  $n$ . Neste caso, a fonte é denominada em *conexão Y* (conectada como um Y, como mostrado (\*)). Uma representação equivalente é a da Fig. 13.7 (b), que é de certa forma mais simples de desenhar.

As tensões  $V_{an}$ ,  $V_{bn}$  e  $V_{cn}$  entre os terminais de linha e o terminal de neutro são chamadas *tensões de fase ou fase-terra* e na maioria das vezes serão consideradas como dadas por

$$\begin{aligned} V_{an} &= V_p/0^\circ \\ V_{bn} &= V_p/-120^\circ \\ V_{cn} &= V_p/120^\circ \end{aligned} \quad (13.6)$$

ou

$$\begin{aligned} V_{an} &= V_p/0^\circ \\ V_{bn} &= V_p/120^\circ \\ V_{cn} &= V_p/-120^\circ \end{aligned} \quad (13.7)$$

Nos dois casos, cada tensão de fase tem o mesmo módulo  $V_p$  (valor eficaz), e as fases estão defasadas de  $120^\circ$ , com  $V_{an}$  selecionada arbitrariamente como o fasor de referência. Este conjunto de tensões é chamado *sistema equilibrado* e é caracterizado por

$$V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0 \quad (13.8)$$

como pode ser inferido de (13.6) ou (13.7).

A seqüência das tensões de (13.6) é chamada de *seqüência positiva*, ou *seqüência abc*, ao passo que a seqüência de (13.7) é chamada *seqüência negativa* ou *acb*. Os diagramas fasoriais das duas seqüências estão indicados na Fig. 13.8, onde podemos ver, por inspeção, que (13.8) é verdadeira. Evidentemente, a única diferença entre a seqüência positiva e a negativa é a escolha arbitrária dos nomes dos terminais,  $a, b$  e  $c$ . Então, sem perda da generalidade, consideraremos apenas a seqüência positiva.

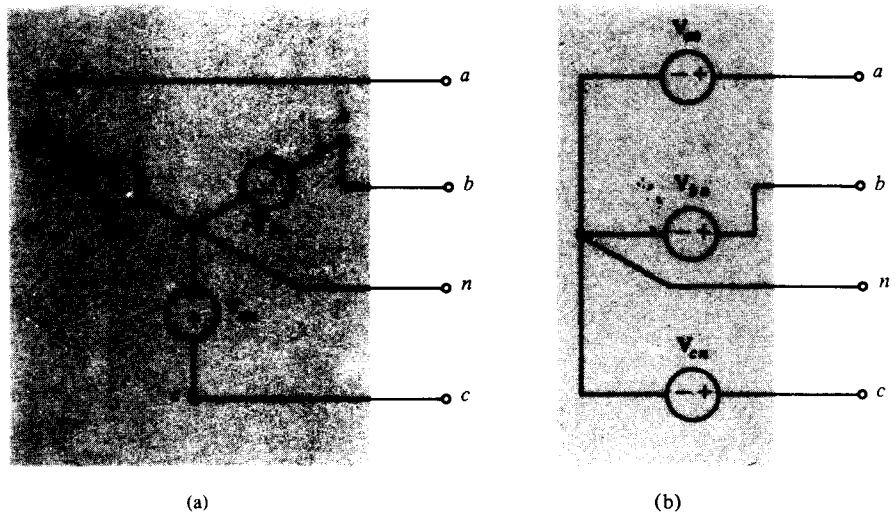


FIGURA 13.7 Duas representações de uma fonte conectada em Y

(\*) Nota do Tradutor: alguns autores usam o termo “estrela” para esta conexão.

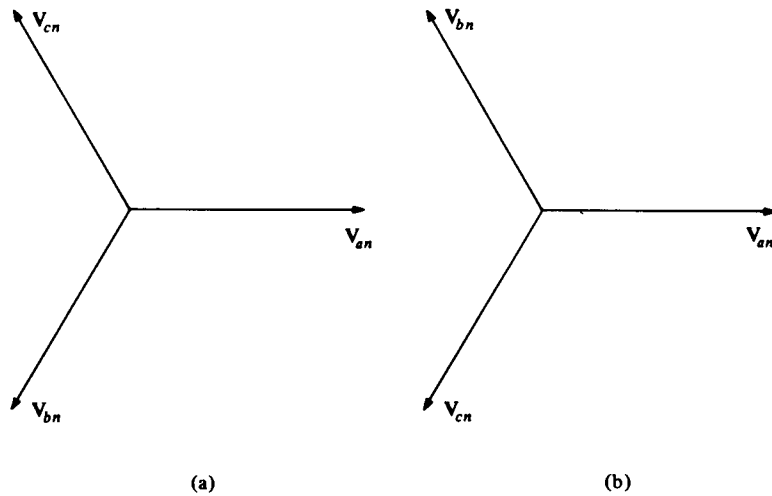


FIGURA 13.8 Seqüência de fases positiva (a) e negativa (b)

Por (13.6), as tensões na seqüência  $abc$  podem ser relacionadas a  $V_{an}$ . As relações, que serão úteis mais tarde, são

$$\begin{aligned} V_{bn} &= V_{an}/-120^\circ \\ V_{cn} &= V_{an}/120^\circ \end{aligned} \quad (13.9)$$

As tensões *fase-fase*, ou simplesmente tensões de *linha*, são  $V_{ab}$ ,  $V_{bc}$  e  $V_{ca}$  (Fig. 13.7), que podem ser calculadas a partir das tensões de fase. Por exemplo,

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_{an} + V_{nb} \\ &= V_p/0^\circ - V_p/-120^\circ \\ &= \sqrt{3} V_p/30^\circ \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} V_{bc} &= \sqrt{3} V_p/-90^\circ \\ V_{ca} &= \sqrt{3} V_p/-210^\circ \end{aligned}$$

Se denominamos o módulo das tensões de linha por  $V_L$ , teremos então:

$$V_L = \sqrt{3} V_p \quad (13.10)$$

e, então

$$V_{ab} = V_L/30^\circ, \quad V_{bc} = V_L/-90^\circ, \quad V_{ca} = V_L/-210^\circ \quad (13.11)$$

Estes resultados podem ser também obtidos graficamente do diagrama fasorial mostrado na Fig. 13.9.

Vamos agora considerar o sistema da Fig. 13.10, que é um sistema trifásico *equilibrado* Y-Y, a quatro fios, se as tensões da fonte são dadas por (13.6). O termo Y-Y se aplica, pois tanto a fonte como a carga são conectadas em Y. O sistema é considerado como equilibrado, pois as tensões da fonte constituem um conjunto equilibrado e a carga é equilibrada (cada *impedância de fase* é igual — neste caso — a  $Z_p$ ). O quarto fio é o neutro  $n-N$ , que pode ser omitido para formar um sistema trifásico, a três fios.

As correntes de linha da Fig. 13.10 são evidentemente

$$\begin{aligned} I_{aA} &= \frac{V_{an}}{Z_p} \\ I_{bB} &= \frac{V_{bn}}{Z_p} = \frac{V_{an}/-120^\circ}{Z_p} = I_{aA}/-120^\circ \\ I_{cC} &= \frac{V_{cn}}{Z_p} = \frac{V_{an}/120^\circ}{Z_p} = I_{aA}/120^\circ \end{aligned} \quad (13.12)$$

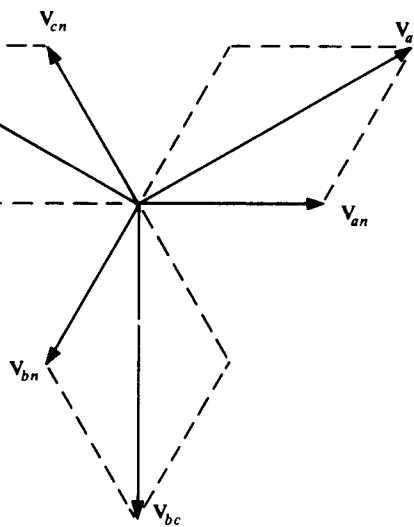


FIGURA 13.9 Diagrama fasorial, indicando tensões de fase e de linha

Os dois últimos resultados são uma consequência de (13.9) e mostram que as correntes de linha também formam um conjunto equilibrado. Logo, sua soma é

$$-I_{nN} = I_{aA} + I_{bB} + I_{cC} = 0$$

Conseqüentemente, não há circulação de corrente pelo neutro num sistema equilibrado Y-Y, a quatro fios.

No caso de cargas conectadas em Y, as correntes nas linhas  $aA$ ,  $bB$  e  $cC$  são também as *correntes de fase* (correntes que circulam pelas impedâncias de fase). Se os módulos das correntes de fase e linha são, respectivamente,  $I_p$  e  $I_L$ , então  $I_L = I_p$  e (13.12) torna-se

$$\begin{aligned} I_{aA} &= I_L / -\theta = I_p / -\theta \\ I_{bB} &= I_L / -\theta - 120^\circ = I_p / -\theta - 120^\circ \\ I_{cC} &= I_L / -\theta + 120^\circ = I_p / -\theta + 120^\circ \end{aligned} \quad (13.13)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de  $Z_p$ .

A potência média  $P_p$  entregue a cada fase da Fig. 13.10 é

$$\begin{aligned} P_p &= V_p I_p \cos \theta \\ &= I_p^2 \operatorname{Re} Z_p \end{aligned} \quad (13.14)$$

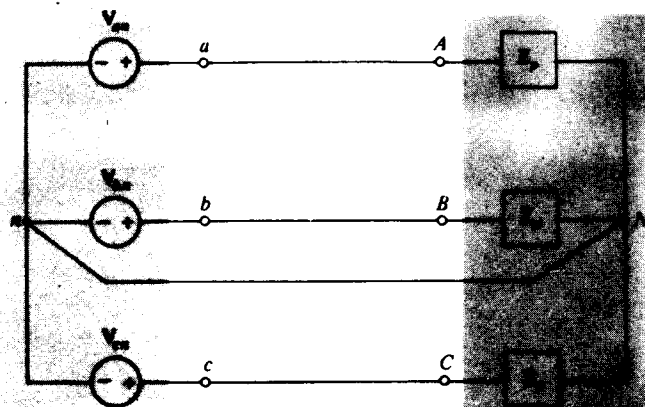


FIGURA 13.10 Sistema Y-Y equilibrado

e a potência total entregue à carga é

$$P = 3P_p$$

O ângulo  $\theta$  da impedância de fase é então o ângulo do fator de potência da carga trifásica, assim como o de uma única fase.

Suponhamos agora que uma impedância  $Z_L$  é adicionada a cada uma das linhas  $aA$ ,  $bB$  e  $cC$  e que uma impedância  $Z_N$ , não necessariamente igual a  $Z_L$ , é acrescentada na linha  $nN$ . Em outras palavras, as linhas não são condutores perfeitos, mas têm uma certa impedância. Evidentemente as impedâncias das linhas, exceto por  $Z_N$ , estão em série com as impedâncias de fase e que os dois conjuntos de impedâncias podem ser combinados para formar linhas  $aA$ ,  $bB$  e  $cC$  perfeitamente condutoras com a impedância de carga  $Z_p + Z_L$  em cada fase. Desta forma, exceto pela impedância  $Z_N$  no neutro, o sistema equivalente tem linhas perfeitamente condutoras e uma carga equilibrada. Se a impedância  $Z_N$  não existisse no neutro, este seria também um condutor perfeito e o sistema seria equilibrado como na Fig. 13.10. Neste caso, como já visto, os pontos  $n$  e  $N$  estão no mesmo potencial e não há corrente no neutro. Então, não importa o que há na linha do neutro. Pode ser um curto-circuito ou um circuito aberto ou, ainda, conter uma impedância como  $Z_N$ , e, ainda, não haverá circulação de corrente no neutro e nenhuma tensão aparecerá em  $nN$ . Obviamente, então, a presença de impedâncias de linhas idênticas em  $aA$ ,  $bB$  e  $cC$  e uma impedância no neutro não alteram o fato das correntes de linha formarem um conjunto equilibrado.

### EXEMPLO 13.3

Como exemplo, vamos calcular as correntes de linha da Fig. 13.11. Vamos associar a impedância de linha de  $1\text{-}\Omega$  e a impedância de fase  $(3 + j3)\text{-}\Omega$  para obter

$$Z_p = 4 + j3 = 5/36,9^\circ \Omega$$

como a carga de fase efetiva. Como visto acima, não há corrente de neutro, e temos

$$I_{aA} = \frac{100/0^\circ}{5/36,9^\circ} = 20/-36,9^\circ \text{ A eficaz}$$

As correntes formam um conjunto equilibrado, de seqüência positiva, de forma que temos também

$$I_{bB} = 20/-156,9^\circ \text{ A eficaz} \quad I_{cC} = 20/-276,9^\circ \text{ A eficaz}$$

Este exemplo foi resolvido em base “por fase”. Como a impedância no neutro é irrelevante num sistema Y-Y equilibrado, podemos imaginar a linha neutra como um curto-circuito. Podemos fazer isso se ela contiver uma impedância ou mesmo se o fio neutro não existir (um sistema a três fios). Podemos então dirigir nossa atenção para somente uma fase, por exemplo, “fase A”, consistindo na fonte  $V_{an}$  em série com  $Z_L$  e  $Z_p$ , como mostrado na Fig. 13.12. (A linha  $nN$  é substituída por um curto-circuito.) A corrente de linha  $I_{aA}$ , a tensão de fase  $V_{aA}$ ,  $Z_p$  e a queda de tensão na linha  $I_{aA} Z_L$  podem todas ser calculadas a partir desta análise monofásica. As demais correntes e tensões no sistema podem ser calculadas de forma similar, ou a partir dos resultados anteriores, uma vez que o sistema é equilibrado.

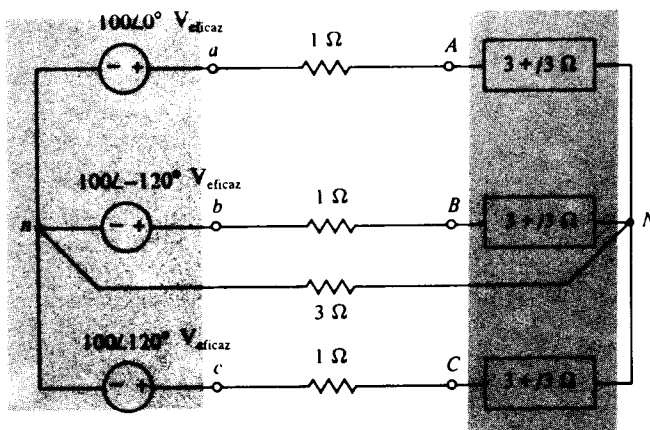


FIGURA 13.11 Sistema equilibrado com impedâncias de linha



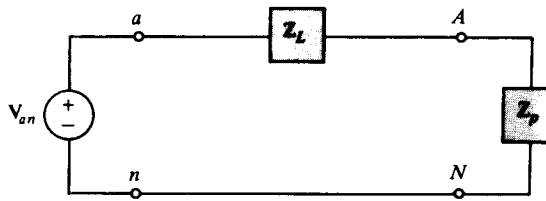


FIGURA 13.12 Diagrama unifilar, para uma análise por fase

### EXEMPLO 13.4

Como outro exemplo, suponhamos que tivéssemos uma carga equilibrada, conectada em Y, com tensão de linha  $V_L = 200$  V (eficazes), que alimenta uma carga equilibrada conectada em Y com  $P = 900$  W, com fator de potência atrasado de 0,9. Vamos calcular a corrente de linha  $I_L$  e a impedância de fase  $Z_p$ . Como a potência fornecida à carga é 900 W, a potência fornecida a cada fase é  $P_p = (900/3) = 300$  W, e de

$$P_p = V_p I_p \cos \theta$$

obtemos

$$300 = \left(\frac{200}{\sqrt{3}}\right) I_p (0,9)$$

Entretanto, como para uma carga conectada em Y a corrente de fase é igual à corrente de linha, temos

$$I_L = I_p = \frac{3\sqrt{3}}{2(0,9)} = 2,89 \text{ A eficaz}$$

O módulo de  $Z_p$  é dado por

$$|Z_p| = \frac{V_p}{I_p} = \frac{200/\sqrt{3}}{3\sqrt{3}/(2)(0,9)} = 40 \Omega$$

e como  $\theta = \cos^{-1} 0,9 = 25,84^\circ$  é o ângulo de  $Z_p$ , temos

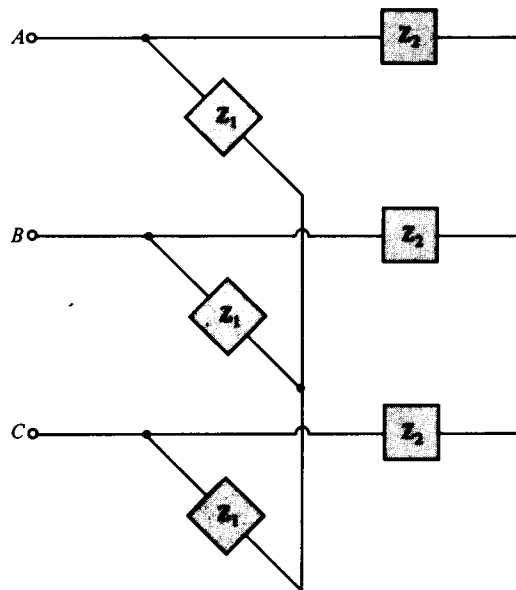
$$Z_p = 40/25,84^\circ \Omega$$

Se a carga for desequilibrada mas existir um fio neutro que seja um condutor perfeito, então podemos ainda usar o método por fase para a solução de cada fase. Entretanto, se este não for o caso, este método simplificado não se aplica. Existe um método muito eficiente empregando os chamados *componentes simétricos*, que é aplicável a sistemas desequilibrados e que o leitor pode encontrar num curso de sistemas de potência. É importante notar, de qualquer forma, que um circuito trifásico é, contudo, um circuito e, equilibrado ou não, pode sempre ser resolvido por procedimentos gerais de análise.

## EXERCÍCIOS

- 13.2.1** Dado  $V_{ab} = 100\angle 0^\circ$  V (eficazes) como a tensão de linha de uma carga trifásica equilibrada conectada em Y. Se a sequência de fases é *abc*, calcule as tensões de fase.  
*Resposta:*  $57,7\angle -30^\circ$ ;  $57,7\angle -150^\circ$ ;  $57,7\angle -270^\circ$  V (eficazes)
- 13.2.2** Na Fig. 13.10, as tensões da fonte foram calculadas pelo Ex. 13.2.1 e a carga em cada fase é uma combinação série de um resistor de  $30\text{-}\Omega$ , um capacitor de  $500\ \mu\text{F}$  e um indutor de  $0,25\text{-H}$ . A frequência é  $\omega = 200$  rad/s. Calcule as correntes de linha e a potência entregue na carga.  
*Resposta:*  $1,15\angle -83,1^\circ$ ;  $1,15\angle -203,1^\circ$ ;  $1,15\angle 36,9^\circ$  A (eficazes), 120 W
- 13.2.3** Demonstre que, se um sistema trifásico equilibrado, a três fios, tiver duas cargas trifásicas equilibradas ligadas em paralelo, como mostrado na figura, então a carga é equivalente à da Fig. 13.10, com

$$Z_p = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$



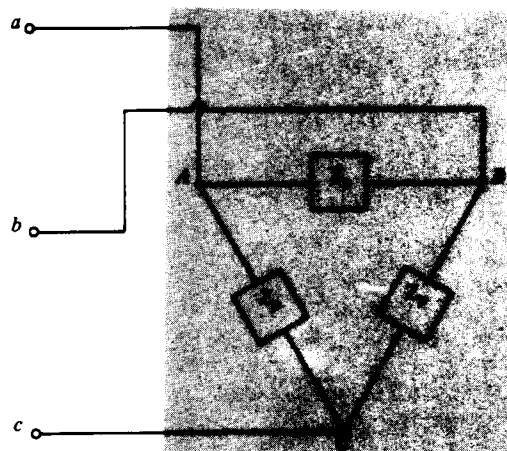
EXERCÍCIO 13.2.3

- 13.2.4 Se, no exercício 13.2.3,  $Z_1 = 4 + j3 \Omega$ ,  $Z_2 = 4 - j3 \Omega$  e a tensão de linha é  $V_L = 200\sqrt{3} \text{ V}$  (eficazes), calcule a corrente  $I_L$  em cada linha.  
 Resposta: 64 A (eficazes)

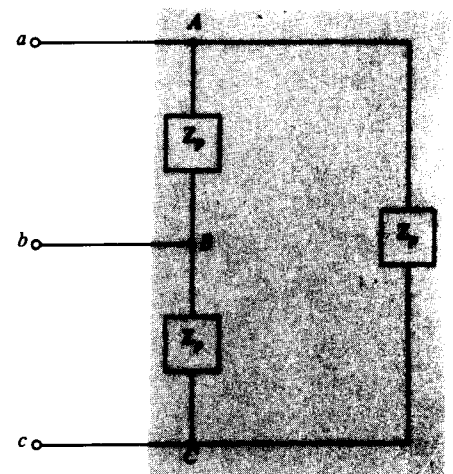
## 13.3

### A Conexão em Delta

Outro método de se conectar uma carga trifásica a uma linha é pela conexão em *delta* ou  $\Delta$ . (\*) Uma carga equilibrada conectada em  $\Delta$  (com impedâncias de fases iguais) está mostrada na Fig. 13.13 (a), de uma forma que lembra um  $\Delta$ , e, numa forma equivalente, na Fig. 13.13(b). Se a fonte é conectada em Y ou  $\Delta$ , então o sistema é um sistema Y- $\Delta$  ou um  $\Delta$ - $\Delta$ .



(a)



(b)

FIGURA 13.13 Duas versões de uma carga conectada em  $\Delta$

(\*) Nota do Tradutor: alguns autores usam o termo "triângulo" para esta conexão.

Uma vantagem de uma carga conectada em  $\Delta$  sobre uma carga conectada em  $Y$  é que cargas podem ser adicionadas ou removidas mais facilmente numa única fase do  $\Delta$ , pois as cargas são conectadas diretamente através das linhas. Isso pode não ser possível numa conexão em  $Y$ , pois o neutro pode não estar acessível. Também, para uma dada potência entregue à carga, as correntes de fase num  $\Delta$  são menores do que num  $Y$ . Por outro lado, as tensões de fase são maiores num sistema em  $\Delta$  do que num em  $Y$ . Fontes raramente são ligadas em  $\Delta$ , porque, se as tensões não são perfeitamente equilibradas, teremos uma tensão remanescente e, conseqüentemente, uma corrente circulando no delta. Isto, é claro, causa efeitos térmicos indesejáveis nos geradores. Também, as tensões de fase são mais baixas num gerador conectado em  $Y$ , e, neste caso, um nível de isolamento mais baixo pode ser adotado. Obviamente, sistemas com cargas conectadas em  $\Delta$  são sistemas trifásicos, pois não há ligação de neutro.

Da Fig. 13.13 vemos que, no caso de uma carga conectada em  $\Delta$ , as tensões de linha são iguais às tensões de fase. Portanto, se as tensões de linha são dadas por (13.11), como anteriormente, então as tensões de fase são

$$\mathbf{V}_{AB} = V_L / 30^\circ, \quad \mathbf{V}_{BC} = V_L / -90^\circ, \quad \mathbf{V}_{CA} = V_L / -210^\circ \quad (13.15)$$

onde

$$V_L = V_p \quad (13.16)$$

Se  $\mathbf{Z}_p = |Z_p| \angle \theta$ , então as correntes de fase são

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{AB} &= \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_p} = I_p / 30^\circ - \theta \\ \mathbf{I}_{BC} &= \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_p} = I_p / -90^\circ - \theta \\ \mathbf{I}_{CA} &= \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_p} = I_p / -210^\circ - \theta \end{aligned} \quad (13.17)$$

onde

$$I_p = \frac{V_L}{|Z_p|} \quad (13.18)$$

A corrente na linha  $aA$  é

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA}$$

que, após algumas simplificações, é

$$\mathbf{I}_{aA} = \sqrt{3} I_p / -\theta$$

As outras correntes de linha, obtidas de forma similar, são

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{bB} &= \sqrt{3} I_p / -120^\circ - \theta \\ \mathbf{I}_{cC} &= \sqrt{3} I_p / -240^\circ - \theta \end{aligned}$$

Evidentemente, a relação entre os módulos das correntes de linha e fase num caso em  $\Delta$  é

$$I_L = \sqrt{3} I_p \quad (13.19)$$

e as correntes de linha são, então

$$\mathbf{I}_{aA} = I_L / -\theta, \quad \mathbf{I}_{bB} = I_L / -120^\circ - \theta, \quad \mathbf{I}_{cC} = I_L / -240^\circ - \theta \quad (13.20)$$

Então, as correntes e as tensões são equilibradas, como esperado. As relações entre correntes de linha e fase para uma carga conectada em  $\Delta$  são sumarizadas no diagrama fasorial da Fig. 13.14.

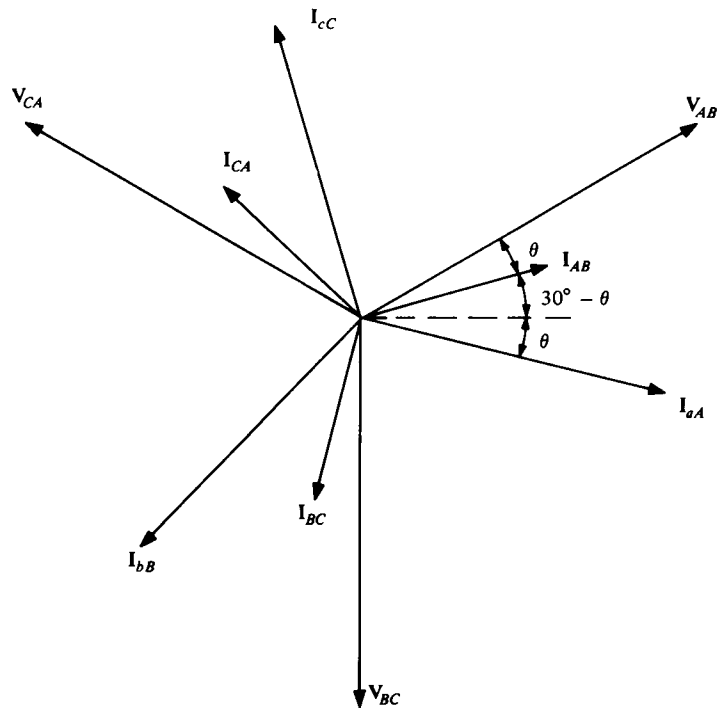


FIGURA 13.14 Diagrama fasorial de uma carga conectada em  $\Delta$

### EXEMPLO 13.5

Como um exemplo de um circuito trifásico com uma carga conectada em  $\Delta$ , vamos calcular a corrente de linha  $I_L$  da Fig. 13.13, dado que a tensão de linha é 250 V (eficazes) e a carga consome 1,5 kW, com fator de potência de 0,8 (atrasado). Por fase,  $P_p = 1500/3 = 500$  W, e, então

$$500 = 250I_p(0,8)$$

ou

$$I_p = 2,5 \text{ A eficaz}$$

Portanto, teremos

$$I_L = \sqrt{3} I_p = 4,33 \text{ A eficaz}$$

Finalmente, nesta seção, vamos deduzir a fórmula da potência entregue a uma carga trifásica equilibrada com um ângulo de fator de potência  $\theta$ . Independentemente da carga ser conectada em Y ou em  $\Delta$ , teremos

$$P = 3P_p = 3V_p I_p \cos \theta$$

No caso da conexão em Y,  $V_p = V_L/\sqrt{3}$  e  $I_p = I_L$ , e, no caso de conexão em  $\Delta$ ,  $V_p = V_L$  e  $I_p = I_L/\sqrt{3}$ . Nos dois casos, teremos então

$$P = 3 \frac{V_L I_L}{\sqrt{3}} \cos \theta$$

ou

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta \quad (13.21)$$

Como verificação no exemplo passado, (13.21) resulta

$$1500 = \sqrt{3}(250)I_L(0,8)$$

ou, como anteriormente,

$$I_L = 4,33 \text{ A eficaz}$$

## EXERCÍCIOS

- 13.3.1.** Resolva o Ex. 13.2.2 se a fonte e a carga se mantêm, porém com a carga conectada em  $\Delta$ . [Sugestão: note que nas equações (13.15), (13.17) e (13.20) é necessário subtrair  $30^\circ$  de cada ângulo.]  
*Resposta:*  $2\sqrt{3}/\angle -83.1^\circ$ ,  $2\sqrt{3}/\angle -203.1^\circ$ ,  $2\sqrt{3}/36.9^\circ$  A eficaz, 360 W
- 13.3.2.** Uma carga equilibrada conectada em  $\Delta$  tem  $Z_p = 4 + j3 \Omega$ , e a tensão de linha é  $V_L = 200$  V (eficazes) nos terminais da carga. Calcule a potência total entregue à carga.  
*Resposta:* 19,2 kW
- 13.3.3.** Uma carga equilibrada conectada em  $\Delta$  tem uma tensão de linha  $V_L = 100$  V (eficazes) em seus terminais e absorve uma potência total de 4,8 kW. Se o fator de potência da carga é 0,8 (adiantado), encontre a impedância da fase.  
*Resposta:*  $4 - j3 \Omega$

## 13.4

### Transformações Y – $\Delta$

Em muitas aplicações de sistemas de potência é importante haver a possibilidade de se converter uma carga conectada em Y em uma carga conectada em  $\Delta$  e vice-versa. Por exemplo, suponha que temos uma carga conectada em Y em paralelo com outra carga conectada em  $\Delta$ , como mostrado na Fig. 13.15, e queremos substituir esta combinação por uma carga trifásica equivalente. Se as duas cargas estivessem conectadas em  $\Delta$ , isto seria relativamente simples, pois as impedâncias de fase correspondentes estariam em paralelo. Também, como vimos no Ex. 13.2.3, se as duas cargas estão conectadas em Y e são equilibradas, as impedâncias de fase podem ser também associadas como impedâncias em paralelo.

Para se obter fórmulas de conversão Y para  $\Delta$  ou  $\Delta$  para Y, vamos considerar as conexões Y e  $\Delta$  da Fig. 13.16. Para efetuar uma transformação Y- $\Delta$ , precisamos expressões para  $Y_{ab}$ ,  $Y_{bc}$  e  $Y_{ca}$  do  $\Delta$  em termos de  $Y_a$ ,  $Y_b$  e  $Y_c$  do Y, de tal forma que a conexão em  $\Delta$  seja equivalente à conexão Y nos terminais A, B e C. Ou seja, se o Y é substituído por um  $\Delta$ , as mesmas tensões aparecerão nos nós  $V_A$ ,  $V_B$  e  $V_C$ , e circularão as mesmas correntes  $I_1$  e  $I_2$ . Reciprocamente, a transformação  $\Delta$ -Y é uma expressão dos parâmetros do Y em termos dos parâmetros do  $\Delta$ .

Começaremos por escrever as equações dos nós para os dois circuitos. Se o nó C for escolhido como referência, no caso de um circuito em Y, teremos

$$\begin{aligned} Y_a V_A - Y_a V_D &= I_1 \\ Y_b V_B - Y_b V_D &= I_2 \\ -Y_a V_A - Y_b V_B + (Y_a + Y_b + Y_c) V_D &= 0 \end{aligned}$$

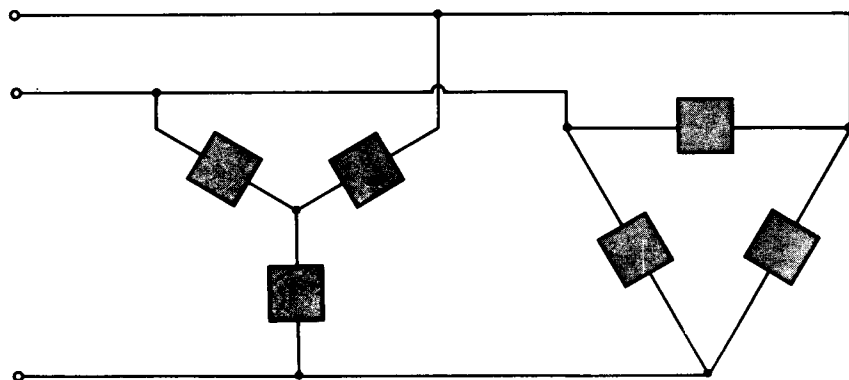


FIGURA 13.15 Cargas conectadas em Y e em  $\Delta$ , em paralelo

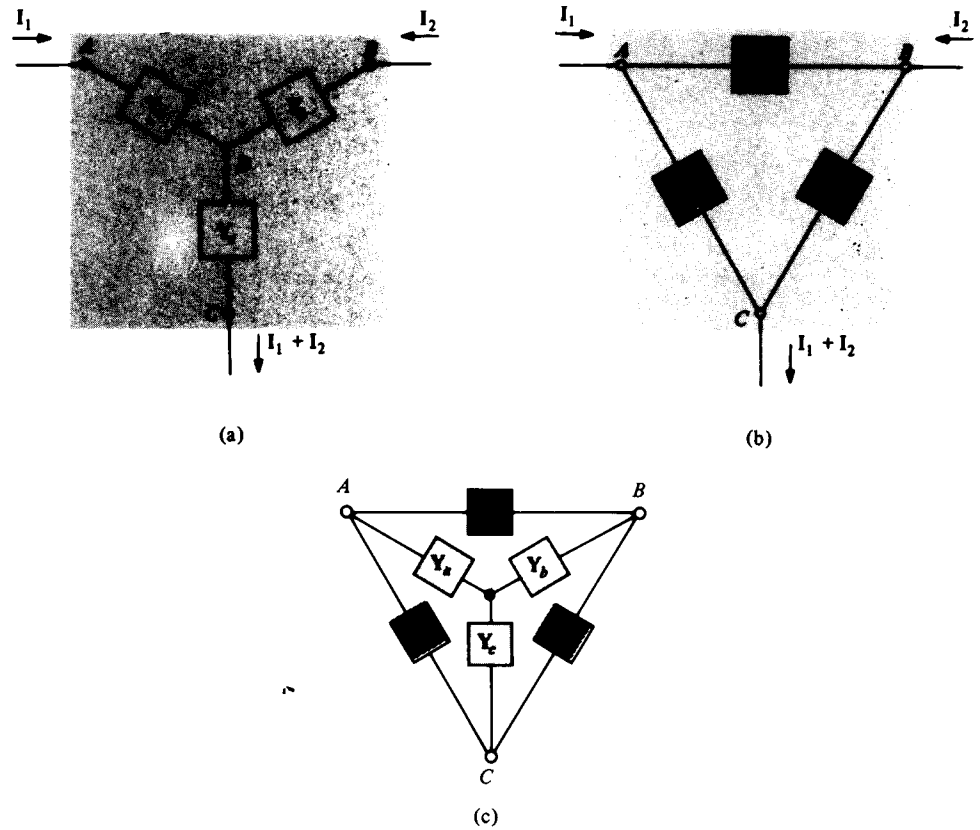


FIGURA 13.16 (a) conexão Y, (b) conexão  $\Delta$  e (c) as duas superpostas

Resolvendo para  $V_D$  na terceira equação e substituindo este valor nas duas primeiras equações, obteremos, após algumas simplificações

$$\begin{aligned} \left( \frac{Y_a Y_b + Y_a Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c} \right) V_A - \left( \frac{Y_a Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c} \right) V_B &= I_1 \\ - \left( \frac{Y_a Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c} \right) V_A + \left( \frac{Y_a Y_b + Y_b Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c} \right) V_B &= I_2 \end{aligned} \quad (13.22)$$

As equações dos nós para o circuito  $\Delta$  são

$$\begin{aligned} (Y_{ab} + Y_{ca})V_A - Y_{ab}V_B &= I_1 \\ -Y_{ab}V_A + (Y_{ab} + Y_{bc})V_B &= I_2 \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes dos termos semelhantes nestas equações e em (13.22) e resolvendo para as admitâncias do circuito  $\Delta$ , obteremos a transformação Y- $\Delta$

$$\begin{aligned} Y_{ab} &= \frac{Y_a Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c} \\ Y_{bc} &= \frac{Y_b Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c} \\ Y_{ca} &= \frac{Y_c Y_a}{Y_a + Y_b + Y_c} \end{aligned} \quad (13.23)$$

Se imaginarmos os circuitos Y e  $\Delta$  superpostos num único diagrama conforme mostrado na Fig. 13.16 (c), então  $Y_a$  e  $Y_b$  são adjacentes a  $Y_{ab}$ ,  $Y_b$  e  $Y_c$  são adjacentes a  $Y_{bc}$ , etc. Desta forma, podemos

dizer (13.23) em palavras, como segue:

A admitância de um ramo do  $\Delta$  é igual ao produto das admitâncias dos ramos adjacentes do Y, dividido pela soma das admitâncias do Y.

Para obter a transformação  $\Delta$ -Y, devemos solucionar (13.23) para as admitâncias do Y, uma tarefa complicada, ou podemos escrever dois conjuntos de equações de laço para os circuitos Y e  $\Delta$ . No último caso, teremos o dual do procedimento que levou a (13.23). Nos dois casos, conforme o leitor deve demonstrar no Prob. 13.28, a transformação  $\Delta$ -Y é

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{Z_{ab}Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \\ Z_b &= \frac{Z_{bc}Z_{ab}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \\ Z_c &= \frac{Z_{ca}Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \end{aligned} \quad (13.24)$$

onde as impedâncias são as recíprocas das admitâncias da Fig. 13.16. A regra é como segue:

A impedância de um ramo do Y é igual ao produto das impedâncias dos ramos adjacentes do  $\Delta$ , dividido pela soma das impedâncias do  $\Delta$ .

(Por *adjacente* queremos dizer “em cada lado de e terminando no mesmo nó de”. Por exemplo, no desenho de Y e  $\Delta$  superpostos,  $Z_a$  fica entre  $Z_{ab}$  e  $Z_{ca}$  e as três têm o terminal A em comum. Então  $Z_{ab}$  e  $Z_{ca}$  são ramos *adjacentes* de  $Z_a$ .)

### EXEMPLO 13.6

Como um exemplo, calculemos a impedância de entrada  $Z$  da Fig. 13.17 (a). Este é um problema que teria requerido que tivéssemos escrito anteriormente as equações de laço ou de nó, porque não podemos simplificar o circuito combinando impedâncias em série e/ou paralelo. Substituir os resistores de 6-, 3-, e 2- $\Omega$ , que formam um Y, por seu  $\Delta$  equivalente, como mostrado na Fig. 13.17 (b), contudo, nos possibilita resolver o problema facilmente.

Comparando as Fig. 13.17 (a) e 13.16 (a), vemos que  $Y_a = 1/6$ ,  $Y_b = 1/3$  e  $Y_c = 1/2$  S. Portanto, de (13.23), temos

$$Y_{ab} = \frac{\frac{1}{6}(\frac{1}{3})}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{18}$$

$$Y_{bc} = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{2})}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

$$Y_{ca} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{6})}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{12}$$

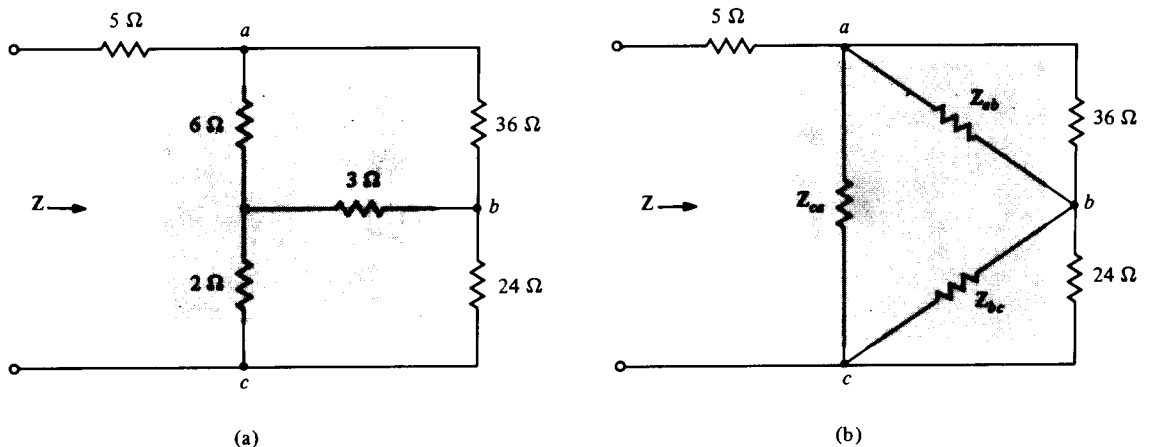


FIGURA 13.17 Dois circuitos equivalentes

Portanto, na Fig. 13.17 (b), temos

$$Z_{ab} = 18 \Omega, \quad Z_{bc} = 6 \Omega, \quad Z_{ca} = 12 \Omega$$

Então a Fig. 13.17 (b) pode ser simplificada combinando-se resistores em série e paralelo para obter-se

$$Z = 12 \Omega$$

### EXEMPLO 13.7

Como outro exemplo, suponha que temos uma carga equilibrada conectada em  $Y$ , com impedâncias de fase  $Z_y$ , e desejamos convertê-la numa carga equivalente conectada em  $\Delta$ . Pelas Eq. (13.23), como  $Y_a$ ,  $Y_b$  e  $Y_c$  são iguais a  $Y_y$ , o recíproco de  $Z_y$ , então a carga equivalente conectada em  $\Delta$  é também equilibrada, pois

$$Y_{ab} = Y_{bc} = Y_{ca} = \frac{Y_y^2}{3Y_y} = \frac{Y_y}{3}$$

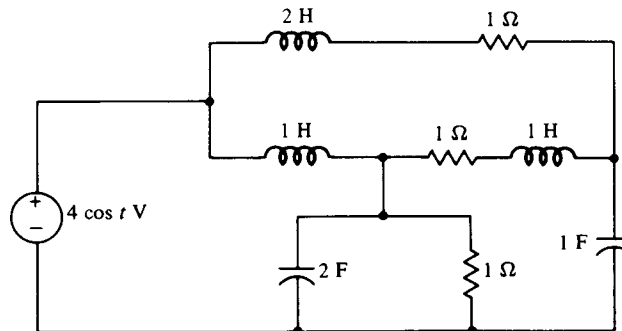
Assim, se  $Z_d$  é a impedância de fase da carga equilibrada equivalente conectada em  $\Delta$ , então

$$Z_d = 3Z_y \quad (13.25)$$

que pode ser usada para converter de  $Y$  para  $\Delta$  e vice-versa.

## EXERCÍCIOS

- 13.4.1** Calcule a impedância de entrada vista pela fonte usando uma transformação  $Y-\Delta$  ou  $\Delta-Y$  para simplificar o circuito. A partir deste resultado, calcule a potência média entregue pela fonte.  
Resposta:  $(1 + j2)/5 \Omega$ , 8 W



EXERCÍCIO 13.4.1

- 13.4.2.** Uma fonte trifásica equilibrada com  $V_L = 100$  V (eficazes) entrega potência a uma carga equilibrada conectada em  $Y$  com impedâncias de fase  $Z_1 = 8 + j6 \Omega$  em paralelo com uma carga equilibrada conectada em  $\Delta$  com impedâncias de fase  $Z_2 = 12 + j9 \Omega$ . Calcule a potência entregue pela fonte.  
Resposta: 2,4 kW
- 13.4.3** Demonstre que a transformação  $Y-\Delta$  de (13.23) é equivalente a

$$Z_{ab} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_c}$$

$$Z_{bc} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_a}$$

$$Z_{ca} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_b}$$

ou em palavras,

A impedância de um ramo de um  $\Delta$  é igual à soma dos produtos das impedâncias do  $Y$ , tomadas duas a duas, divididas pela impedância do ramo oposto do  $Y$ .



- 13.4.4 Se as linhas do Ex. 13.3.2 têm, cada uma, resistência de  $0,1 \Omega$ , calcule a potência dissipada nas linhas.  
Resposta: 1,44 KW

## 13.5

### Medida da Potência

Parece ser uma tarefa simples medir-se a potência entregue a uma carga trifásica usando-se um wattímetro para cada uma das três fases. Isso é ilustrado na carga trifásica conectada em Y da Fig. 13.18. Cada wattímetro tem sua bobina de corrente em série com uma fase da carga e sua bobina de tensão em paralelo com cada fase da carga. A ligação está teoricamente correta, mas pode ser sem utilidade na prática porque o ponto neutro  $N$  pode estar inacessível (como, por exemplo, no caso de uma carga conectada em  $\Delta$ ). Seria melhor, geralmente, ser capaz de fazer a medida utilizando apenas as linhas  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Nesta seção mostraremos que isso é, realmente, possível e que, além disso, somente dois wattímetros serão necessários, em lugar de três. O método é geral e aplicável a sistemas desequilibrados, assim como a sistemas equilibrados.

Consideremos a carga trifásica conectada em Y da Fig. 13.19, que tem três wattímetros conectados de forma a que cada um tem sua bobina de corrente em uma linha e sua bobina de tensão entre aquela linha e o ponto comum  $x$ . Se  $T$  é o período da tensão da fonte e  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$  são as correntes de linha no domínio do tempo, direcionadas para as cargas, então a potência total  $P_x$  indicada pelos três medidores é

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{ax}i_a + v_{bx}i_b + v_{cx}i_c) dt \quad (13.26)$$

Independentemente do ponto  $x$ , que é completamente arbitrário, teremos

$$v_{ax} = v_{aN} + v_{Nx}$$

$$v_{bx} = v_{bN} + v_{Nx}$$

$$v_{cx} = v_{cN} + v_{Nx}$$

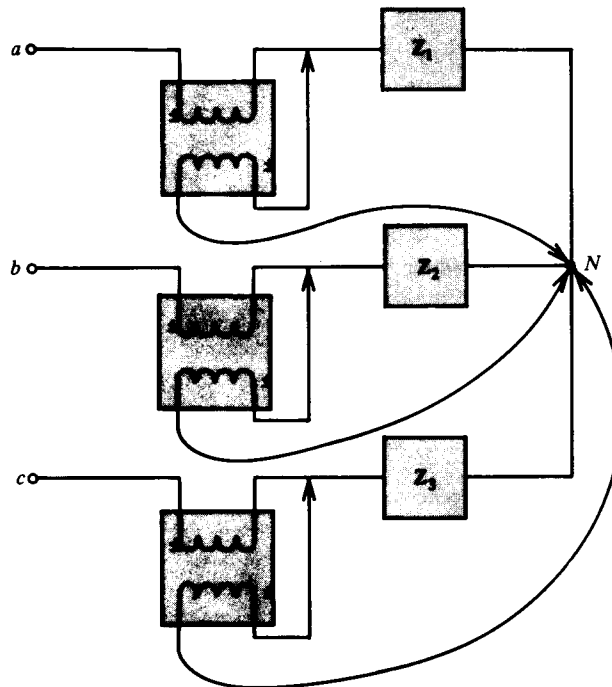


FIGURA 13.18 Medida da potência com três wattímetros

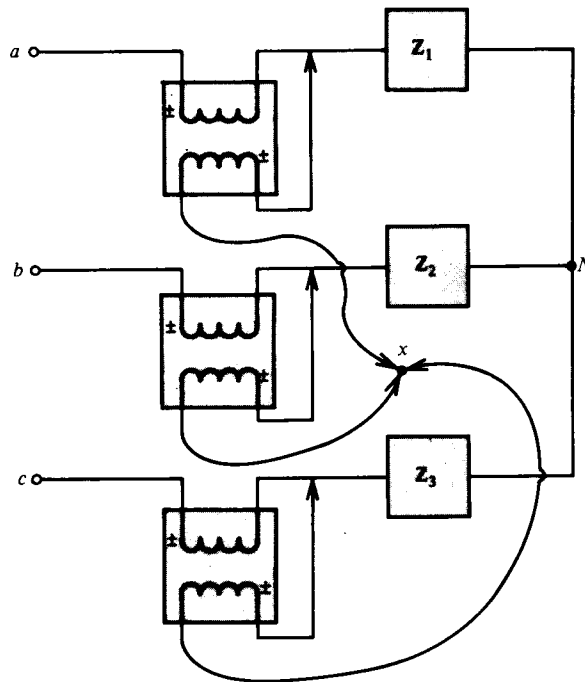


FIGURA 13.19 Três wattímetros conectados a um ponto comum

Substituindo-se estes resultados em (13.26) e rearranjando, obtemos

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{aN}i_a + v_{bN}i_b + v_{cN}i_c) dt + \frac{1}{T} \int_0^T v_{Nx}(i_a + i_b + i_c) dt$$

Pela LKC, temos

$$i_a + i_b + i_c = 0$$

de modo que

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{aN}i_a + v_{bN}i_b + v_{cN}i_c) dt \quad (13.27)$$

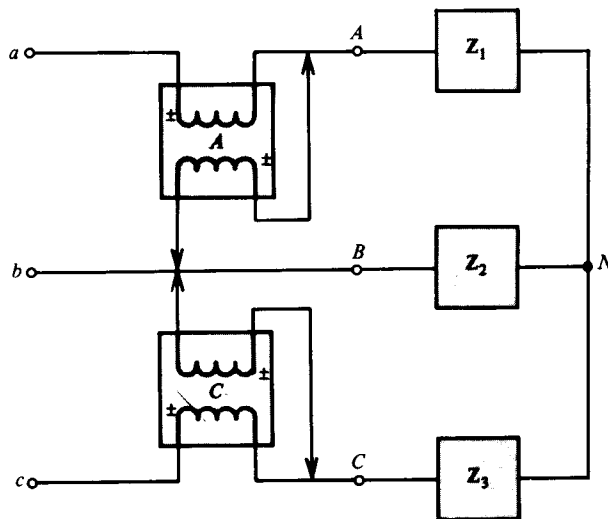


FIGURA 13.20 Dois wattímetros indicando a potência total da carga

Desta forma, a soma das leituras dos três wattímetros é exatamente a potência média total entregue à carga trifásica, pois os três termos no integrando de (13.27) são as potências instantâneas das fases.

Visto que o ponto  $x$  na Fig. 13.19 é arbitrário, podemos colocá-lo numa das linhas. Então o medidor cuja bobina de corrente está nesta linha indicará zero, porque a tensão na sua bobina de potencial é zero. Portanto, a potência total entregue à carga é medida pelos outros dois aparelhos, e o medidor indicando zero é desnecessário. Por exemplo, o ponto  $x$  é colocado na linha  $b$  da Fig. 13.20, e a potência total entregue à carga é

$$P = P_A + P_C$$

onde  $P_A$  e  $P_C$  são as leituras dos medidores  $A$  e  $C$ . É importante notar-se que um ou outro dos wattímetros pode indicar uma leitura negativa, e, neste caso, a soma das duas leituras é a soma *algebraica*.

A demonstração do método dos dois wattímetros para medir-se a potência trifásica total foi feita para uma carga conectada em  $Y$ . Porém, o método pode ser empregado igualmente para uma carga conectada em  $\Delta$ , como o leitor será solicitado a demonstrar no Prob. 13.30.

### EXEMPLO 13.8

Como um exemplo, na Fig. 13.20, consideremos as tensões de linha como equilibradas e em seqüência  $abc$ , com

$$V_{ab} = 100\sqrt{3}/0^\circ \text{ V eficaz}$$

e impedâncias de fase dadas por

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = 10 + j10 \Omega$$

Teremos então

$$V_{cb} = -V_{bc} = -100\sqrt{3}/-120^\circ = 100\sqrt{3}/60^\circ \text{ V eficaz}$$

$$I_{aA} = \frac{V_{AN}}{Z_1} = \frac{(100\sqrt{3}/\sqrt{3})/-30^\circ}{10\sqrt{2}/45^\circ} = 5\sqrt{2}/-75^\circ \text{ A eficaz}$$

$$I_{cC} = 5\sqrt{2}/-315^\circ \text{ A eficaz}$$

As leituras do medidor são então

$$\begin{aligned} P_A &= |V_{ab}| |I_{aA}| \cos(\text{ang } V_{ab} - \text{ang } I_{aA}) \\ &= (100\sqrt{3})(5\sqrt{2}) \cos(0^\circ + 75^\circ) \\ &= 317 \text{ W} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P_C &= |V_{cb}| |I_{cC}| \cos(\text{ang } V_{cb} - \text{ang } I_{cC}) \\ &= (100\sqrt{3})(5\sqrt{2}) \cos(60^\circ + 315^\circ) \\ &= 1183 \text{ W} \end{aligned}$$

com um total de

$$P = 1500 \text{ W}$$

Como verificação, a potência entregue à fase  $A$  é

$$\begin{aligned} P_p &= |V_{AN}| |I_{aA}| \cos(\text{ang } V_{AN} - \text{ang } I_{aA}) \\ &= \left(\frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)(5\sqrt{2}) \cos(-30^\circ + 75^\circ) \\ &= 500 \text{ W} \end{aligned}$$

Como o sistema é equilibrado, a potência total é

$$P = 3P_p = 1500 \text{ W}$$

que confirma o resultado anterior.

## EXERCÍCIOS

- 13.5.1** Na Fig. 13.18, com  $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 20/30^\circ \Omega$ , e considerando as tensões de linha como um conjunto equilibrado de seqüência  $abc$ , com  $V_{ab} = 100/0^\circ \text{ V}$  (eficazes). Calcule a leitura de cada medidor.  
Resposta:  $250/\sqrt{3} \text{ W}$
- 13.5.2** Se a potência entregue à carga do Ex. 13.5.1 for medida pelos dois wattímetros  $A$  e  $C$  ligados como mostrado na Fig. 13.20, calcule a leitura dos wattímetros. Verifique a consistência com a resposta do Ex. 13.5.1.  
Resposta:  $250/\sqrt{3}; 500/\sqrt{3} \text{ W}$
- 13.5.3** Calcule as leituras dos wattímetros  $P_A$  e  $P_C$  e a potência total  $P$  da Fig. 13.20 se as tensões de linha forem como dado no Ex. 13.5.1 e  $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 10/75^\circ \Omega$ . Confirme a resposta usando  $P = 3 P_p$ .  
Resposta:  $-149,4; 408,2; 258,8 \text{ W}$

## 13.6

### Análise de Circuitos Trifásicos com Spice

A análise de circuitos trifásicos apresentada anteriormente foi limitada a sistemas equilibrados cuja solução pode ser expressa em termos de uma única fase. O uso do SPICE é simples, para circuitos equilibrados ou desequilibrados, quando aplicado ao circuito completo. Todos os princípios necessários ao uso de SPICE foram apresentados nos capítulos anteriores.

#### EXEMPLO 13.9

Como primeiro exemplo, vamos calcular a tensão de linha e as correntes de fase na carga para a fase  $A$  do sistema  $Y$ - $Y$  equilibrado da Fig. 13.21. A linha de transmissão usada para ligar o gerador com a carga tem perdas que são representadas por resistores de  $2\text{-ohm}$ . O arquivo para este circuito é

SISTEMA TRIFÁSICO Y-Y COM PERDAS NA LINHA DE TRANSMISSÃO  
\* TENSÕES EXPRESSAS EM VALORES EFICAZES

```

VAN 1 0 AC 120 0
VBN 2 0 AC 120 -120
VCN 3 0 AC 120 120
RLOSSA 1 4 2
RLOSSB 2 5 2
RLOSSC 3 6 2
RLOSSN 10 0 2
RA 4 7 10
LA 7 10 0.1
RB 5 8 10
LB 8 10 0.1
RC 6 9 10
LC 9 10 0.1
    
```

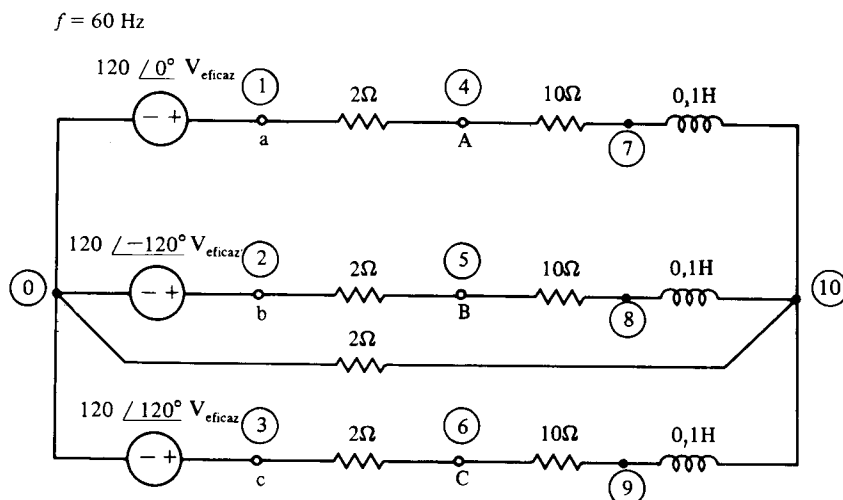


FIGURA 13.21 Sistema Y-Y equilibrado para análise pelo SPICE

```

* DECLARAÇÃO DE CONTROLE DA SOLUÇÃO PARA f = 60 Hz
.AC LIN 1 60 60
* DECLARAÇÃO DE CONTROLE DA SAÍDA
.PRINT AC VM(4,5) VP(4,5) IM(VAN) IP(VAN)
.END

```

A saída do computador mostra

FREQ	VM(4,5)	VP(4,5)	IM(VAN)	IP(VAN)
6.000E+01	2.049E+02	3.280E+01	3.033E+00	1.077E+02

### EXEMPLO 13.10

Como segundo exemplo, calculemos a tensão de linha e a corrente de linha para o sistema desequilibrado Y- $\Delta$  da Fig. 13.22. As perdas da linha de transmissão são representadas por resistores de 1-, 2- e 3- ohm, respectivamente. O arquivo para este circuito é

```

SISTEMA TRIFÁSICO Y- $\Delta$  DESEQUILIBRADO COM PERDAS NA L.T.
* DECLARAÇÃO DE DADOS DE TENSÕES EM VALORES EFICAZES

```

```

VAN 1 0 AC 120 0
VBN 2 0 AC 120 -120
VCN 3 0 AC 120 120
RLOSSA 1 4 1
RLOSSB 2 5 2
RLOSSC 3 6 3
RAB 4 5 12
RBC 5 7 8
CBC 6 7 1000UF
RAC 4 8 10
LAC 6 8 0.05

```

```

* DECLARAÇÃO DE CONTROLE DA SAÍDA PARA f = 400 Hz
.AC LIN 1 400 400
* DECLARAÇÃO DE CONTROLE DA SAÍDA
.PRINT AC VM(4,5) VP(4,5) IM(VAN) IP(VAN)
.END

```

A saída do computador contém

FREQ	VM(4,5)	VP(4,5)	IM(VAN)	IP(VAN)
4.000E+02	1.601E+02	2.219E+01	1.255E+01	-1.627E+02

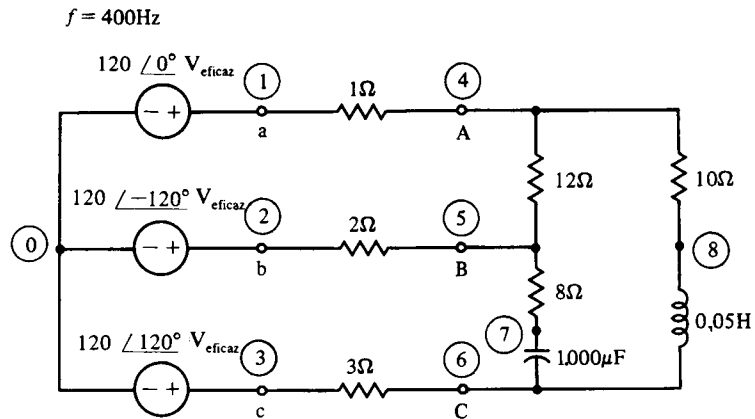


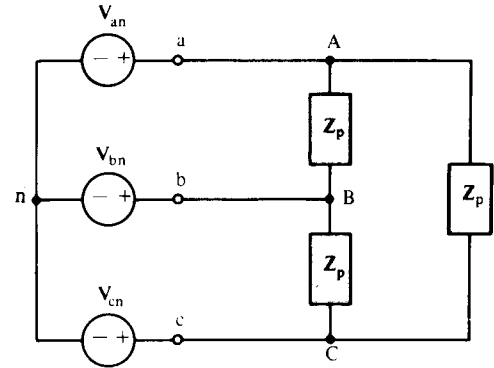
FIGURA 13.22 Sistema desequilibrado Y- $\Delta$

## EXERCÍCIOS

- 13.6.1** Calcule a tensão de linha e a corrente de fase da carga da fase A do sistema da Fig. 13.21, se a carga da fase C é curto-circuitada (chamado uma falta de fase).  
*Resposta:* 204,9/32,8° V; 4,07/90,54° A
- 13.6.2** Repita o Ex. 13.6, se a linha de neutro de 2-ohm entre os nós 0 e 10 for retirada.  
*Resposta:* 204,9/32,8° V; 5,33/82,41° A

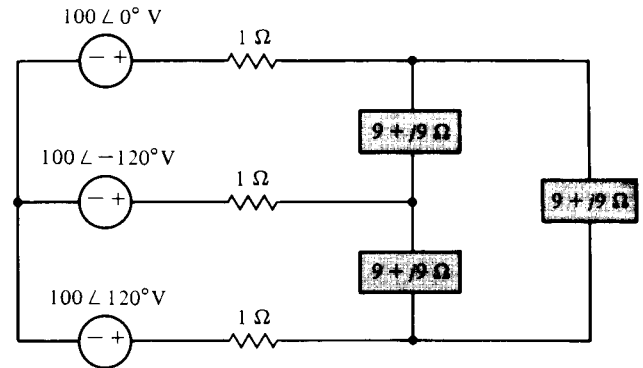
## PROBLEMAS

- 13.1 Se, na Fig. 13.4,  $V_{an} = V_{nb} = 100/0^\circ$  V (eficazes), a impedância entre os terminais  $A-N$  é  $10/60^\circ \Omega$ , e a entre os terminais  $N-B$  é  $10/-60^\circ \Omega$ , calcule a corrente de neutro  $I_{nN}$ .
- 13.2 Na Fig. 13.5, façamos  $V_1 = 100/0^\circ$  V (eficazes),  $Z_1 = 5 + j5 \Omega$ ,  $Z_2 = 0,5 \Omega$ ,  $Z_3 = 1 \Omega$  e  $Z_4 = 10 - j5 \Omega$ . Calcule a potência média absorvida pelas cargas, dissipada nas linhas e entregue pelas fontes.
- 13.3 Um sistema trifásico equilibrado Y-Y, seqüência positiva, tem  $V_{ab} = 200/0^\circ$  V (eficazes) e frequência 200 rad/s. Se a carga em cada fase é uma conexão série de um resistor de 40- $\Omega$ , um indutor de 0,1-H e um capacitor de 100- $\mu$ F, calcule as correntes de linha e a potência entregue à carga.
- 13.4 Na Fig. 13.10 uma fonte equilibrada de seqüência positiva tem  $V_{ab} = 120/0^\circ$  V (eficazes) e  $I_{aA} = 10/-60^\circ$  A (eficazes). Calcule  $Z_p$  e a potência entregue à carga trifásica.
- 13.5 Uma carga trifásica equilibrada conectada em Y consome 1,2 kW com fator de potência 0,6 adiantado. Se as tensões de linha são um conjunto equilibrado com 200-V (eficazes), calcule a corrente de linha  $I_L$ .
- 13.6 Um sistema equilibrado Y-Y com  $Z_p = 3\sqrt{3}/30^\circ \Omega$  entrega 9,6 kW à carga. Calcule a tensão de linha  $V_L$  e a corrente de linha  $I_L$ .
- 13.7 Na Fig. 13.10, a fonte é equilibrada, com seqüência de fase positiva, e  $V_{an} = 100/0^\circ$  V (eficazes). Calcule  $Z_p$ , se a fonte entrega 3,6 kW com fator de potência 0,6 adiantado.
- 13.8 Um sistema equilibrado em Y-Y, trifásico e de seqüência de fases positiva, tem  $V_{an} = 200/0^\circ$  V (eficazes) e  $Z_p = 3 + j4 \Omega$ . As linhas têm uma resistência de 1  $\Omega$  cada uma. Calcule a corrente de linha  $I_L$ , a potência entregue à carga e a potência dissipada nas linhas.
- 13.9 Uma fonte equilibrada conectada em Y, com  $V_{an} = 200/0^\circ$  V (eficazes), de seqüência positiva, é conectada por meio de quatro condutores perfeitos (com impedância igual a zero) a uma carga desbalanceada, conectada em Y,  $Z_{AN} = 8 + j6 \Omega$ ,  $Z_{BN} = j20 \Omega$  e  $Z_{CN} = 10 \Omega$ . Calcule a corrente de neutro.
- 13.10 Se o fio neutro for removido do sistema do Prob. 13.9, calcule as correntes de linha.
- 13.11 Uma fonte equilibrada conectada em Y, com  $V_{an} = 240/0^\circ$  V (eficazes), de seqüência positiva, é conectada por quatro condutores perfeitos a uma carga desbalanceada conectada em Y,  $Z_{AN} = 10 \Omega$ ,  $Z_{BN} = 10 - j5 \Omega$  e  $Z_{CN} = j20 \Omega$ . Calcule as quatro correntes de linha.
- 13.12 Se o fio neutro for removido do sistema do Prob. 13.11, calcule as correntes de linha.
- 13.13 Se, no Ex. 13.2.3,  $Z_1 = 3 - j4 \Omega$ ,  $Z_2 = 3 + j4 \Omega$  e a tensão de linha é  $V_L = 100\sqrt{3}$  V (eficazes), calcule a corrente  $I_L$  em cada linha.
- 13.14 Uma carga trifásica equilibrada conectada em Y consome 3 kW, com fator de potência 0,8 atrasado. Um Y equilibrado de capacitores é colocado em paralelo com a carga, de forma que o fator de potência equivalente é 0,85, atrasado. Se a frequência é 60 Hz e as tensões de linha são um conjunto equilibrado com 200-V (eficazes), calcule as capacitâncias necessárias.
- 13.15 Na Fig. 13.13, a fonte é equilibrada, com seqüência de fases positiva, e  $V_{an} = 100/0^\circ$  V (eficazes). Se a impedância de fase é  $3\sqrt{3}/30^\circ \Omega$ , calcule a corrente de linha e a potência entregue à carga.
- 13.16 Na Fig. 13.13, o sistema de seqüência positiva tem  $V_{an} = 200/0^\circ$  V (eficazes). Calcule  $Z_p$ , se a fonte entrega 2,4 kW, com fator de potência 0,8 atrasado.
- 13.17 No sistema Y- $\Delta$  mostrado na figura, a fonte é de seqüência positiva com  $V_{an} = 100/0^\circ$  V (eficazes) e a impedância de fase é  $Z_p = 3 - j4 \Omega$ . Calcule a tensão de linha  $V_L$ , a corrente de linha  $I_L$  e a potência entregue à carga.
- 13.18 Para o sistema Y- $\Delta$  do Prob. 13.17,  $Z_p = 4 + j3 \Omega$  e a potência entregue à carga é 19,2 kW. Calcule a corrente de linha  $I_L$  e as tensões de fase da fonte, se  $V_{an}$  for tomada como referência.
- 13.19 No sistema Y- $\Delta$  equilibrado, a carga consome 3 kW, com fator de potência 0,8 atrasado. Capacitores são conectados a cada fase da carga, para aumentar seu fator de potência para 0,9 atrasado. Calcule o valor de capacitância necessário, com uma frequência de 60 Hz e tensões de linha de 200 V (eficazes).



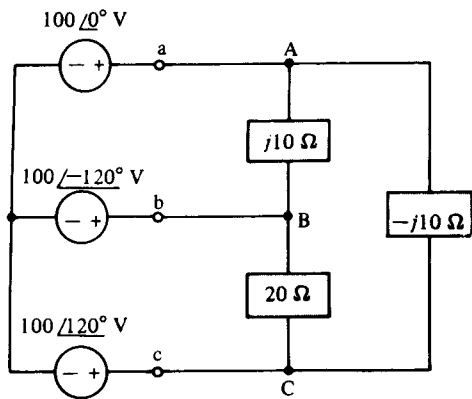
PROBLEMA 13.17

- 13.20 No sistema Y- $\Delta$  do Prob. 13.17, a tensão da fonte,  $V_{an} = 100/0^\circ$  V (eficazes) e  $Z_p = 10/60^\circ \Omega$ . Calcule a tensão de linha, a corrente de linha, os módulos da corrente da carga e a potência entregue à carga.



PROBLEMA 13.21

- 13.21 Calcule a corrente de linha  $I_L$ .
- 13.22 Calcule a potência entregue à carga do Prob. 13.21, se o módulo das tensões da fonte é 120 V (eficazes) e  $Z_p = 6 + j9 \Omega$ .
- 13.23 Uma fonte trifásica equilibrada, de seqüência positiva, com  $V_{ab} = 200/0^\circ$  V (eficazes), está alimentando uma carga conectada em  $\Delta$ ,  $Z_{AB} = 20 \Omega$ ,  $Z_{BC} = 20/60^\circ \Omega$  e  $Z_{CA} = 50/30^\circ \Omega$ . Calcule os fatores das correntes de linha. (Assuma condutores perfeitos, nas linhas.)
- 13.24 Uma fonte trifásica equilibrada, de seqüência positiva, com  $V_{ab} = 200/0^\circ$  V (eficazes) está alimentando uma carga conectada em  $\Delta$ ,  $Z_{AB} = 50 \Omega$ ,  $Z_{BC} = 20 + j20 \Omega$  e  $Z_{CA} = 30 - j40 \Omega$ . Calcule as correntes de linha.
- 13.25 Uma fonte trifásica equilibrada, de seqüência positiva, com  $V_{ab} = 240/0^\circ$  V (eficazes) está alimentando uma combinação em paralelo de uma carga conectada em Y com uma outra carga em  $\Delta$ . Se as cargas Y e  $\Delta$  são equilibradas com impedâncias de fase de  $8 - j8 \Omega$  e  $24 + j24 \Omega$ , respectivamente, calcule a corrente de linha  $I_L$  e a potência fornecida pela fonte, supondo que as linhas são condutores perfeitos.
- 13.26 Uma fonte trifásica equilibrada, de seqüência positiva, com  $V_{ab} = 240/0^\circ$  V (eficazes) entrega 43,2 kW, com fator de potência unitário, a uma combinação em paralelo de uma carga conectada em Y com impedâncias de fase  $4 + j4 \Omega$  e uma carga equilibrada conectada em  $\Delta$ . Determine as impedâncias de fase da carga conectada em  $\Delta$ .
- 13.27 Calcule as correntes de linha  $I_{aA}$ ,  $I_{bB}$  e  $I_{cC}$ .
- 13.28 Demonstre (13.24).
- 13.29 Para um sistema trifásico equilibrado, se as tensões de fase são.



PROBLEMA 13.27

$$v_a(t) = V_m \cos \omega t$$

$$v_b(t) = V_m \cos (\omega t - 120^\circ)$$

$$v_c(t) = V_m \cos (\omega t - 240^\circ)$$

então as correntes de fase são

$$i_a(t) = I_m \cos (\omega t - \theta)$$

$$i_b(t) = I_m \cos (\omega t - \theta - 120^\circ)$$

$$i_c(t) = I_m \cos (\omega t - \theta - 240^\circ)$$

Mostre que a potência total instantânea

$$p(t) = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c$$

é uma constante dada por

$$p(t) = \frac{3}{2} V_m I_m \cos \theta$$

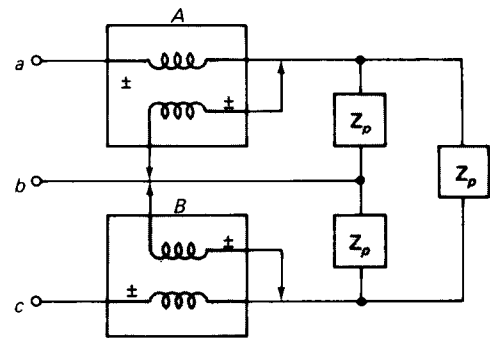
que é também  $P$ , a potência média total. [Sugestão: lembre-se que  $\cos \alpha + \cos (\alpha - 120^\circ) + \cos (\alpha - 240^\circ) = 0$ .]

- 13.30 Mostre que  $P_x$ , dado por (13.26), é igual à potência média total entregue a uma carga conectada em  $\Delta$ .
- 13.31 No sistema da Fig. 13.20, as tensões de linha são um conjunto equilibrado, de seqüência positiva, com  $V_{ab} = 200\angle 0^\circ$  V (eficazes) e  $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 10\angle 30^\circ \Omega$ . Calcule a potência entregue à carga (a) por meio das leituras dos dois wattímetros e (b) por  $P = 3 P_p$ .
- 13.32 Repita o Prob. 13.31, se  $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 10\angle 60^\circ \Omega$ . Note que, neste caso, o wattímetro C lê a potência total, pois o wattímetro A lê zero.
- 13.33 Mostre que, na Fig. 13.20, se  $V_{ab} = V_L \angle \alpha$ ,  $V_{bc} = V_L \angle \alpha - 120^\circ$ ,  $V_{ca} = V_L \angle \alpha - 240^\circ$  V (eficazes), e  $Z_1 = Z_2 = Z_3 = |Z_p| \angle \theta$ , então o wattímetro A lê zero e o wattímetro C lê a potência média entregue à carga,

$$P = \frac{V_L^2}{2|Z_p|}$$

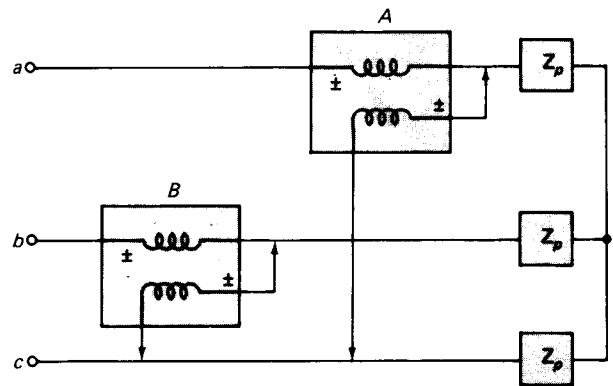
Esta é uma generalização do resultado do Prob. 13.32.

- 13.34 Calcule as leituras  $P_A$  e  $P_B$  dos wattímetros e a potência total entregue à carga se a fonte é equilibrada, conectada em Y, seqüência abc, com  $V_{an} = 100\angle 0^\circ$  V (eficazes), e as impedâncias de fase são  $Z_p = 30\angle 30^\circ \Omega$ , cada.



PROBLEMA 13.34

- 13.35 Para o sistema mostrado abaixo, as tensões de linha são um conjunto equilibrado de seqüência positiva com  $V_{ab} = 300\angle 0^\circ$  V (eficazes). Calcule as leituras dos medidores  $P_A$  e  $P_B$  e a potência total entregue à carga, se  $Z_p = 10\angle 30^\circ \Omega$ .



PROBLEMA 13.35

- 13.36 Mostre que, se uma fonte equilibrada, de seqüência positiva, é conectada por meio de três fios perfeitamente condutores a uma carga equilibrada tendo impedâncias de fase  $Z_p = |Z_p| \angle \theta$ , então os dois wattímetros, conectados como mostrado na Fig. 13.20, lerão, respectivamente,  $P_A$  e  $P_C$ , onde

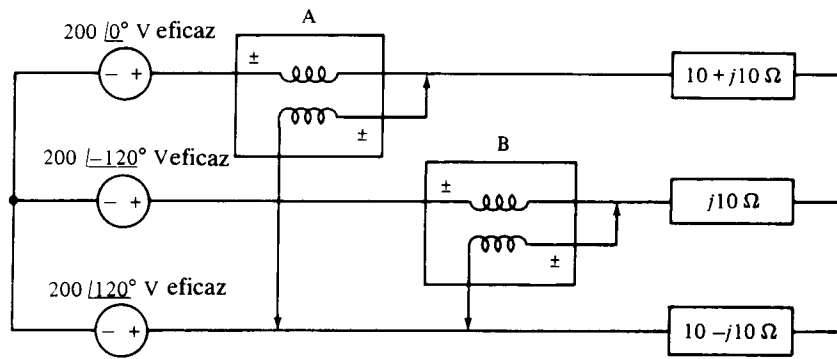
$$\frac{P_A}{P_C} = \frac{\cos (30^\circ + \theta)}{\cos (30^\circ - \theta)}$$

A partir deste resultado, mostre que

$$\tan \theta = \sqrt{3} \frac{P_C - P_A}{P_C + P_A}$$

Então, podemos encontrar o fator de potência da carga,  $\cos \theta$ , a partir das leituras dos dois wattímetros.

- 13.37 No Prob. 13.36, calcule o fator de potência da carga, se (a)  $P_A = P_C$ ; (b)  $P_A = -P_C$ ; (c)  $P_A = 0$ ; (d)  $P_C = 0$  e (e)  $P_A = 2P_C$ .
- 13.38 Encontre as leituras dos wattímetros, conectados como no Prob. 13.34, para o sistema do Prob. 13.23.
- 13.39 Repita o Prob. 13.38 para o sistema do Prob. 13.27.
- 13.40 Encontre as leituras dos wattímetros



PROBLEMA 13.40

## PROBLEMAS DE APLICAÇÃO DE COMPUTADOR

- 13.41** Use SPICE para resolver o sistema do Prob. 13.24 para a frequência de 60 Hz.
- 13.42** Use SPICE para calcular a corrente na fase A da fonte se a tensão na fase C é zero (falta de gerador na fase C), no sistema Y-Y da Fig. 13.21.
- 13.43** Use SPICE para calcular a corrente na carga de 12 ohm da Fig. 13.22, se a carga entre as fases B e C (8 ohm e 1000  $\mu$ F) é curto-circuitada.
- 13.44** Repita o Prob. 13.42 para o sistema da Fig. 13.22.





1857-1894

---

*Não foi um mau desempenho! [Em suas verificações das teorias de Maxwell]*  
Heinrich Hertz

---

## Freqüência Complexa e Funções de Rede

O caminho para o desenvolvimento do rádio, da televisão e do radar foi aberto pelo físico alemão Heinrich Rudolf Hertz, com sua descoberta, em 1886-1888, das ondas eletromagnéticas. Seu trabalho confirmou a teoria de 1864 do grande físico britânico James Clerk Maxwell de que tais ondas existiam.

Hertz nasceu em Hamburgo, sendo o mais velho de cinco filhos, numa proeminente e próspera família. Após sua graduação numa escola secundária, passou um ano numa firma de engenharia em Frankfurt, um ano no serviço militar voluntário em Berlim e, então, um ano na Universidade de Munique. Finalmente, matriculou-se na Universidade de Berlim, como aluno do grande físico Hermann von Helmholtz. Mais tarde, Hertz recebeu seu doutorado e tornou-se professor em Karlsruhe, onde começou sua pesquisa com ondas eletromagnéticas. Foi lá que conheceu Elizabeth Doll, filha de um de seus professores, e, após um namoro de 3 meses, casaram-se. Poucos anos após sua famosa descoberta, Hertz faleceu de uma doença nos ossos, na passagem do ano de 1894, com apenas 37 anos de idade. Suas descobertas precederam a moderna era da comunicação e, em sua honra, a unidade de freqüência (ciclos por segundo) foi chamada de *hertz*. ■

Nos capítulos anteriores, tratamos da análise de circuitos resistivos, resposta natural e forçada de circuitos contendo elementos armazenadores de energia e, em particular, análise de regime permanente ca. As excitações consideradas foram, na maioria dos casos, constantes, exponenciais e senóides. Neste capítulo, consideraremos uma excitação, a senóide amortecida, que contém todas estas excitações como casos particulares. A partir desta função, derivaremos fasores genéricos e funções de rede gerais que incluem, como casos especiais, os fasores e impedâncias dos Capítulos 10-13.

As funções de redes serão expressas em termos de uma frequência complexa que inclui a frequência  $j\omega$  como um caso particular. Os conceitos de frequência complexa e funções de rede nos possibilitarão combinar todos os nossos resultados anteriores em um procedimento único. Tanto a resposta natural como a resposta forçada de um circuito podem ser calculadas a partir das suas excitações e suas funções de rede, como veremos. Além disso, a função de rede pode ser empregada para calcular as propriedades do circuito no domínio da frequência, que será o objeto do Capítulo 15.

## 14.1

### A Senóide Amortecida

Nesta seção, estudaremos a *senóide amortecida*

$$v = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi) \quad (14.1)$$

que é uma senóide, como a dos capítulos anteriores, multiplicada por um fator de amortecimento  $e^{\sigma t}$ . A constante  $\sigma$  (a letra grega sigma) é real e é normalmente negativa ou zero, o que explica o termo *fator de amortecimento*.

A senóide amortecida contém, como casos particulares, a maioria das funções já consideradas por nós. Por exemplo, se  $\sigma = 0$ , teremos a senóide pura

$$v = V_m \cos(\omega t + \phi) \quad (14.2)$$

dos capítulos anteriores. Se  $\omega = 0$ , teremos a função exponencial

$$v = V_0 e^{\sigma t} \quad (14.3)$$

e, se  $\sigma = \omega = 0$ , teremos o caso constante (corrente contínua)

$$v = V_0 \quad (14.4)$$

onde, tanto em (14.3) como em (14.4),  $V_0 = V_m \cos \phi$ . Essas funções são esboçadas na Fig. 14.1, para vários exemplos de  $\sigma$  e  $\omega$ .

Como vemos da Fig. 14.1,  $\sigma > 0$  representa oscilações crescentes (b) ou uma exponencial crescente (e) e  $\sigma < 0$  representa oscilações amortecidas (a) ou exponenciais decrescentes (d). Finalmente,  $\sigma = 0$  representa regime permanente ca (c) ou regime permanente cc (f).

A unidade de  $\omega$  é radiano por segundo e de  $\phi$ , radianos ou graus, como antes. Como  $\sigma t$  é adimensional,  $\sigma$  é expresso em unidade de 1 por segundo (1/s). Esta unidade foi encontrada anteriormente, junto com as frequências naturais, no Capítulo 9, onde a unidade adimensional, *neper* (Np), foi usada para  $\sigma t$ .

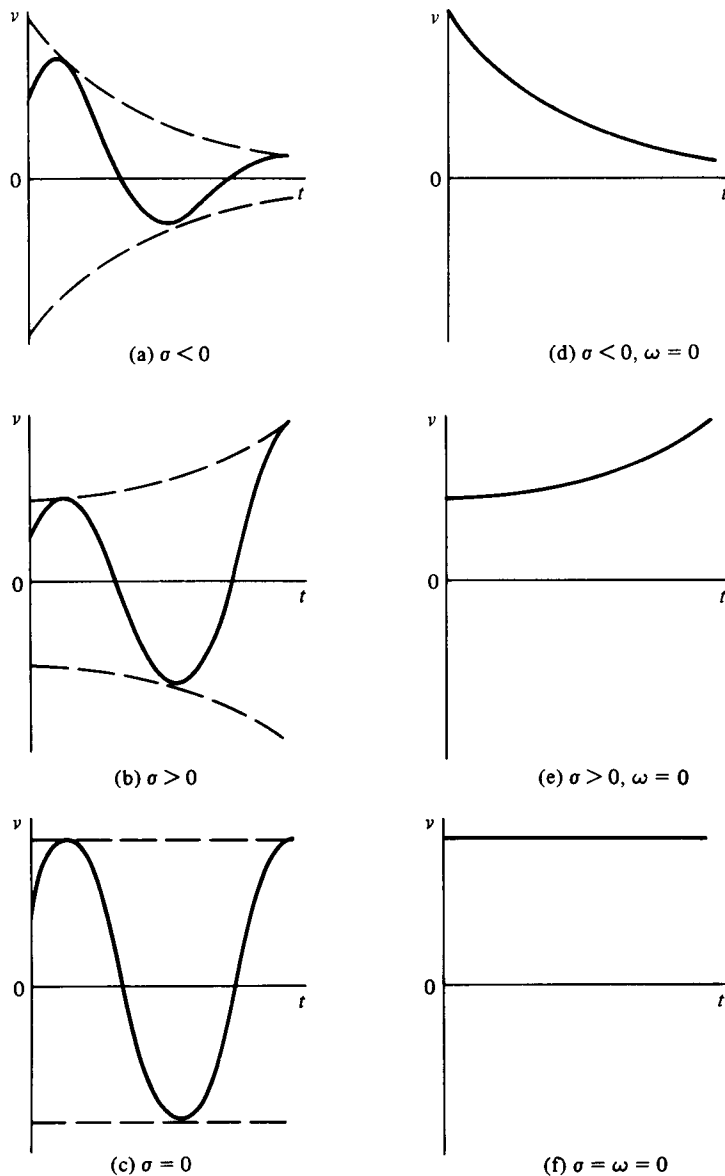


FIGURA 14.1 Vários exemplos de (14.1)

Então,  $\sigma$  é a *freqüência neperiana*, em nepers por segundo (Np/s). O neper foi escolhido em homenagem ao matemático escocês John Napier (1550-1617), que inventou os logaritmos.

### EXEMPLO 14.1

Como um exemplo de um circuito tendo uma excitação senoidal amortecida, calculemos a resposta forçada  $i$  na Fig. 14.2. A equação do laço é

$$2 \frac{di}{dt} + 5i = 25e^{-t} \cos 2t \quad (14.5)$$

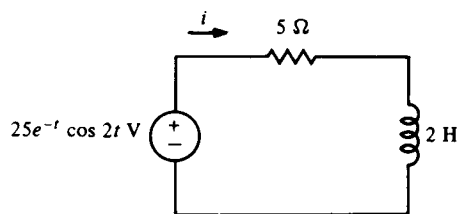


FIGURA 14.2 Circuito excitado por uma senóide amortecida

Experimentando como resposta forçada

$$i = e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$$

que é a excitação e todas as suas possíveis derivadas, temos

$$2e^{-t}(-2A \sin 2t - A \cos 2t + 2B \cos 2t - B \sin 2t) + 5e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t) = 25e^{-t} \cos 2t$$

Como esta expressão deve ser uma identidade, teremos

$$3A + 4B = 25$$

$$-4A + 3B = 0$$

ou  $A = 3$  e  $B = 4$ . Por conseguinte, a resposta forçada é

$$i = e^{-t}(3 \cos 2t + 4 \sin 2t) \text{ A}$$

ou, de forma equivalente,

$$i = 5e^{-t} \cos(2t - 53,1^\circ) \text{ A} \quad (14.6)$$

Como era de se esperar, a resposta forçada é, como a excitação, uma senóide amortecida.

## EXERCÍCIOS

**14.1.1** Excite o circuito da Fig. 14.2 pela função complexa

$$\begin{aligned} v_1 &= 25e^{-t}e^{j2t} \\ &= 25e^{(-1+j2)t} \end{aligned}$$

e demonstre que a resposta forçada é

$$i_1 = (5/\underline{-53,1^\circ})e^{(-1+j2)t}$$

**14.1.2** Mostre que, se  $i_1$  é a resposta a  $v_1$  na equação

$$2\frac{di_1}{dt} + 5i_1 = v_1$$

então  $\text{Re } i_1$ , é a resposta a  $\text{Re } v_1$ . Aplique este resultado às funções do Ex. 14.1.1 para obter  $i$  dado por (14.6).

**14.1.3** Calcule a resposta forçada  $v$ , empregando os métodos dos Exs. 14.1.1 e 14.1.2, se

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt} + v = 8e^{-t} \cos 2t$$

Resposta:  $-2e^{-t} \cos 2t$

**14.1.4** Empregue o método do Ex. 14.1.3 para calcular a resposta forçada  $v$ , se

$$\frac{d^3v}{dt^3} + 6\frac{d^2v}{dt^2} + 11\frac{dv}{dt} + 6v = i$$

onde

$$i = 4e^{-2t} \cos(t - 60^\circ)$$

Resposta:  $2e^{-2t} \cos(t + 30^\circ)$

## Freqüência Complexa e Fasores Generalizados

No Capítulo 10 estudamos circuitos com excitações senoidais tais como

$$v_1 = V_m \cos(\omega t + \phi) \quad (14.7)$$

que também escrevemos na forma equivalente

$$v_1 = \operatorname{Re}(V_m e^{j\phi} e^{j\omega t})$$

Empregando a representação fasorial de  $v_1$ ,

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi} = V_m \angle \phi \quad (14.8)$$

podemos escrever também

$$v_1 = \operatorname{Re}(\mathbf{V} e^{j\omega t}) \quad (14.9)$$

A notação fasorial foi extremamente útil para resolver circuitos ca em regime permanente, nos quais tensões e correntes eram senóides na forma de (14.7).

Neste capítulo, desejamos considerar circuitos nos quais as excitações e respostas forçadas são senóides amortecidas, tais como

$$v = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi) \quad (14.10)$$

Uma boa pergunta neste ponto é: Podemos definir representações fasoriais de senóides amortecidas que trabalharão tão bem para nós como os fasores, tal como em (14.8), das senóides não-amortecidas? Parece plausível que podemos, porque as propriedades das senóides que fazem os fasores possíveis são compartilhadas pelas senóides amortecidas. Ou seja, a soma ou diferença de duas senóides amortecidas é uma senóide amortecida, e a derivada, integral indefinida ou múltiplo constante de uma senóide amortecida é uma senóide amortecida. Em todas estas operações, apenas  $V_m$  e  $\phi$  podem mudar. Este é exatamente o caso com senóides não-amortecidas.

Vamos considerar o que se obtém se escrevemos (14.10) de forma análoga a (14.9). Ou seja,

$$\begin{aligned} v &= V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi) \\ &= \operatorname{Re}[V_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \phi)}] \\ &= \operatorname{Re}[V_m e^{j\phi} e^{(\sigma + j\omega)t}] \end{aligned}$$

Se definimos a grandeza

$$s = \sigma + j\omega \quad (14.11)$$

então teremos

$$v = \operatorname{Re}(\mathbf{V} e^{st}) \quad (14.12)$$

onde  $\mathbf{V}$  é o fasor de (14.8).

Evidentemente, visto que  $\mathbf{V}$  é o mesmo para ambos, a senóide não-amortecida dada por (14.9) é idêntica em forma à senóide amortecida de (14.12). A única diferença é que o número  $j\omega$  é usado em um caso e o número  $s$  é usado no outro. Obviamente, então, podemos repetir com as senóides amortecidas tudo o que fizemos com as senóides não-amortecidas, desde que empreguemos  $s$  no lugar de  $j\omega$ . Podemos definir o fasor  $\mathbf{V}$  de (14.8) como sendo a representação fasorial de  $v$  em (14.10) e usá-lo para problemas com senóides amortecidas da mesma forma que o empregamos para problemas senoidais. No caso de senóides amortecidas, podemos escrever o fasor como  $\mathbf{V}(s)$ , para distingui-lo do caso senoidal não-amortecido,  $\mathbf{V}(j\omega)$ .

### EXEMPLO 14.2

Como um exemplo, a senóide amortecida

$$v = 25e^{-t} \cos 2t \text{ V} \quad (14.13)$$

da Fig. 14.2 tem representação fasorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(s) = 25/\underline{0^\circ} \quad (14.14)$$

onde  $s = -1 + j2$ . Reciprocamente, se  $\mathbf{V}$  é dado por (14.14) e  $s$  é como especificado, então  $v$  é dado por (14.13).

Alguns autores preferem chamar  $\mathbf{V}(s)$ , correspondendo a  $v(t)$  em (14.10), como um fasor *generalizado*, apesar de ser idêntico aos fasores das funções senoidais. É, contudo, uma função de uma *freqüência generalizada*, denominada  $s$ , dada por (14.11). Visto que  $s$  é um número complexo, é mais freqüentemente chamado uma *freqüência complexa*. Seus componentes são

$$\sigma = \text{Re } s \text{ Np/s}$$

$$\omega = \text{Im } s \text{ rad/s}$$

que tem unidades de freqüência, e, certamente,  $s$  é o coeficiente de  $t$  numa função exponencial, como foi o caso no Capítulo 9 para as freqüências naturais de um circuito. As unidades de  $s$  são 1/segundo e são algumas vezes chamadas nepers por segundo complexos ou radianos por segundo complexos.

Pode ser valioso, neste ponto, notar que uma função que pode ser escrita na forma

$$f(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \dots + K_n e^{s_n t}$$

onde os termos  $K_i$  e  $s_i$  são independentes de  $t$ , pode ser dita como sendo caracterizada pelas freqüências complexas  $s_1, s_2, \dots, s_n$ . Por exemplo, escrevendo (14.10) na forma

$$v = V_m e^{\sigma t} \left( \frac{e^{j(\omega t + \phi)} + e^{-j(\omega t + \phi)}}{2} \right)$$

resulta em

$$v = K_1 e^{(\sigma + j\omega)t} + K_2 e^{(\sigma - j\omega)t}$$

onde  $K_1 = V_m e^{j\phi}/2$  e  $K_2 = V_m e^{-j\phi}/2 = K_1^*$  (o conjugado complexo). Então  $v$  possui não uma mas duas freqüências complexas, como sejam  $s_1 = \sigma + j\omega$  e  $s_2 = s_1^* = \sigma - j\omega$ . Este conceito de freqüência complexa é consistente com aquele das freqüências naturais considerado no Capítulo 9.

## EXERCÍCIOS

- 14.2.1** Calcule as freqüências complexas associadas com (a)  $5 + 3e^{-4t}$ , (b)  $\cos \omega t$ , (c)  $\sin(\omega t + \theta)$ , (d)  $6e^{-3t} \sin(4t + 10^\circ)$  e (e)  $e^{-t}(1 + \cos 2t)$ .  
**Resposta:** (a) 0, -4; (b)  $\pm j\omega$ ; (c)  $\pm j\omega$ ; (d)  $-3 \pm j4$ ; (e)  $-1, -1 \pm j2$
- 14.2.2** Mostre que, se  $i$  é uma senóide amortecida,

$$i = I_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$$

então  $v$ , definido por

$$v = L \frac{di}{dt} + Ri$$

é também uma senóide amortecida de mesma freqüência complexa.

**Resposta:**

$$v = I_m \sqrt{(R + \sigma L)^2 + \omega^2 L^2} e^{\sigma t} \cos \left( \omega t + \phi + \tan^{-1} \frac{\omega L}{R + \sigma L} \right)$$

- 14.2.3** Calcule  $s$  e  $\mathbf{V}(s)$ , se  $v(t)$  é dado por (a) 6, (b)  $6e^{-2t}$ , (c)  $6e^{-3t} \cos(4t + 10^\circ)$  e (d)  $6 \cos(2t + 10^\circ)$ .  
**Resposta:** (a)  $0, 6/\underline{0^\circ}$ ; (b)  $-2, 6/\underline{0^\circ}$ ; (c)  $-3 + j4, 6/\underline{10^\circ}$ ; (d)  $j2, 6/\underline{10^\circ}$
- 14.2.4** Calcule  $v(t)$  se (a)  $\mathbf{V} = 4/\underline{0^\circ}$ ,  $s = -3$ ; (b)  $\mathbf{V} = 5/\underline{15^\circ}$ ,  $s = j2$ ; e (c)  $\mathbf{V} = 5/\underline{30^\circ}$ ,  $s = -3 + j2$ .  
**Resposta:** (a)  $4e^{-3t}$ ; (b)  $5 \cos(2t + 15^\circ)$ ; (c)  $5e^{-3t} \cos(2t + 30^\circ)$

## Impedância e Admitância

Devido à forma idêntica da representação fasorial de senóides e senóides amortecidas, podemos encontrar respostas forçadas para excitações senoidais amortecidas usando fasores, exatamente da mesma forma que fizemos nos capítulos anteriores. Todos os conceitos e regras, como impedância, admitância, LKC, LKT, teorema de Thévenin, teorema de Norton, superposição etc, aplicam-se exatamente ao caso de senóides amortecidas. Precisamos apenas usar  $s = \sigma + j\omega$  em lugar de  $j\omega$ .

Segue que, no domínio de  $s$ , os fasores de corrente  $\mathbf{I}(s)$  e de tensão  $\mathbf{V}(s)$ , associados a um dispositivo de dois terminais (bipólo), são relacionados por meio da expressão

$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{Z}(s)\mathbf{I}(s)$$

onde  $\mathbf{Z}(s)$  é a *impedância generalizada*, ou simplesmente impedância, do dispositivo. Podemos obter  $\mathbf{Z}(s)$  a partir de  $\mathbf{Z}(j\omega)$ , a impedância no caso de regime permanente ca, substituindo simplesmente  $j\omega$  por  $s$ .

Para uma resistência  $R$ , a impedância é, portanto

$$\mathbf{Z}_R(s) = R$$

No caso de uma indutância,  $L$ , a impedância, é

$$\mathbf{Z}_L(s) = sL$$

e, para uma capacitância  $C$ , torna-se

$$\mathbf{Z}_C(s) = \frac{1}{sC}$$

De forma similar, as admitâncias são, respectivamente

$$\mathbf{Y}_R(s) = \frac{1}{R} = G, \quad \mathbf{Y}_L(s) = \frac{1}{sL}, \quad \mathbf{Y}_C(s) = sC$$

### EXEMPLO 14.3

Impedâncias em série ou paralelo são associadas exatamente da mesma forma que no caso de regime permanente ca, visto que simplesmente substituímos  $j\omega$  por  $s$ . Por exemplo, consideremos o circuito da Fig. 14.2, cujo circuito fasorial está mostrado na Fig. 14.3, onde  $s = -1 + j2$ . A impedância vista dos terminais da fonte consiste das impedâncias  $2s$  e  $5$  em série e é, desta forma, dada por

$$\mathbf{Z}(s) = 2s + 5 \Omega$$

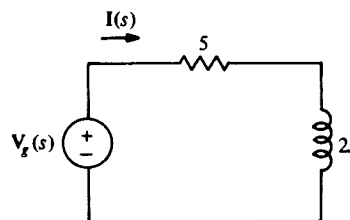


FIGURA 14.3 Circuito fasorial da Fig. 14.2

Por conseguinte, visto que o fasor de tensão de entrada é

$$\mathbf{V}_g(s) = 25/\underline{0^\circ} \text{ V}$$

teremos

$$\mathbf{I}(s) = \frac{\mathbf{V}_g(s)}{2s + 5} = \frac{25/\underline{0^\circ}}{2(-1 + j2) + 5} = 5/\underline{-53,1^\circ} \text{ A}$$

Desta forma, no domínio do tempo, a resposta forçada é, como antes

$$i(t) = 5e^{-t} \cos(2t - 53,1^\circ) \text{ A}$$

### EXEMPLO 14.4

Como outro exemplo, consideremos o circuito no domínio do tempo da Fig. 14.4(a), onde é solicitado calcular a resposta forçada  $v_o(t)$  para uma dada entrada senoidal amortecida  $v_g(t)$ . O circuito fasorial é mostrado na Fig. 14.4(b), a partir do qual tiramos as equações dos nós,

$$\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4}s\right)\mathbf{V}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{V}_g - \mathbf{V}_2 - \frac{1}{4}s\mathbf{V}_o = 0$$

$$\left(1 + \frac{1}{4}s\right)\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 = 0$$

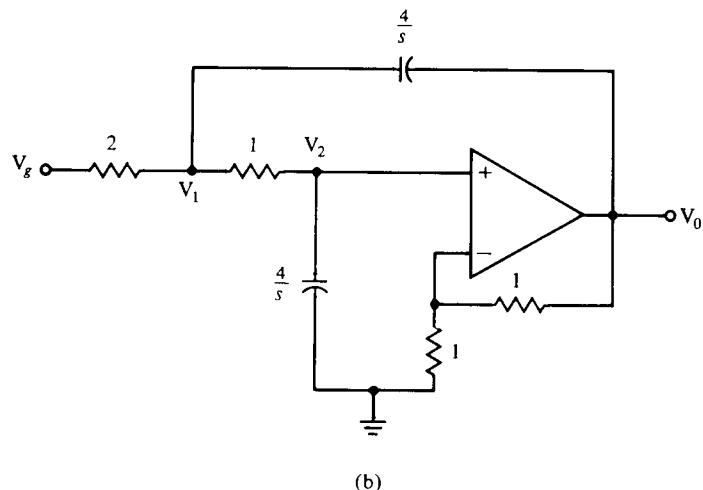
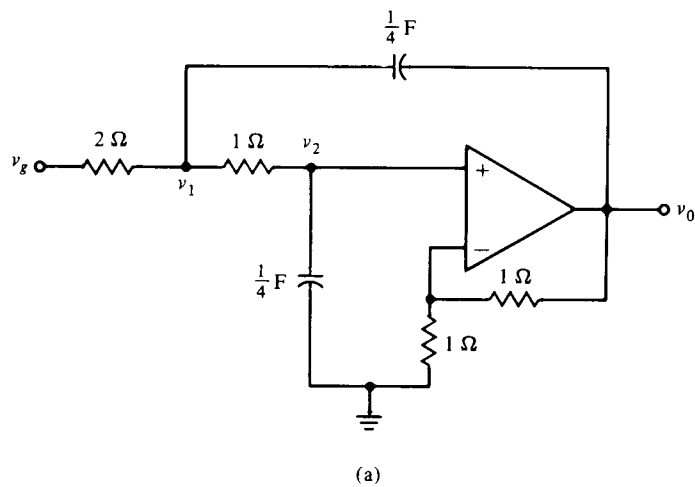


FIGURA 14.4 (a) Circuito no domínio do tempo; (b) seu circuito fasorial



Notamos que  $V_2 = V_o/2$ , visto que o amplificador operacional e os dois resistores conectados constituem uma FTCT com um ganho de 2. Portanto, eliminando-se  $V_1$  e  $V_2$ , obtemos

$$V_o(s) = \frac{16}{s^2 + 2s + 8} V_g(s) \quad (14.15)$$

Se temos

$$v_g(t) = e^{-2t} \cos 4t \text{ V}$$

então  $s = -2 + j4$  e  $V_g(s) = 1 \angle 0^\circ$ . Desta forma, de (14.15) temos

$$V_o(s) = \sqrt{2} \angle 135^\circ \text{ V}$$

e, portanto

$$v_o(t) = \sqrt{2} e^{-2t} \cos (4t + 135^\circ) \text{ V}$$

### EXEMPLO 14.5

Como exemplo final nesta seção, vamos calcular a resposta forçada  $i$  da Fig. 14.5, se

$$v_{g1} = 8e^{-t} \cos t \text{ V}$$

e

$$i_{g2} = 2e^{-5t} \text{ A}$$

Visto que as frequências complexas de  $v_{g1}$  e  $i_{g2}$  são diferentes, devemos usar superposição. Ou seja

$$i = i_1 + i_2$$

onde  $i_1$  é devida a  $v_{g1}$  atuando isoladamente e  $i_2$  é devida a  $i_{g2}$  atuando isoladamente.

Os circuitos fasoriais para  $i_{g2} = 0$  e  $v_{g1} = 0$  são mostrados nas Figs. 14.6(a) e (b), respectivamente. As correntes fasoriais são  $I_1$  e  $I_2$ , como indicado. Na Fig. 14.6(a), usando divisão de corrente, teremos

$$I_1 = \frac{8 \angle 0^\circ}{1 + \{[(2s + 4)(4/s)] / (2s + 4 + 4/s)\}} \times \frac{4/s}{2s + 4 + 4/s}$$

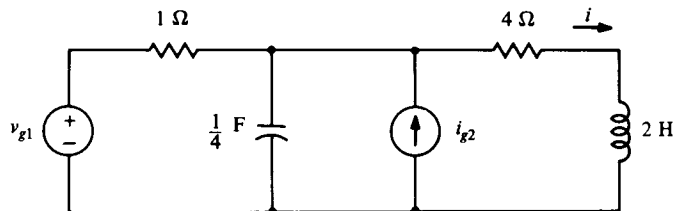


FIGURA 14.5 Circuito com duas fontes

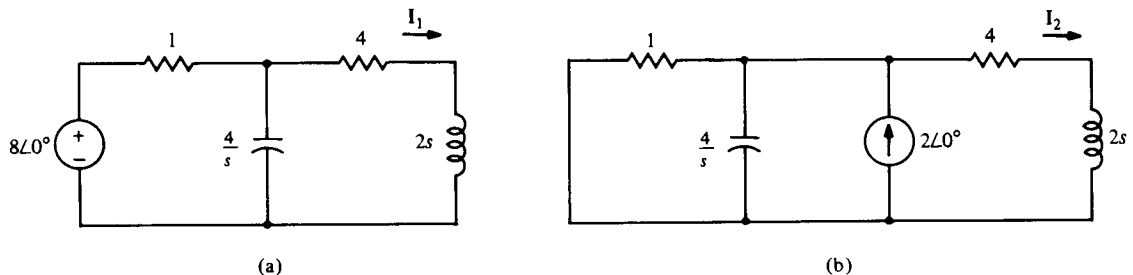


FIGURA 14.6 Circuitos fasoriais associados com a Fig. 14.5

que, visto que  $s = -1 + j1$  neste exemplo, torna-se

$$\mathbf{I}_1 = 2\sqrt{2}/\underline{-45^\circ} \text{ A}$$

Portanto, a componente forçada devida a  $v_{g1}$  isoladamente é

$$i_1 = 2\sqrt{2} e^{-t} \cos(t - 45^\circ) \text{ A}$$

Na Fig. 14.6(b), também por divisão de corrente, obtemos

$$\mathbf{I}_2 = \left( \frac{[1(4/s)]/(1 + 4/s)}{\{[1(4/s)]/(1 + 4/s)\} + 2s + 4} \right) (2/\underline{0^\circ})$$

que, visto que  $s = -5$ , é

$$\mathbf{I}_2 = 0,8/\underline{0^\circ} \text{ A}$$

Por conseguinte, a componente forçada devida a  $i_{g2}$  isoladamente, é

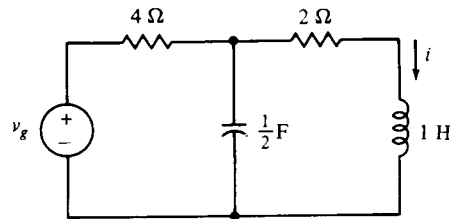
$$i_2 = 0,8e^{-5t} \text{ A}$$

A resposta forçada completa da Fig. 14.5 é, portanto

$$i = 2\sqrt{2} e^{-t} \cos(t - 45^\circ) + 0,8e^{-5t} \text{ A}$$

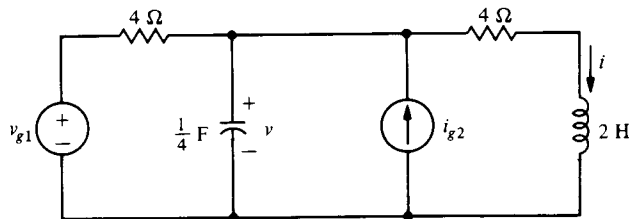
## EXERCÍCIOS

- 14.3.1** Calcule a resposta forçada  $i$ , se  $v_g = 4e^{-t} \cos t \text{ V}$ .  
Resposta:  $2\sqrt{2} e^{-t} \cos(t - 45^\circ) \text{ A}$



EXERCÍCIO 14.3.1

- 14.3.2** Calcule a resposta forçada  $v$  se  $v_{g1} = 4e^{-2t} \cos(t - 45^\circ) \text{ V}$  e  $i_{g2} = 2e^{-t} \text{ A}$ .  
Resposta:  $2\sqrt{2} e^{-2t} \cos(t + 90^\circ) + 4e^{-t} \text{ V}$



EXERCÍCIO 14.3.2

- 14.3.3** Para o circuito do Ex. 14.3.2, tome  $i_{g2} = e^{-2t} \cos(t + 45^\circ) \text{ A}$ , permanecendo  $v_{g1}$  como está, e calcule  $v$  por (a) usando superposição, (b) escrevendo uma única equação de nó e (c) usando transformações de fonte.  
Resposta:  $4e^{-2t} \cos(t + 135^\circ) \text{ V}$
- 14.3.4** No circuito fasorial do Ex. 14.3.2, com  $i_{g2} = 0$  e  $v_{g1}$  permanecendo inalterado, substitua tudo, exceto o capacitor, por seu equivalente Thévenin e use o resultado para calcular  $\mathbf{V}(s)$ , o fasor de  $v$ . Note que o resultado conduz ao primeiro componente de  $v$  dado no Ex. 14.3.2.  
Resposta:

$$\mathbf{V}_\infty(s) = \frac{s + 2}{s + 4} \mathbf{V}_g(s), \mathbf{Z}_{th}(s) = \frac{4(s + 2)}{s + 4} \Omega, \mathbf{V}(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 3s + 4} \mathbf{V}_g(s)$$

## Funções de Rede

Uma generalização de impedância e admitância é a chamada *função de rede*, que, no caso de uma única excitação e resposta, é definida como a relação entre o fasor resposta e o fasor de excitação. Por exemplo, se  $V(s)$  e  $I(s)$  são as tensões e correntes fasoriais associados com uma rede de dois terminais, então a impedância de entrada

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$$

é a função de rede se  $I(s)$  é a excitação e  $V(s)$  a resposta. Por outro lado, se  $V(s)$  é a entrada e  $I(s)$  a saída, então a admitância de entrada

$$Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)}$$

é a função de rede.

Os exemplos precedentes são casos especiais em que tanto a entrada como a saída são medidas no mesmo par de terminais. Em geral, para uma dada corrente ou tensão de entrada num par de terminais especificado, a saída pode ser uma corrente ou uma tensão em qualquer ponto do circuito. Então, a função de rede, que designamos em geral como  $H(s)$ , pode ser a relação entre uma tensão e uma corrente (neste caso suas unidades são ohms), uma corrente e uma tensão (com unidades de siemens), uma tensão e uma tensão ou uma corrente e uma corrente. Nos dois últimos casos,  $H(s)$  é uma grandeza adimensional. Se a entrada e a saída são medidas em terminais diferentes, a função de rede é também chamada *função de transferência*.

### EXEMPLO 14.6

Como um exemplo, considere o circuito da Fig. 14.4(b), que foi estudado na seção anterior. Se  $V_o(s)$  é o fasor de saída e  $V_g(s)$  é o fasor de entrada, então, por (14.15), a função de rede é

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_g(s)} = \frac{16}{s^2 + 2s + 8}$$

### EXEMPLO 14.7

Como outro exemplo, se a fonte  $V_g = 8 \angle 0^\circ$  V é a entrada e  $I_1$  é a saída da Fig. 14.6(a), então podemos mostrar que

$$H(s) = \frac{I_1(s)}{V_g(s)} = \frac{2}{s^2 + 6s + 10} \quad (14.16)$$

No exemplo anterior  $H(s)$  é adimensional e neste último caso, suas unidades são siemens.

A função de rede  $H(s)$  é independente da entrada, sendo uma função, apenas, dos elementos da rede e suas interconexões. Certamente, quando a entrada é especificada, isso determina o valor de  $s$  a ser empregado numa dada aplicação. A partir do conhecimento da função de rede e da função de entrada, podemos então encontrar o fasor de saída e, subsequentemente, a saída no domínio do tempo. Sendo específico, suponhamos que  $V_i(s)$  é a entrada e  $V_o(s)$  é a saída. Neste caso

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \quad (14.17)$$

do qual

$$V_o(s) = H(s)V_i(s) \quad (14.18)$$

Em geral, visto que  $s$  é complexa,  $H(s)$  é complexa. Portanto, podemos escrever, em forma polar,

$$H(s) = |H(s)| \angle \theta \quad (14.19)$$

onde  $|\mathbf{H}(s)|$  é o módulo e  $\theta$  a fase de  $\mathbf{H}(s)$ . Portanto, se

$$\mathbf{V}_i(s) = V_m \angle \phi \quad (14.20)$$

então

$$\mathbf{V}_o(s) = V_m |\mathbf{H}(s)| \angle \phi + \theta \quad (14.21)$$

Desta forma, a amplitude de  $\mathbf{V}_o$  é  $V_m |\mathbf{H}(s)|$ , e sua fase é o  $\phi + \theta$ . Ou seja, a amplitude da saída é a da entrada vezes o da função de rede, e a fase da saída é a da entrada mais a da função de rede.

### EXEMPLO 14.8

Como exemplo,  $\mathbf{I}_1(s)$  em (14.16) é dado por

$$\mathbf{I}_1(s) = \mathbf{H}(s) \mathbf{V}_g(s)$$

onde  $\mathbf{V}_g(s) = 8 \angle 0^\circ$  V e  $s = -1 + j1$ , como dado na seção anterior. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(-1 + j1) &= \frac{2}{(-1 + j1)^2 + 6(-1 + j1) + 10} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \angle -45^\circ \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \left( \frac{\sqrt{2}}{4} \right) (8) \angle 0 - 45^\circ \\ &= 2\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

como já foi obtido anteriormente.

### EXEMPLO 14.9

Como última observação nessa seção, se existem duas ou mais entradas, podemos usar superposição para definir uma função de rede relacionando a saída a cada entrada individual, com as outras entradas iguais a zero. Por exemplo, no circuito da Fig. 14.5, podemos calcular, da Fig. 14.6(a) (com  $\mathbf{I}_{g2} = 0$ ), a função de rede

$$\mathbf{H}_1(s) = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_{g1}}$$

onde  $s = -1 + j1$  e  $\mathbf{V}_{g1} = 8 \angle 0^\circ$  V. Então, da Fig. 14.6(b) (com  $\mathbf{V}_{g1} = 0$ ), temos a função de rede

$$\mathbf{H}_2(s) = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_{g2}}$$

onde  $s = -5$  e  $\mathbf{I}_{g2} = 2 \angle 0^\circ$  A. Podemos calcular, então,  $\mathbf{I}_1$  e  $\mathbf{I}_2$ , e, subseqüentemente, as funções correspondentes no domínio do tempo,  $i_1$  e  $i_2$ . Esses são, por superposição, os componentes de  $i$ , como antes calculado.

## EXERCÍCIOS

14.4.1 Dada a função de rede

$$\mathbf{H}(s) = \frac{4(s + 5)}{s^2 + 4s + 5}$$

e a entrada

$$\mathbf{V}_i(s) = 2 \angle 0^\circ$$

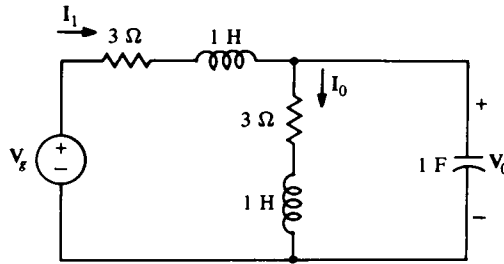
calcule a resposta forçada  $v_o(t)$  se (a)  $s = -2$ , (b)  $s = -4 + j1$  e (c)  $s = -2 + j3$ .  
 Resposta: (a)  $24e^{-2t}$ ; (b)  $-2e^{-4t} \sin t$ ; (c)  $3\sqrt{2}e^{-2t} \cos(3t - 135^\circ)$

**14.4.2** Calcule  $\mathbf{H}(s)$  se a resposta é (a)  $\mathbf{I}_1(s)$ , (b)  $\mathbf{I}_0(s)$  e (c)  $\mathbf{V}_0(s)$ .

Resposta:

(a)  $\frac{s^2 + 3s + 1}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$ ; (b)  $\frac{1}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$ ;

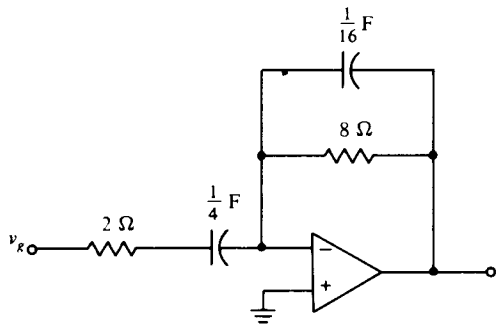
(c)  $\frac{1}{(s + 1)(s + 2)}$



**EXERCÍCIO 14.4.2**

**14.4.3** Calcule  $\mathbf{H}(s)$  se a resposta é  $v$ . Use o resultado para calcular a resposta forçada, se  $v_s = 5 \cos t$  V.

Resposta:  $\frac{-8s}{s^2 + 4s + 4}$ ,  $8 \cos(t - 143,1^\circ)$  V



**EXERCÍCIO 14.4.3**

## 14.5

### Pólos e Zeros

Em geral, a função de rede é um quociente de polinomiais em  $s$ , com coeficientes reais que são independentes da excitação. Para ilustrar isso, vamos considerar o exemplo da Fig. 14.2, descrito como

$$2 \frac{di}{dt} + 5i = v$$

onde  $i$  é a saída e  $v$  a entrada. Empregando a mesma técnica com funções de excitação complexa que usamos no Capítulo 10, notamos que, se  $v = \mathbf{V}e^{st}$ , então a saída deve ter a mesma forma, ou seja,  $i = \mathbf{I}e^{st}$ , onde, evidentemente,  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(s)$  e  $\mathbf{I} = \mathbf{I}(s)$  são as representações fasoriais de  $v$  e  $i$ . Substituindo estes valores na equação diferencial, obtemos

$$(2s + 5)\mathbf{I}e^{st} = \mathbf{V}e^{st}$$

donde a função de rede é

$$\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \frac{1}{2s + 5}$$

No caso geral, se a entrada e a saída de um circuito são  $v_i(t)$  e  $v_o(t)$ , respectivamente, então a equação representativa do sistema é

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n v_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v_o}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dv_o}{dt} + a_0 v_o \\ = b_m \frac{d^m v_i}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} v_i}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dv_i}{dt} + b_0 v_i \end{aligned} \quad (14.22)$$

Os  $a$ 's e  $b$ 's, evidentemente, são constantes reais e são independentes de  $v_i$ .

Como anteriormente, se  $v_i = V_i e^{st}$ , então a saída deve ter a forma  $v_o = V_o e^{st}$ , onde  $V_i(s)$  e  $V_o(s)$  são as representações fasoriais de  $v_i$  e  $v_o$ . Substituindo estes valores em (14.22), temos

$$\begin{aligned} (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) V_o e^{st} \\ = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) V_i e^{st} \end{aligned} \quad (14.23)$$

Dessa equação, obtemos a função de rede

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \mathbf{H}(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (14.24)$$

que é um quociente de polinômios em  $s$ .

Podemos também escrever a função de rede (14.24) na forma fatorada

$$\mathbf{H}(s) = \frac{b_m (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{a_n (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (14.25)$$

Nesse caso, os números  $z_1, z_2, \dots, z_m$  são chamados *zeros* da função de rede porque eles são valores de  $s$  para os quais a função torna-se zero. Os números  $p_1, p_2, \dots, p_n$  são valores de  $s$  para os quais a função torna-se infinita e são chamados *pólos* da função de rede. Os valores dos pólos e zeros, em conjunto com os valores dos fatores  $a_n$  e  $b_m$ , determinam perfeitamente a função de rede.

**EXEMPLO 14.10** Como um exemplo, a função de rede

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \frac{6(s+1)(s^2+2s+2)}{s(s+2)(s^2+4s+13)} \\ &= \frac{6(s+1)(s+1+j1)(s+1-j1)}{s(s+2)(s+2+j3)(s+2-j3)} \end{aligned} \quad (14.26)$$

tem zeros em  $-1, -1 + j1$  e  $-1 - j1$  e pólos em  $0, -2, -2 + j3$  e  $-2 - j3$ . Como é geralmente o caso, porque os  $a$ 's e  $b$ 's de (14.24) são reais, pólos ou zeros complexos sempre existem em pares conjugados. Visto que a função de rede é o quociente entre um polinômio de terceiro grau e um de quarto grau, ela tende a zero quando  $s$  torna-se infinito. Desta forma, teremos um zero em  $s = \infty$ . Se o numerador fosse de maior grau que o denominador,  $s = \infty$  seria um pólo.

Os pólos e zeros de uma função de rede podem ser esboçados em um *diagrama de pólos e zeros*, que é simplesmente o *plano  $s$* , consistindo de eixos  $\sigma$  e  $j\omega$ , com pólos e zeros marcados nele. Zeros são representados por um pequeno círculo e pólos por uma pequena cruz. Como um exemplo, o diagrama de pólos e zeros de (14.26) está indicado na Fig. 14.7. Os valores de  $\sigma$  estão no eixo horizontal ( $\sigma$ ) e os de  $\omega$  estão no eixo vertical (chamado  $j\omega$ ).

Como veremos no Capítulo 15, diagramas de pólos e zeros são úteis, considerando as propriedades dos circuitos no domínio da frequência.

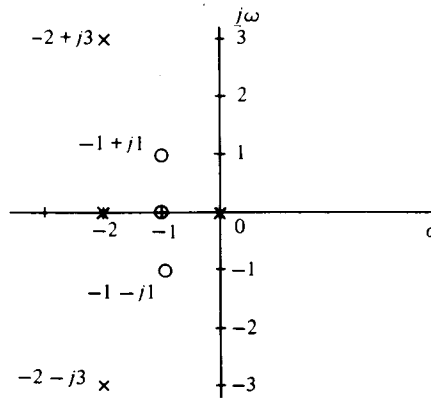


FIGURA 14.7 Diagrama de pólos e zeros

## EXERCÍCIOS

- 14.5.1 Se os zeros de  $\mathbf{H}(s)$  são  $s = -1, -1 \pm j1$ , os pólos são  $s = -2, -1 \pm j2$  e  $\mathbf{H}(0) = 4$ , calcule  $\mathbf{H}(s)$ .

Resposta: 
$$\frac{20(s + 1)(s^2 + 2s + 2)}{(s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

- 14.5.2 Desenhe o diagrama de pólos e zeros da função de rede do Ex. 14.5.1.

- 14.5.3 Se a equação representativa de um circuito é

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 4 \frac{dv_o}{dt} + 13v_o = 2 \frac{dv_i}{dt} + 4v_i$$

calcule  $\mathbf{H}(s)$  e os pólos e zeros.

Resposta:  $\mathbf{H}(s) = \frac{2s + 4}{s^2 + 4s + 13}$ ; pólos:  $-2 \pm j3$ ; zeros:  $-2$ ; infinito.

## 14.6

### A Resposta Natural da Função de Rede

Como sabemos através de nossa experiência passada, uma saída de um circuito consiste da soma das respostas natural e forçada. Nos últimos capítulos estivemos envolvidos inteiramente com o cálculo da resposta forçada, e vimos que a técnica dos fasores nos possibilita fazer isso de uma maneira muito fácil, muito direta, nos casos de excitações senoidais, senoidais amortecidas e exponenciais. Em estudos de sistemas de potência, a resposta forçada é, evidentemente, uma resposta de regime permanente ca e está sempre presente. Portanto, a resposta forçada é normalmente de maior interesse que a resposta natural, que é transitória e desaparece após um breve período de tempo.

Com excitações senoidais amortecidas, por outro lado, tanto a resposta forçada como a natural são transitórias. (Num circuito real a resposta natural deve ser um transitório, pois de outra forma teríamos ou uma resposta permanente ou crescente, sem uma excitação externa). Portanto, a resposta natural assume maior importância, em relação à resposta forçada, do que no caso de regime permanente ca. Calculando respostas naturais nos Capítulos 8 e 9, consideramos apenas circuitos de primeira e segunda ordem, pela simples razão que nossos métodos foram aplicados às equações diferenciais representativas e se tornam mais difíceis de usar quando a ordem do circuito aumenta. Contudo, como veremos nesta seção, a resposta natural pode ser obtida de forma relativamente fácil a partir da representação fasorial.

Os resultados da seção anterior ilustraram que podemos obter a função de rede facilmente a partir das equações representativas. Por exemplo, se (14.22) é a equação representativa, então a função de rede (14.24) é

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_o(s)}{\mathbf{V}_i(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (14.27)$$

com numerador

$$N(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0 \quad (14.28)$$

e denominador

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (14.29)$$

As duas últimas expressões são simplesmente o lado direito e esquerdo, respectivamente, de (14.22), com as derivadas substituídas por potências de  $s$ .

### EXEMPLO 14.11

Por exemplo, se a equação representativa é

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 4 \frac{dv_o}{dt} + 3v_o = 2 \frac{dv_i}{dt} + v_i \quad (14.30)$$

então a função de rede é

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_o(s)}{\mathbf{V}_i(s)} = \frac{2s + 1}{s^2 + 4s + 3} \quad (14.31)$$

O processo é reversível se não ocorrerem cancelamentos de termos comuns na função de rede. Por exemplo, é simples escrever (14.30), dado (14.31).

Em geral, de (14.28) e (14.29) podemos reconstruir a equação representativa (14.22). No caso especial de (14.29) ser igualada a zero

$$D(s) = 0 \quad (14.32)$$

substituindo-se potências de  $s$  pelas derivadas correspondentes de  $v_o$ , resulta na equação homogênea do sistema

$$a_n \frac{d^n v_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v_o}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dv_o}{dt} + a_0 v_o = 0$$

como discutido no Capítulo 9. Por conseguinte, (14.32) é a equação representativa e suas raízes são as frequências naturais do circuito. Visto que estas raízes, por (14.29), são também os pólos da função de rede, vemos que a resposta natural do circuito é

$$v_n = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t} \quad (14.33)$$

onde as frequências naturais  $p_1, p_2, \dots, p_n$  são os pólos da função de rede e  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são constantes arbitrárias. Modificações, é claro, devem ser feitas, como descrito no Capítulo 9, se as frequências naturais não são distintas.

Temos, neste ponto, um método extremamente simples, baseado em fasores, para calcular a resposta completa de um circuito. Tudo que necessitamos achar é a função de rede, a partir da qual, por (14.27), podemos obter o fasor de saída. A resposta forçada é encontrada da resposta fasorial, da forma usual, e a resposta natural é dada por (14.33), onde as frequências naturais são os pólos da função de rede.

O fasor de entrada é da forma

$$\mathbf{V}_i(s) = V_m / \underline{\phi}$$

onde  $V_m$  e  $\phi$  são constantes, então, por (14.27)

$$\mathbf{V}_o(s) = (V_m / \underline{\phi}) \mathbf{H}(s)$$

Portanto, visto que  $\mathbf{V}_i(s)$  não tem pólos, os pólos de  $\mathbf{H}(s)$  são os pólos de  $\mathbf{V}_o(s)$ . Então, a resposta completa  $v_o(t)$  pode ser obtida da sua representação fasorial  $\mathbf{V}_o(s)$ . A resposta forçada é obtida como antes e as frequências naturais são os pólos de  $\mathbf{V}_o(s)$ , a partir dos quais a resposta natural pode ser calculada.

### EXEMPLO 14.12

Como um exemplo, calculemos a resposta completa  $i$  do circuito da Fig. 14.8. Usando divisão de corrente, o fasor  $\mathbf{I}(s)$  de  $i$  é dado por

$$\mathbf{I}(s) = \frac{\mathbf{V}_g(s)}{12 + \{[3s(2s + 6)] / (3s + 2s + 6)\}} \times \frac{3s}{3s + 2s + 6} = \frac{s}{(s + 1)(s + 12)}$$



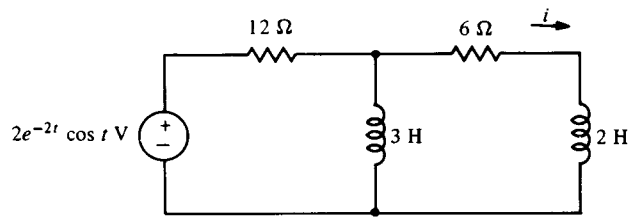


FIGURA 14.8 Circuito de segunda ordem

visto que  $V_g = 2 \angle 0^\circ$ . Visto que os pólos de  $I$  são  $s = -1, -12$ , a resposta natural é

$$i_n(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-12t} \text{ A}$$

Para  $s = -2 + j1$ , a representação fasorial é

$$\mathbf{I} = 0,16 \angle 12,7^\circ$$

de forma que a resposta forçada é

$$i_f(t) = 0,16 e^{-2t} \cos(t + 12,7^\circ) \text{ A}$$

A resposta completa é, portanto

$$i(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-12t} + 0,16 e^{-2t} \cos(t + 12,7^\circ) \text{ A}$$

As constantes arbitrárias podem ser determinadas, como no Capítulo 9, se conhecemos as condições iniciais de energia.

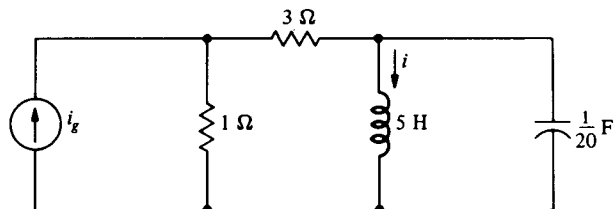
## EXERCÍCIOS

- 14.6.1** Calcule a resposta natural no Ex. 14.4.1, assumindo que não há cancelamento na função de rede.  
*Resposta:*  $e^{-2t}(A_1 \cos t + A_2 \sin t)$
- 14.6.2** Calcule a resposta completa no Ex. 14.4.1(c) se a resposta natural é como dado no Ex. 14.6.1 e

$$v_o(0^+) = \frac{dv_o(0^+)}{dt} = 0$$

*Resposta:*  $e^{-2t} [3 \cos t - 9 \sin t + 3\sqrt{2} \cos(3t - 135^\circ)]$

- 14.6.3** Calcule a resposta completa  $i$ , se  $i_g = 10 \cos 2t \text{ A}$ ,  $i(0) = 0$  e  $di(0^+)/dt = 8 \text{ A/s}$ .  
*Resposta:*  $2e^{-t} - 2e^{-4t} + \sin 2t \text{ A}$



EXERCÍCIO 14.6.3

## 14.7

### Freqüências Naturais

Como vimos anteriormente, as freqüências naturais são os pólos da função de rede se não há cancelamento de um pólo e zero comuns. Também, como discutido no Capítulo 9, as freqüências naturais são as mesmas para qualquer resposta num dado circuito, a menos que uma parte do circuito seja fisicamente separada

do resto. Desta forma, se estamos procurando apenas as frequências naturais, podemos considerar qualquer resposta, e é obviamente melhor escolher uma que seja fácil de encontrar.

### EXEMPLO 14.13

Por exemplo, consideremos o circuito da Fig. 14.8, com a fonte morta (visto que a resposta natural corresponde a uma fonte nula). As frequências naturais são os pólos de qualquer função de rede. Portanto, podemos excitar o circuito de alguma maneira apropriada e, para alguma saída escolhida, determinar a função de rede. A Figura 14.9 ilustra as duas maneiras adequadas de aplicar uma excitação ao circuito morto. Podemos colocar uma fonte de tensão em série com um elemento como em  $x-x'$  da Fig. 14.9(a) ou podemos aplicar uma fonte de corrente em um elemento, como através de  $y-y'$  da Fig. 14.9(b). A primeira entrada no circuito é algumas vezes chamada entrada de alicate visto que cortamos um fio e inserimos uma fonte de tensão. A segunda é uma entrada de soldagem, visto que soldamos a fonte através de dois nós. Qualquer outro método de entrada seria impróprio, porque eliminar as fontes inseridas resultaria num circuito morto diferente.

Na entrada de alicate, se  $V_x(s)$  é a fonte de tensão inserida e  $I_x(s)$ , a corrente que entra no circuito, saindo da fonte, é a resposta, então a função de rede é

$$Y_x(s) = \frac{I_x(s)}{V_x(s)}$$

Desta forma, as frequências naturais são os pólos de  $Y_x(s)$  ou os zeros de sua recíproca,  $Z_x(s)$ , a impedância de entrada em  $x-x'$ . Neste caso, teremos

$$\begin{aligned} Z_x(s) &= 2s + 6 + \frac{12(3s)}{12 + 3s} \\ &= \frac{2(s + 1)(s + 12)}{s + 4} \end{aligned}$$

Por conseguinte, as frequências naturais são  $-1$ ,  $-12$ , como antes.

No caso da Fig. 14.9(b), se uma fonte de corrente  $I_y(s)$  é introduzida através de  $y-y'$  e a saída é a tensão  $V_y(s)$  através da fonte, então a função de rede é

$$Z_y(s) = \frac{V_y(s)}{I_y(s)}$$

Por conseguinte, as frequências naturais são os pólos de  $Z_y(s)$  ou os zeros de sua recíproca,  $Y_y(s)$ , dada por

$$\begin{aligned} Y_y(s) &= \frac{1}{12} + \frac{1}{3s} + \frac{1}{2s + 6} \\ &= \frac{(s + 1)(s + 12)}{12s(s + 3)} \end{aligned}$$

De novo, as frequências naturais são  $-1$ ,  $-12$ .

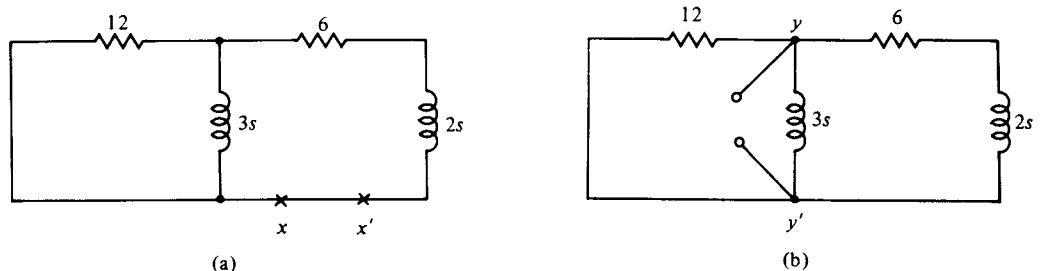


FIGURA 14.9 Circuito com duas possíveis entradas

## EXERCÍCIOS

- 14.7.1 Calcule as frequências naturais do circuito da Fig. 14.5 matando as fontes e usando (a) uma entrada de alicate em série com o capacitor e (b) uma entrada de soldagem através do capacitor.  
*Resposta:*  $-3 \pm j1$
- 14.7.2 Calcule as frequências naturais do circuito do Ex. 14.4.2 matando a fonte e usando (a) uma entrada de alicate em série com o capacitor e (b) uma entrada de soldagem através do capacitor. (*Nota:* não cancele o pólo e o zero comum,  $s = -3$ .)  
*Resposta:*  $-1; -2; -3$
- 14.7.3 Calcule a função de rede  $Z(s)$  com uma entrada de soldagem através do resistor de  $6\text{-}\Omega$  da Fig. 14.9 e use o resultado para encontrar as frequências naturais.  
*Resposta:*  $\frac{6s(s + 10)}{(s + 1)(s + 12)}$ ;  $-1, -12$

## 14.8

### Quadripolos

Uma das mais importantes aplicações do conceito de função de rede é na rede na qual os sinais de entrada e de saída são medidos em diferentes pares de terminais. O circuito mais simples e mais frequentemente encontrado para o qual isso é possível, é o *quadripolo* (rede de dois acessos ou entradas), um acesso sendo definido como um par de terminais no qual um sinal pode entrar ou sair. Um quadripolo genérico está representado na Fig. 14.10(b), contrapondo-se com o *bipolo* (rede de um acesso ou entrada) da Fig. 14.10(a).

Em geral, como visto na Fig. 14.10(b), um quadripolo tem quatro terminais distintos. É possível, naturalmente, que dois dos terminais sejam um único ponto. Neste caso teremos uma rede de três terminais ou *rede aterrada*. Um exemplo genérico deste caso está mostrado na Fig. 14.11.

Podemos associar dois pares de correntes e tensões com um quadripolo, como mostrado para o domínio da frequência na Fig. 14.12, com variáveis  $V_1(s)$ ,  $I_1(s)$ ,  $V_2(s)$  e  $I_2(s)$ . No caso de o circuito ser linear, estas variáveis podem ser relacionadas de diversas maneiras. Por exemplo, se  $I_1$  e  $I_2$  são as entradas e  $V_1$  e  $V_2$  as saídas, determinamos por superposição que tanto  $V_1$  quanto  $V_2$  tem componentes proporcionais

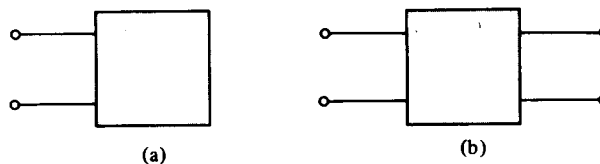


FIGURA 14.10 (a) Bipolo e (b) quadripolo

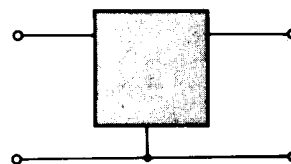


FIGURA 14.11 Quadripolo com três terminais

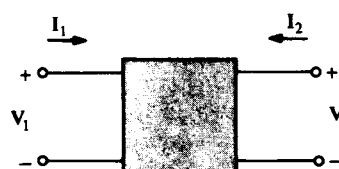


FIGURA 14.12 Quadripolo genérico

a  $I_1$  e  $I_2$ . Ou seja

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{aligned} \quad (14.34)$$

onde os  $z$ 's são fatores de proporcionalidade, que geralmente são funções de  $s$ .

Visto que os  $z$ 's multiplicam correntes para resultar em tensões, devem ser medidos em ohms. Portanto, são funções impedância. Podemos calcular os  $z$ 's a partir do circuito, abrindo o mesmo tanto na entrada 1 (com variáveis  $V_1$  e  $I_1$ ) como na entrada 2 (com variáveis  $V_2$  e  $I_2$ ). Por exemplo, se a entrada 2 é aberta ( $I_2 = 0$ ), então, de (14.34), teremos

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} \\ z_{21} &= \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} \end{aligned} \quad (14.35)$$

De modo similar, se a entrada 1 é aberta ( $I_1 = 0$ ), teremos

$$\begin{aligned} z_{12} &= \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} \\ z_{22} &= \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} \end{aligned} \quad (14.36)$$

Conseqüentemente, os  $z$ 's são chamados *impedâncias em circuito aberto*, *parâmetros em circuito aberto* ou simplesmente *parâmetros-z*. Em qualquer caso, são exemplos de funções de rede.

Por (14.35) e (14.36), vemos que  $z_{11}$  é a impedância vista na entrada *primária* (entrada 1) quando a entrada *secundária* (entrada 2) está aberta e  $z_{22}$  é a impedância vista do secundário quando o primário está aberto. Os parâmetros  $z_{12}$  e  $z_{21}$  são impedâncias de *transferência*, que são relações entre a tensão numa entrada e a corrente na outra.

### EXEMPLO 14.14

Como um exemplo, consideremos a rede de três terminais da Fig. 14.13. Devido à sua forma, é algumas vezes chamada uma rede T. Evidentemente, é simplesmente uma rede Y, como discutido no Capítulo 13. Para calcular  $z_{11}$  e  $z_{21}$ , abrimos a entrada 2 e excitamos a entrada 1 com uma fonte de corrente  $I_1$ . Visto que  $I_2 = 0$ , teremos

$$V_1 = (Z_1 + Z_3)I_1$$

e

$$V_2 = Z_3 I_1$$

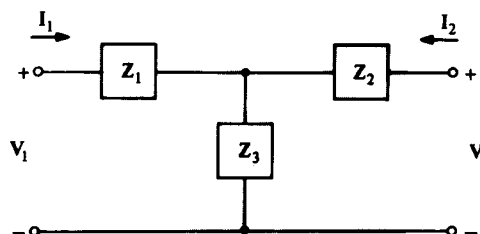


FIGURA 14.13 Rede T

Por conseguinte

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = Z_1 + Z_3$$

$$z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = Z_3$$

Os outros dois parâmetros são calculados de forma similar, com o primário aberto ( $I_1 = 0$ ) e o secundário excitado com uma fonte  $I_2$ . O resultado é

$$z_{11} = Z_1 + Z_3$$

$$z_{12} = z_{21} = Z_3$$

$$z_{22} = Z_2 + Z_3$$

(14.37)

### EXEMPLO 14.15

Como outro exemplo, calculemos os parâmetros  $z$  para o circuito fasorial da Fig. 14.14. Ilustraremos o procedimento deste caso escrevendo simplesmente as duas equações de laço

$$V_1 = 2I_2 + \left(4 + \frac{4}{s}\right)I_1 + \frac{2}{s}(I_1 + I_2)$$

$$V_2 = \left(6 + \frac{2}{s}\right)I_2 + \frac{2}{s}(I_1 + I_2)$$

ou

$$V_1 = \left(4 + \frac{6}{s}\right)I_1 + \left(2 + \frac{2}{s}\right)I_2$$

$$V_2 = \frac{2}{s}I_1 + \left(6 + \frac{4}{s}\right)I_2$$

Comparando estes resultados com a definição (14.34), os parâmetros  $z$ , os coeficientes das correntes nas duas últimas equações são dados por

$$z_{11} = 4 + \frac{6}{s}$$

$$z_{12} = 2 + \frac{2}{s}$$

$$z_{21} = \frac{2}{s}$$

$$z_{22} = 6 + \frac{4}{s}$$

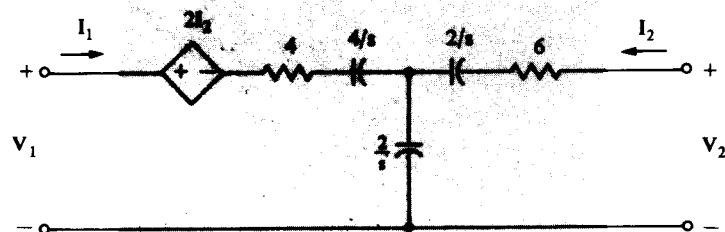


FIGURA 14.14 Quadripolo

Podemos encontrar outro conjunto de parâmetros considerando  $V_1$  e  $V_2$  como entradas e  $I_1$  e  $I_2$  como saídas, na Fig. 14.12. Neste caso, teremos, por superposição,

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 &= y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{aligned} \quad (14.38)$$

onde, evidentemente, os fatores de proporcionalidade são admitâncias dadas por

$$\begin{aligned} y_{11} &= \frac{I_1}{V_1} \Big|_{v_2=0} \\ y_{12} &= \frac{I_1}{V_2} \Big|_{v_1=0} \\ y_{21} &= \frac{I_2}{V_1} \Big|_{v_2=0} \\ y_{22} &= \frac{I_2}{V_2} \Big|_{v_1=0} \end{aligned} \quad (14.39)$$

Conseqüentemente, os  $y$ 's são *admitâncias em curto-circuito* ( $V_1$  ou  $V_2 = 0$ ), ou *parâmetros em curto-circuito*, ou simplesmente *parâmetros- $y$* .

Os parâmetros  $y_{11}$  e  $y_{22}$  são admitâncias vistas de uma entrada, com a outra entrada curto-circuitada, e  $y_{12}$  e  $y_{21}$  são admitâncias de transferência ou relações entre a corrente de uma entrada pela tensão na outra, nas condições apropriadas de curto-circuito.

### EXEMPLO 14.16

Como um exemplo, calculemos os parâmetros  $y$  do circuito de três terminais da Fig. 14.15. Devido à sua configuração, este circuito é algumas vezes chamado de circuito  $\pi$ . Evidentemente, é simplesmente um  $\Delta$ , como estudado no Capítulo 13. Se o secundário for curto-circuitado ( $V_2 = 0$ ),  $Y_c$  é curto-circuitado, resultando  $Y_a$  e  $Y_b$  em paralelo. Portanto

$$y_{11} = Y_a + Y_b$$

Também neste caso,  $-I_2$  circula para a direita, através de  $Y_b$ , de forma que

$$-I_2 = Y_b V_1$$

ou

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = -Y_b$$

Os outros dois  $y$ 's podem ser encontrados de forma similar, com o primário curto-circuitado. O resultado é

$$\begin{aligned} y_{11} &= Y_a + Y_b \\ y_{12} &= y_{21} = -Y_b \\ y_{22} &= Y_b + Y_c \end{aligned} \quad (14.40)$$

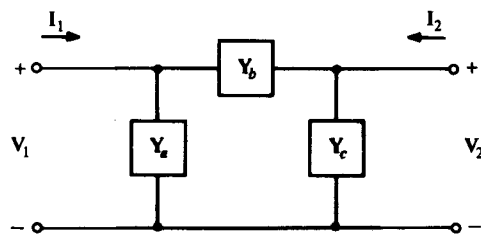


FIGURA 14.15 O circuito  $\pi$

Se  $z_{12} = z_{21}$  (ou, de forma equivalente,  $y_{12} = y_{21}$ ), a rede é uma rede *recíproca*. Isso é sempre o caso quando os elementos dentro da caixa da rede da Fig. 14.12 são resistores, indutores e capacitores. Exemplos, como vemos de (14.37) e (14.40), são os circuitos das Figs. 14.13 e 14.15. A rede da Fig. 14.14 contém uma fonte dependente, e é *não-recíproca*, pois  $z_{12}$  é diferente de  $z_{21}$ .

Os parâmetros  $z$  e  $y$  são dois conjuntos de parâmetros associados com um bipolo. Outros dois conjuntos são os *parâmetros híbridos*,  $h_{11}$ ,  $h_{12}$ ,  $h_{21}$ ,  $h_{22}$  e  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{21}$ ,  $g_{22}$ , que são também muito importantes, especialmente em circuitos eletrônicos. Eles são definidos, respectivamente, por

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{aligned} \quad (14.41)$$

e

$$\begin{aligned} I_1 &= g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \\ V_2 &= g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \end{aligned} \quad (14.42)$$

São chamados parâmetros híbridos porque relacionam uma mistura de uma corrente e tensão a outra corrente e tensão, em lugar de duas correntes a duas tensões, ou vice-versa. De (14.41) e (14.42), vemos que

$$\begin{aligned} h_{11} &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} \\ h_{12} &= \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} \\ h_{21} &= \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} \\ h_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} \end{aligned} \quad (14.43)$$

e

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{I_2=0} \\ g_{12} &= \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_1=0} \\ g_{21} &= \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0} \\ g_{22} &= \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{V_1=0} \end{aligned} \quad (14.44)$$

Portanto,  $h_{11}$  é a impedância no primário quando o secundário é curto-circuitado,  $h_{12}$  é a função de transferência de ganho de tensão quando o primário é um circuito aberto,  $h_{21}$  é a função de transferência de ganho de corrente quando o secundário é curto-circuitado, e  $h_{22}$  é a admitância no secundário quando o primário é um circuito aberto. Podemos, evidentemente analisar os  $g$ 's de modo análogo.

### EXEMPLO 14.17

Como um exemplo, vamos calcular os parâmetros  $h$  para o circuito da Fig. 14.13, se  $Z_1 = 6 \Omega$ ,  $Z_2 = 8 \Omega$  e  $Z_3 = 10 \Omega$ . A partir dos  $z$ 's calculados em (14.37), sabemos que

$$\begin{aligned} V_1 &= 16I_1 + 10I_2 \\ V_2 &= 10I_1 + 18I_2 \end{aligned} \quad (14.45)$$

Se substituirmos o valor de  $I_2$  da segunda das equações acima na primeira, teremos

$$V_1 = 16I_1 + 10 \left[ \frac{V_2 - 10I_1}{18} \right]$$

que simplifica em

$$V_1 = \frac{94}{9}I_1 + \frac{5}{9}V_2$$

Resolvendo a segunda das equações de (14.45) para  $I_2$ , teremos

$$I_2 = -\frac{5}{9}I_1 + \frac{1}{18}V_2$$

Comparando estes dois últimos resultados com a definição (14.41) dos  $h$ 's, teremos

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{94}{9} \\ h_{12} &= \frac{5}{9} \\ h_{21} &= -\frac{5}{9} \\ h_{22} &= \frac{1}{18} \end{aligned} \tag{14.46}$$

Outro conjunto de parâmetros do quadripolo são os parâmetros de *transmissão*, **A**, **B**, **C** e **D**, definidos, para o quadripolo genérico, como

$$\begin{aligned} V_1 &= \mathbf{A}V_2 - \mathbf{B}I_2 \\ I_1 &= \mathbf{C}V_2 - \mathbf{D}I_2 \end{aligned} \tag{14.47}$$

Estas equações são importantes para os engenheiros de transmissão, pois expressam as variáveis primárias  $V_1$  e  $I_1$  (emissor) em termos das variáveis secundárias  $V_2$  e  $-I_2$  (receptor). (O sinal negativo de  $I_2$  expressa que a corrente entra na carga do receptor). Evidentemente, de (14.47), podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \\ \mathbf{B} &= \left. \frac{V_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} \\ \mathbf{C} &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \\ \mathbf{D} &= \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} \end{aligned} \tag{14.48}$$

Por conseguinte, **A** é uma relação de tensão, **C** é uma admitância de transferência, com o secundário aberto, **B** é uma impedância de transferência e **D** é uma relação de corrente, com o secundário curto-circuitado.

Um segundo conjunto de parâmetros de transmissão pode ser definido relacionando  $V_2$  e  $I_2$  em termos de  $V_1$  e  $-I_1$ . Este conjunto será mostrado no Ex. 14.8.5.

A demonstração dos parâmetros  $h$  de (14.46) sugere um método geral de se obter um conjunto



de parâmetros a partir do outro. Por exemplo, se resolvermos (14.38) para os  $V$ 's, teremos

$$V_1 = \frac{y_{22}}{\Delta_Y} I_1 + \frac{-y_{12}}{\Delta_Y} I_2 \quad (14.49)$$

$$V_2 = \frac{-y_{21}}{\Delta_Y} I_1 + \frac{y_{11}}{\Delta_Y} I_2$$

onde  $\Delta_Y$  é o determinante,

$$\Delta_Y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21} \quad (14.50)$$

Comparando esse resultado com (14.34), teremos os parâmetros  $z$  em função dos parâmetros  $y$ :

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{y_{22}}{\Delta_Y} & z_{12} &= \frac{-y_{12}}{\Delta_Y} \\ z_{21} &= \frac{-y_{21}}{\Delta_Y} & z_{22} &= \frac{y_{11}}{\Delta_Y} \end{aligned} \quad (14.51)$$

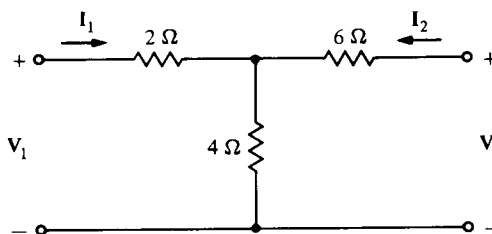
A Tabela 14.1 é uma compilação de fórmulas de conversão, relacionando um conjunto de parâmetros do quadripolo com os outros conjuntos, para os quatro casos mais importantes. Os parâmetros estão em forma matricial e cada linha da tabela dá um dos parâmetros em termos dos outros três. Por exemplo, (14.51) está representada pela segunda matriz da primeira linha. Comparando os termos correspondentes na primeira matriz com os da segunda matriz desta linha nos dá (14.51). Os determinantes  $\Delta_z$ ,  $\Delta_Y$ ,  $\Delta_H$  e  $\Delta_T$  são os de  $z$ ,  $y$ ,  $h$  e das matrizes de transmissão, respectivamente.

**TABELA 14.1** Fórmulas de Conversão dos Parâmetros do Quadripolo

$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{y_{22}}{\Delta_Y} & \frac{-y_{12}}{\Delta_Y} \\ \frac{-y_{21}}{\Delta_Y} & \frac{y_{11}}{\Delta_Y} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta_T}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_H}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ \frac{-h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \frac{z_{22}}{\Delta_Z} & \frac{-z_{12}}{\Delta_Z} \\ \frac{-z_{21}}{\Delta_Z} & \frac{z_{11}}{\Delta_Z} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{D}{B} & \frac{-\Delta_T}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{h_{11}} & \frac{-h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta_H}{h_{11}} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{\Delta_Z} & \frac{\Delta_Z}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -y_{22} & -1 \\ y_{21} & y_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-\Delta_H}{h_{21}} & \frac{-h_{11}}{h_{21}} \\ \frac{-h_{22}}{h_{21}} & \frac{-1}{h_{21}} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_Y}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ \frac{-z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{y_{11}} & \frac{-y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{\Delta_Y}{y_{11}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta_T}{D} \\ -\frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$

## EXERCÍCIOS

- 14.8.1** Calcule os parâmetros  $z$  e os parâmetros  $ABCD$  do circuito mostrado na figura abaixo.  
Resposta  $z_{11} = 6$ ,  $z_{12} = z_{21} = 4$ ,  $z_{22} = 10 \Omega$ ;  $A = 3/2$ ,  $B = 11 \Omega$ ,  $C = 1/4 \text{ S}$ ,  $D = 5/2$



**EXERCÍCIO 14.8.1**

**14.8.2** Mostre que os parâmetros  $y$  podem ser obtidos a partir dos parâmetros  $z$  por

$$y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta_Z}, \quad y_{12} = -\frac{z_{12}}{\Delta_Z}$$

$$y_{21} = -\frac{z_{21}}{\Delta_Z}, \quad y_{22} = \frac{z_{11}}{\Delta_Z}$$

onde  $\Delta_Z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$ . (Isso é dado na primeira coluna da segunda linha da Tabela 14.1.) Use esse resultado para calcular os parâmetros  $y$  do circuito do Ex. 14.8.1.

*Resposta:*  $y_{11} = \frac{5}{22}$ ,  $y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{11}$ ,  $y_{22} = \frac{3}{22}$  S

**14.8.3** Calcule os parâmetros  $h$  e  $g$  da rede do Ex. 14.8.1.

*Resposta:*  $h$ 's:  $\frac{44}{10}$ ,  $\frac{4}{10}$ ,  $-\frac{4}{10}$ ,  $\frac{1}{10}$       $g$ 's:  $\frac{1}{6}$ ,  $-\frac{4}{6}$ ,  $\frac{4}{6}$ ,  $\frac{44}{6}$

**14.8.4** Com o uso da Tabela 14.1, calcule as condições de (a) os parâmetros  $h$  (b) os parâmetros de transmissão, para esse circuito ser recíproco ( $z_{12} = z_{21}$ ).

*Resposta:* (a)  $h_{12} = -h_{21}$ , (b)  $\Delta_T = 1$

**14.8.5** Um segundo conjunto de parâmetros de transmissão pode ser definido, exprimindo as variáveis de saída em termos das variáveis de entrada, por

$$V_2 = aV_1 - bI_1$$

$$I_2 = cV_1 - dI_1$$

Calcule os parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  em função dos outros parâmetros de transmissão  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ .

*Resposta:*  $a = \frac{D}{\Delta_T}$ ,  $b = \frac{B}{\Delta_T}$ ,  $c = \frac{C}{\Delta_T}$ ,  $d = \frac{A}{\Delta_T}$

## 14.9

### Aplicações dos Parâmetros dos Quadripolos

Os parâmetros dos quadripolos das seções anteriores são úteis de diversas formas, como veremos nessa seção. Seu primeiro uso será para obter várias funções de rede.

**EXEMPLO 14.18** Por exemplo, se o acesso 2 está aberto ( $I_2 = 0$ ), então, de (14.34), podemos calcular a função de ganho de tensão

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21}}{z_{11}} \quad (14.52)$$

Também, para o secundário curto-circuitado ( $V_2 = 0$ ), podemos escrever, usando (14.38)

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{y_{21}}{y_{11}} \quad (14.53)$$

**EXEMPLO 14.19** Como outro exemplo, vamos determinar a função de ganho de corrente para o quadripolo carregado com  $1 \Omega$ , como mostrado na Fig. 14.16. Evidentemente, temos que  $V_2 = -I_2$ , o que, substituído na



**FIGURA 14.16** Quadripolo carregado com um resistor de  $1\text{-}\Omega$

segunda equação de (14.34), conduz, após algumas simplificações, a

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-z_{21}}{1 + z_{22}} \quad (14.54)$$

Se fizermos a mesma substituição ( $-I_2$  por  $V_2$ ) em (14.38), teremos o ganho de tensão

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-y_{21}}{1 + y_{22}} \quad (14.55)$$

### EXEMPLO 14.20

Como outro exemplo, calculemos a função de transferência  $I_2/I_1$  para o circuito da Fig. 14.14, se um resistor de  $1\text{-}\Omega$  for conectado ao secundário. Já calculamos previamente que

$$z_{21} = \frac{2}{s}$$

$$z_{22} = 6 + \frac{4}{s}$$

de forma que, por (14.54), a função de transferência é

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-2/s}{1 + \left(6 + \frac{4}{s}\right)} = \frac{-2}{7s + 4}$$

### EXEMPLO 14.21

Como outro exemplo, para a rede  $\pi$  da Fig. 14.17, podemos escrever, por inspeção, os parâmetros,

$$y_{21} = -\frac{1}{2s}$$

$$y_{22} = s + \frac{1}{2s}$$

de forma que, por (14.55), o ganho de tensão é

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1/2s}{1 + \left(s + \frac{1}{2s}\right)} = \frac{1}{2s^2 + 2s + 1}$$

A seguir estudaremos o quadripolo *com terminação dupla*, como indicado na Fig. 14.18. A impedância da carga nos terminais de saída é  $Z_L$ , e  $Z_g$ , nos terminais de entrada, é a impedância interna da fonte  $V_g$ . Se  $Z_g = 0$  e  $Z_L = 1$ , teremos o caso da Fig. 14.16.

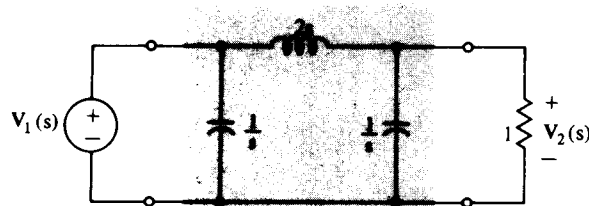


FIGURA 14.17 Quadripolo LC terminado em  $1\Omega$

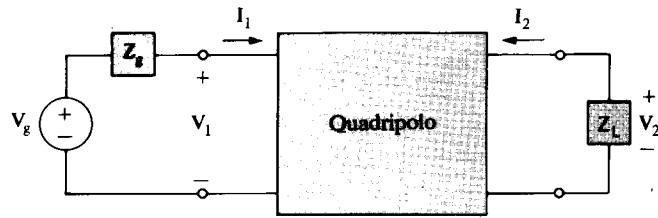


FIGURA 14.18 Quadripolo com terminação dupla

A partir do circuito, podemos escrever

$$I_2 = \frac{-V_2}{Z_L}$$

e

$$V_1 = V_g - Z_g I_1$$

que, substituído em (14.34), dá

$$\begin{aligned} V_g - Z_g I_1 &= z_{11} I_1 - \frac{z_{12}}{Z_L} V_2 \\ V_2 &= z_{21} I_1 - \frac{z_{22}}{Z_L} V_2 \end{aligned} \quad (14.56)$$

Se resolvermos cada uma destas equações para  $I_1$ , teremos

$$I_1 = \frac{V_g + (z_{12}/Z_L)V_2}{z_{11} + Z_g} = \frac{V_2 + (z_{22}/Z_L)V_2}{z_{21}}$$

Dos dois últimos termos, podemos resolver para a função de ganho de tensão

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{z_{21} Z_L}{(z_{11} + Z_g)(z_{22} + Z_L) - z_{12} z_{21}} \quad (14.57)$$

Se dividirmos os dois lados de (14.57) por  $-Z_L$ , teremos a função de transferência admitância

$$\frac{I_2}{V_g} = \frac{-z_{21}}{(z_{11} + Z_g)(z_{22} + Z_L) - z_{12} z_{21}} \quad (14.58)$$

Outra que pode ser facilmente deduzida em função dos parâmetros  $z$  é a função de ganho de corrente,

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-z_{21}}{z_{22} + Z_L} \quad (14.59)$$

a função de transferência impedância,

$$\frac{V_2}{I_1} = \frac{z_{21} Z_L}{z_{22} + Z_L} \quad (14.60)$$

e a impedância de entrada,

$$Z_{in} = \frac{V_g}{I_1} = z_{11} + Z_g - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{22} + Z_L} \quad (14.61)$$

Estas mesmas funções, juntamente com várias outras, podem ser também deduzidas em função dos outros parâmetros do quadripolo. Vamos considerar algumas destas deduções nos exercícios e problemas.

**EXEMPLO 14.22**

Para ilustrar o uso de (14.57), vamos calcular a função de ganho de tensão para o circuito da Fig. 14.19. Por inspeção, temos

$$z_{11} = s + \frac{2}{3s}$$

$$z_{12} = z_{21} = \frac{2}{3s}$$

$$z_{22} = 2s + \frac{2}{3s}$$

$$Z_g = 1$$

$$Z_L = 2$$

que, substituída em (14.57), dá

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{2/3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

Outro uso dos parâmetros do quadripolo é na construção de circuitos equivalentes. Por exemplo, na primeira equação de (14.34),  $V_1$  é a soma de dois termos,  $z_{11}I_1$  e  $z_{12}I_2$ . O primeiro pode ser obtido por uma impedância  $z_{11}$  conduzindo uma corrente  $I_1$  e o segundo pode ser obtido por uma fonte dependente de tensão controlada por  $I_2$ . De modo análogo, podemos interpretar a segunda equação de (14.34) e traçar o circuito representado por estas equações. O resultado, como pode ser verificado por inspeção, está indicado na Fig. 14.20. Dizemos que este circuito é equivalente (nos terminais) ao da Fig. 14.12, porque eles têm os mesmos parâmetros de quadripolo. Desta forma, se as correntes nos acessos são iguais, então as tensões nos acessos serão as mesmas, e vice-versa, para as duas redes.

Se o circuito da Fig. 14.12 for uma rede recíproca ( $z_{12} = z_{21}$ ), então um circuito equivalente mais simples e passivo pode ser encontrado resolvendo-se (14.37) para  $Z_1, Z_2, Z_3$ . O resultado, substituído

$$Z_3 = z_{12}$$

$$Z_1 = z_{11} - Z_3 = z_{11} - z_{12}$$

$$Z_2 = z_{22} - Z_3 = z_{22} - z_{12}$$

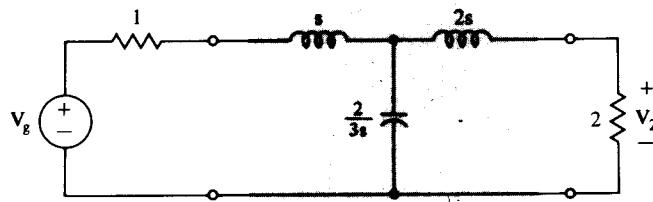


FIGURA 14.19 Quadripolo terminado por dois resistores

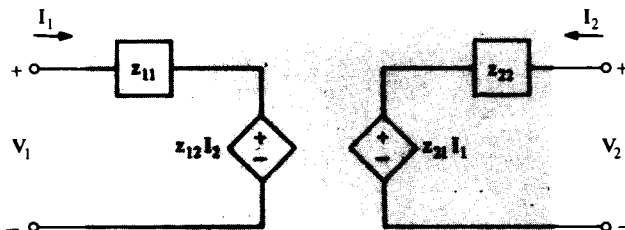


FIGURA 14.20 Circuito equivalente da Fig. 14.12

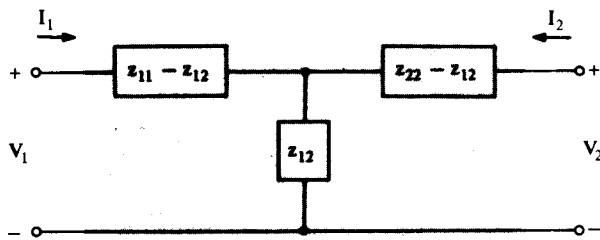


FIGURA 14.21 Circuito equivalente de uma rede genérica de três terminais, recíproca

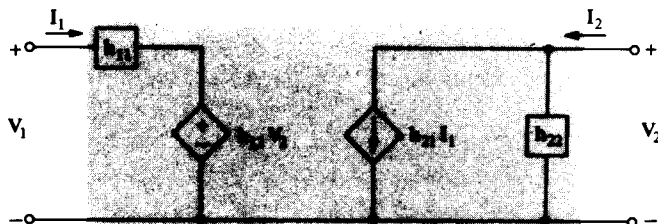


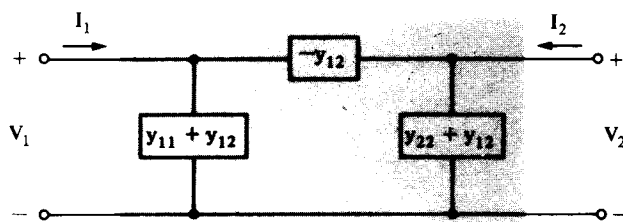
FIGURA 14.22 Circuito equivalente do quadripolo genérico de três terminais, usando parâmetros  $h$

na Fig. 14.13, produz o circuito equivalente passivo indicado na Fig. 14.21. É um circuito equivalente para uma rede genérica de três terminais, recíproca.

Muitos outros circuitos equivalentes ao quadripolo genérico podem ser obtidos a partir das equações de definição dos parâmetros do quadripolo. Por exemplo, o circuito da Fig. 14.22 é outro de tais circuitos equivalentes, usando parâmetros  $h$ , como o leitor deve verificar no Ex. 14.9.4. Este é um circuito equivalente muito usado, freqüentemente empregado para representar um transistor.

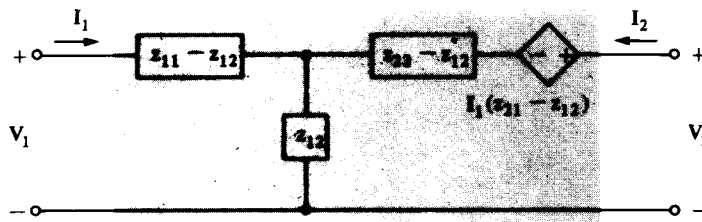
## EXERCÍCIOS

- 14.9.1 Calcule a função de transferência de ganho de tensão para o quadripolo terminado em  $1 \Omega$ , mostrado na Fig. 14.16, com parâmetros  $z$ :  $z_{11} = 6 \Omega$ ,  $z_{12} = z_{21} = 4 \Omega$  e  $z_{22} = 10 \Omega$ .  
Resposta: 2/25
- 14.9.2 Demonstre que o circuito dado é equivalente à rede recíproca genérica de três terminais, mostrando que (14.38) se aplica.



EXERCÍCIO 14.9.2

- 14.9.3 Demonstre que o circuito dado é equivalente ao quadripolo genérico



EXERCÍCIO 14.9.3

## 14.10

### Associações de Quadripolos

Os quadripolos das seções anteriores podem ser usados como blocos para se projetar circuitos mais complexos. Ou seja, subseções podem ser projetadas como quadripolos e então ser associadas para formar um circuito completo. Nesta seção, consideraremos algumas destas associações e veremos como o circuito completo pode ser analisado, analisando-se os quadripolos que o compõem.

A primeira associação que estudaremos é a da Fig. 14.23(a), que é chamada de uma associação *paralela*, por razões que ficarão claras mais tarde. A associação em paralelo de dois quadripolos aterrados é mostrada na Fig. 14.23(b). No trabalho que segue, desejamos que cada subrede mantenha sua integridade como quadripolo, o que será verdadeiro na Fig. 14.23(a) se as correntes que entram nos terminais superiores de cada quadripolo saírem nos terminais inferiores. Para se certificar disso em certos casos, pode haver necessidade de se instalar um *transformador ideal* (a ser estudado no Capítulo 16) em um dos quatro acessos. De qualquer forma, a integridade dos quadripolos no caso aterrado da Fig. 14.23(b) é sempre mantida, porque os terminais inferiores (aterrados) são comuns às subredes e à rede completa.

Da Fig. 14.23(a), podemos escrever

$$\mathbf{I}_{1a} = \mathbf{y}_{11a} \mathbf{V}_{1a} + \mathbf{y}_{12a} \mathbf{V}_{2a}$$

$$\mathbf{I}_{2a} = \mathbf{y}_{21a} \mathbf{V}_{1a} + \mathbf{y}_{22a} \mathbf{V}_{2a}$$

e

$$\mathbf{I}_{1b} = \mathbf{y}_{11b} \mathbf{V}_{1b} + \mathbf{y}_{12b} \mathbf{V}_{2b}$$

$$\mathbf{I}_{2b} = \mathbf{y}_{21b} \mathbf{V}_{1b} + \mathbf{y}_{22b} \mathbf{V}_{2b}$$

onde

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{1a} = \mathbf{V}_{1b}$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{2a} = \mathbf{V}_{2b}$$

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{1a} + \mathbf{I}_{1b}$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{2a} + \mathbf{I}_{2b}$$

Combinando-se estes resultados, teremos

$$\mathbf{I}_1 = (\mathbf{y}_{11a} + \mathbf{y}_{11b}) \mathbf{V}_1 + (\mathbf{y}_{12a} + \mathbf{y}_{12b}) \mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{I}_2 = (\mathbf{y}_{21a} + \mathbf{y}_{21b}) \mathbf{V}_1 + (\mathbf{y}_{22a} + \mathbf{y}_{22b}) \mathbf{V}_2$$

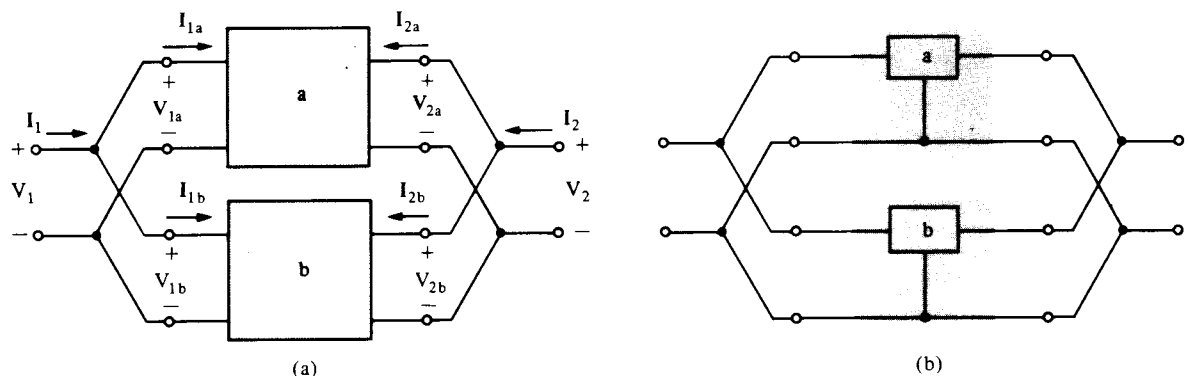


FIGURA 14.23 Associação paralela de (a) dois quadripolos genéricos e (b) dois quadripolos aterrados

Portanto, vemos que os parâmetros  $y$  da associação são as somas dos parâmetros  $y$  de cada subrede. Ou seja,

$$\begin{aligned} y_{11} &= y_{11a} + y_{11b}, & y_{12} &= y_{12a} + y_{12b} \\ y_{21} &= y_{21a} + y_{21b}, & y_{22} &= y_{22a} + y_{22b} \end{aligned} \quad (14.62)$$

O fato de que as admitâncias se somam, como fazem para elementos de circuitos em paralelo, é a razão do nome *associação paralela*.

**EXEMPLO 14.23**

Como um exemplo, calculemos a função de transferência  $V_2/V_g$  no circuito da Fig. 14.24, que é uma associação paralela de dois quadripolos terminando em resistores de  $1 \Omega$ . Por inspeção, teremos

$$y_{21} = y_{21a} + y_{21b} = -\frac{1}{s} - s$$

$$y_{22} = y_{22a} + y_{22b} = s + \frac{1}{s} + 1 + s = 2s + 1 + \frac{1}{s}$$

Por conseguinte, por (14.55), teremos

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{(1/s) + s}{1 + \left(2s + 1 + \frac{1}{s}\right)} = \frac{s^2 + 1}{2s^2 + 2s + 1}$$

A conexão da Fig. 14.25(a) é uma *associação série* dos dois quadripolos  $a$  e  $b$ , assim chamada porque, como veremos, os parâmetros  $z$  se somam, da mesma forma que os parâmetros  $y$  fazem na associação

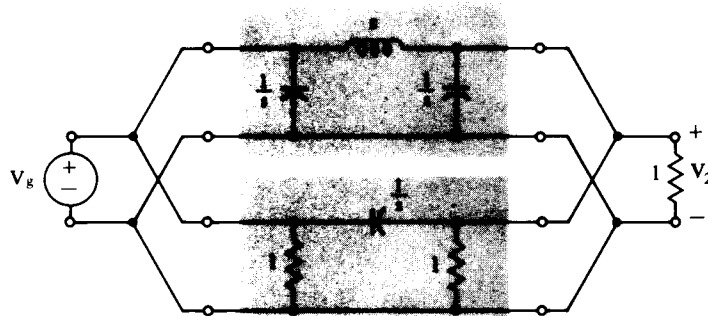


FIGURA 14.24 Associação paralela terminada em  $1 \Omega$

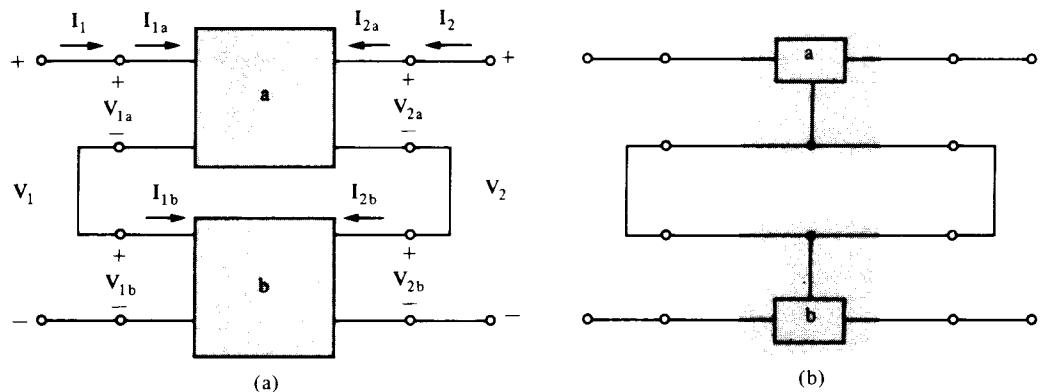


FIGURA 14.25 Associação série de (a) dois quadripolos genéricos e (b) dois quadripolos aterrados



paralela. Para os dois bipolos  $a$  e  $b$ , temos

$$\mathbf{V}_{1a} = \mathbf{z}_{11a} \mathbf{I}_{1a} + \mathbf{z}_{12a} \mathbf{I}_{2a}$$

$$\mathbf{V}_{2a} = \mathbf{z}_{21a} \mathbf{I}_{1a} + \mathbf{z}_{22a} \mathbf{I}_{2a}$$

e

$$\mathbf{V}_{1b} = \mathbf{z}_{11b} \mathbf{I}_{1b} + \mathbf{z}_{12b} \mathbf{I}_{2b}$$

$$\mathbf{V}_{2b} = \mathbf{z}_{21b} \mathbf{I}_{1b} + \mathbf{z}_{22b} \mathbf{I}_{2b}$$

Também, da figura, vemos que

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{1a} = \mathbf{I}_{1b}$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{2a} = \mathbf{I}_{2b}$$

e

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{1a} + \mathbf{V}_{1b} = (\mathbf{z}_{11a} + \mathbf{z}_{11b}) \mathbf{I}_1 + (\mathbf{z}_{12a} + \mathbf{z}_{12b}) \mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{2a} + \mathbf{V}_{2b} = (\mathbf{z}_{21a} + \mathbf{z}_{21b}) \mathbf{I}_1 + (\mathbf{z}_{22a} + \mathbf{z}_{22b}) \mathbf{I}_2$$

Por conseguinte, os parâmetros  $z$  do circuito completo são dados por

$\begin{aligned} \mathbf{z}_{11} &= \mathbf{z}_{11a} + \mathbf{z}_{11b}, & \mathbf{z}_{12} &= \mathbf{z}_{12a} + \mathbf{z}_{12b} \\ \mathbf{z}_{21} &= \mathbf{z}_{21a} + \mathbf{z}_{21b}, & \mathbf{z}_{22} &= \mathbf{z}_{22a} + \mathbf{z}_{22b} \end{aligned} \quad (14.63)$
--

Repetindo, estamos assumindo que os quadripolos da Fig. 14.25(a) mantêm sua integridade de quadripolos. Esse é sempre o caso da Fig. 14.25(b), onde as subredes são quadripolos aterrados.

A última conexão que estudaremos é a associação em *cascata* da Fig. 14.26, na qual a saída do quadripolo  $a$  é a entrada do quadripolo  $b$ . Da figura e da definição dos parâmetros de transmissão, vemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{V}_{1a} = \mathbf{A}_a \mathbf{V}_{2a} - \mathbf{B}_a \mathbf{I}_{2a} \\ &= \mathbf{A}_a \mathbf{V}_{1b} + \mathbf{B}_a \mathbf{I}_{1b} \\ &= \mathbf{A}_a (\mathbf{A}_b \mathbf{V}_{2b} - \mathbf{B}_b \mathbf{I}_{2b}) + \mathbf{B}_a (\mathbf{C}_b \mathbf{V}_{2b} - \mathbf{D}_b \mathbf{I}_{2b}) \\ &= (\mathbf{A}_a \mathbf{A}_b + \mathbf{B}_a \mathbf{C}_b) \mathbf{V}_{2b} - (\mathbf{A}_a \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_a \mathbf{D}_b) \mathbf{I}_{2b} \end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{V}_1 = (\mathbf{A}_a \mathbf{A}_b + \mathbf{B}_a \mathbf{C}_b) \mathbf{V}_2 - (\mathbf{A}_a \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_a \mathbf{D}_b) \mathbf{I}_2$$

De forma similar, usando a equação dos parâmetros de transmissão para  $\mathbf{I}_1$ , podemos obter

$$\mathbf{I}_1 = (\mathbf{C}_a \mathbf{A}_b + \mathbf{D}_a \mathbf{C}_b) \mathbf{V}_2 - (\mathbf{C}_a \mathbf{B}_b + \mathbf{D}_a \mathbf{D}_b) \mathbf{I}_2$$

Comparando estas duas últimas equações com (14.47), da rede completa, temos, para a associação em cascata,

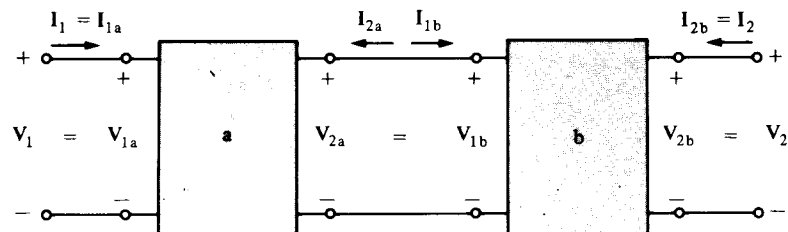


FIGURA 14.26 Associação em cascata de dois quadripolos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \mathbf{A}_a \mathbf{A}_b + \mathbf{B}_a \mathbf{C}_b \\
 \mathbf{B} &= \mathbf{A}_a \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_a \mathbf{D}_b \\
 \mathbf{C} &= \mathbf{C}_a \mathbf{A}_b + \mathbf{D}_a \mathbf{C}_b \\
 \mathbf{D} &= \mathbf{C}_a \mathbf{B}_b + \mathbf{D}_a \mathbf{D}_b
 \end{aligned}
 \tag{14.64}$$

O leitor familiarizado com multiplicações de matrizes reconhecerá esse resultado como uma declaração de que a matriz de transmissão da rede completa é o produto das matrizes de transmissão das redes  $a$  e  $b$ . Ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a & \mathbf{B}_a \\ \mathbf{C}_a & \mathbf{D}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_b & \mathbf{B}_b \\ \mathbf{C}_b & \mathbf{D}_b \end{bmatrix}
 \tag{14.65}$$

**EXEMPLO 14.24**

Como um exemplo, podemos mostrar que os parâmetros de transmissão dos quadripolos da Fig. 14.27(a) e (b) são, respectivamente,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_a &= 1 & \mathbf{B}_a &= \mathbf{Z}_a \\
 \mathbf{C}_a &= 0 & \mathbf{D}_a &= 1
 \end{aligned}
 \tag{14.66}$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_b &= 1 & \mathbf{B}_b &= 0 \\
 \mathbf{C}_b &= \mathbf{Y}_b & \mathbf{D}_b &= 1
 \end{aligned}
 \tag{14.67}$$

e, portanto, os de sua associação em cascata (c) são, por (14.64),

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= 1 + \mathbf{Z}_a \mathbf{Y}_b, & \mathbf{B} &= \mathbf{Z}_a \\
 \mathbf{C} &= \mathbf{Y}_b, & \mathbf{D} &= 1
 \end{aligned}
 \tag{14.68}$$

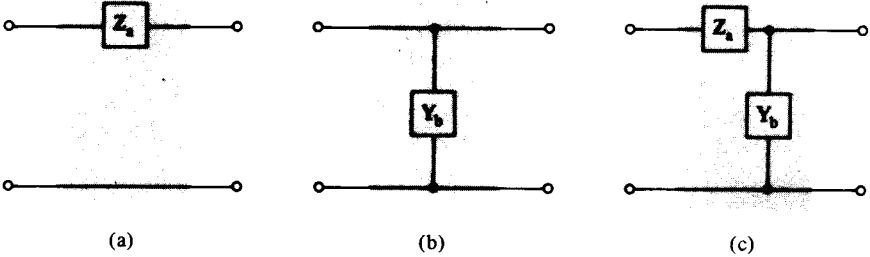


FIGURA 14.27 Dois quadripolos e sua associação em cascata

**EXEMPLO 14.25**

Podemos usar o resultado de (14.68) para calcular a função de transferência de ganho de tensão  $V_2/V_1$  para o circuito da Fig. 14.28. Como o leitor é solicitado a demonstrar no Prob. 14.33 para o quadripolo

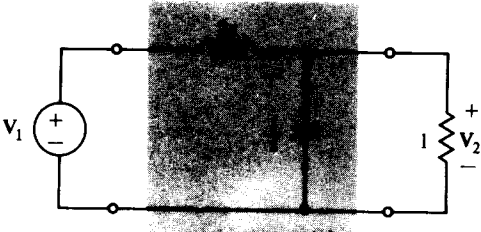


FIGURA 14.28 Quadripolo com terminação em 1 Ω

genérico terminado em  $1 \Omega$ , a função de transferência de tensão é

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{A + B} \quad (14.69)$$

O quadripolo nesse caso é similar ao da Fig. 14.27(c) com  $Z_a = 2s$  e  $Y_b = s$ . Por conseguinte, temos

$$A = 1 + 2s^2$$

$$B = 2s$$

de forma que

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2s^2 + 2s + 1}$$

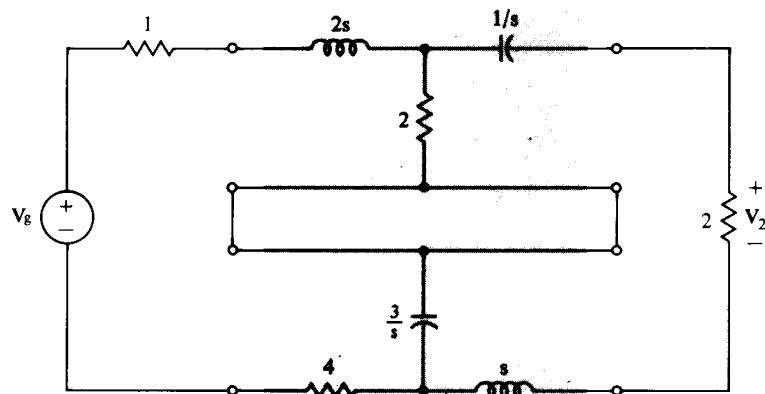
Existem duas outras associações de quadripolos que mencionaremos mas não vamos considerar em profundidade. A primeira é a associação *série-paralela*, na qual o primário é conectado como o primário da associação série da Fig. 14.25 e o secundário é conectado como a associação paralela da Fig. 14.23. A segunda é a associação *paralela-série*, na qual o primário é conectado em paralelo e o secundário é conectado em série. Se a integridade de cada quadripolo é mantida com as associações, os parâmetros  $h$  se somam para dar os parâmetros  $h$  totais na associação série-paralela e os parâmetros  $g$  se somam para dar os parâmetros  $g$  totais na associação paralela-série.

## EXERCÍCIOS

- 14.10.1** Calcule  $V_2/V_g$  para o circuito mostrado abaixo

Resposta:

$$\frac{4s^2 + 6s}{2s^4 + 15s^3 + 35s^2 + 28s + 3}$$



EXERCÍCIO 14.10.1

- 14.10.2** Use os parâmetros  $ABCD$  para calcular  $V_2/V_1$  para o quadripolo terminado em um resistor de  $1 \Omega$  se o quadripolo é a rede T da Fig. 14.13 com  $Z_1 = Z_2 = 2s$  e  $Z_3 = 1/s$ .

(Sugestão: Note que o quadripolo é o da Fig. 14.28 com a impedância  $2s$  acrescentada à saída.)

Resposta:

$$\frac{1}{4s^3 + 2s^2 + 4s + 1}$$

## PROBLEMAS

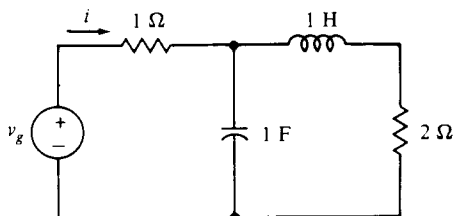
- 14.1** Calcule a representação fasorial  $V(s)$  e a frequência  $s$  de (a)  $v(t) = 5e^{-2t} \cos(10t - 30^\circ)$ ; (b)  $v(t) = e^{-t} \sin(5t + 45^\circ)$ ; (c)  $v(t) = 2e^{-3t} (3 \cos 3t + 4 \sin 3t)$  e (d)  $v(t) = 5e^{-8t}$ .
- 14.2** Calcule  $v(t)$ , se (a)  $V(s) = 6 \angle 10^\circ$  com  $s = -2 + j8$ ; (b)  $V(s) = 5 \angle 0^\circ$  com  $s = -10$ ; (c)  $V(s) = 4 + j3$  com  $s = -1 + j2$  e (d)  $V(s) = -j6$  com  $s = j4$ .

- 14.3 Calcule a admitância  $Y(s)$  vista pela fonte e coloque seus pólos e zeros. Se a fonte é  $v_g = 4e^{-t} \cos t$  V, calcule a resposta forçada  $i$ .
- 14.4 Calcule a impedância  $Z(s)$  vista pela fonte e coloque seus pólos e zeros. Se a fonte é  $v_g = 10e^{-2t} \cos 4t$  V, calcule a componente forçada da corrente que ela entrega.
- 14.5 Calcule a componente forçada de  $v_g$  no Prob. 14.4, se  $v_g = 16e^{-4t} \cos 2t$  V.
- 14.6 Demonstre que

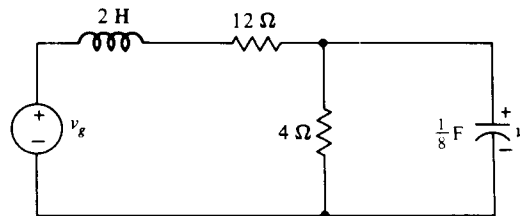
$$Y = Y_1 + \frac{1}{Z_2 + \frac{1}{Y_3 + \frac{1}{Z_4 + \frac{1}{Y_5}}}}$$

(Sugestão: Observe que  $Y = Y_1 + Y_u = Y_1 + 1/Z_u = Y_1 + 1/(Z_2 + Z_b)$  = ...)

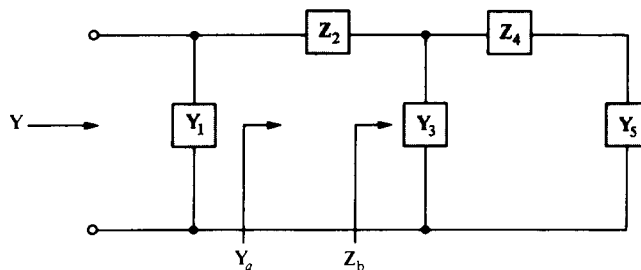
- 14.7 Use o método do Prob. 14.6 para calcular a impedância vista da fonte, e use o resultado para calcular a resposta forçada  $v$ .
- 14.8 No Prob. 14.7 calcule a função de rede  $H(s) = I(s)/I_g(s)$  por meio do princípio da proporcionalidade. Use o resultado para calcular a resposta forçada  $i$ .
- 14.9 Use o princípio da proporcionalidade para calcular a função de rede  $V_2/V_1$  e use o resultado para calcular a resposta forçada  $v_2(t)$ , quando  $v_1(t) = 4 \cos t$  V.
- 14.10 Se a fonte de tensão no Prob. 9.23 é  $v_g(t) = 6e^{-t} \cos 2t$  V, calcule a função de rede  $I(s)/V_g(s)$  e a resposta forçada  $i$  em cada caso.
- 14.11 Calcule  $H(s) = V(s)/V_g(s)$  e use o resultado para calcular a resposta forçada  $v$ , se  $v_g = e^{-2t} \cos 2t$  V.
- 14.12 Calcule a resposta forçada  $v$  usando a função de transferência, se  $v_g = 5e^{10t} \cos 20t$  V.
- 14.13 Calcule a função de rede  $V(s)/V_g(s)$  e use o resultado para calcular a resposta forçada  $v$ , se  $v_g = 6e^{-2t} \cos 4t$  V.
- 14.14 Calcule a função de rede e a resposta forçada  $v(t)$ , se  $v_g(t) = 6e^{-2t}$  V.
- 14.15 Calcule a função de rede  $V(s)/V_g(s)$  e a resposta forçada  $v$ , se  $v_g = 2e^{10t} \cos 5t$  V.



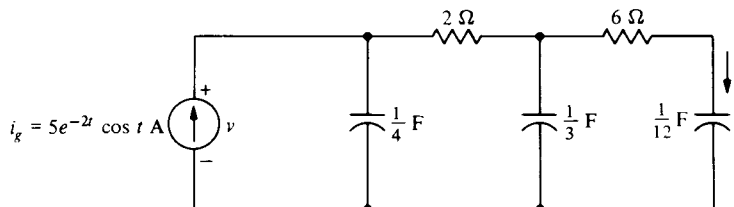
PROBLEMA 14.3



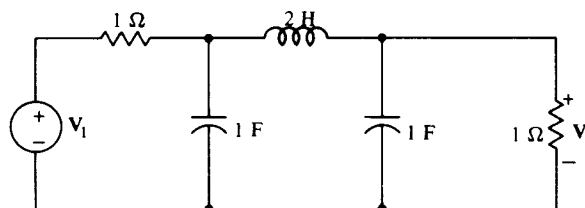
PROBLEMA 14.4



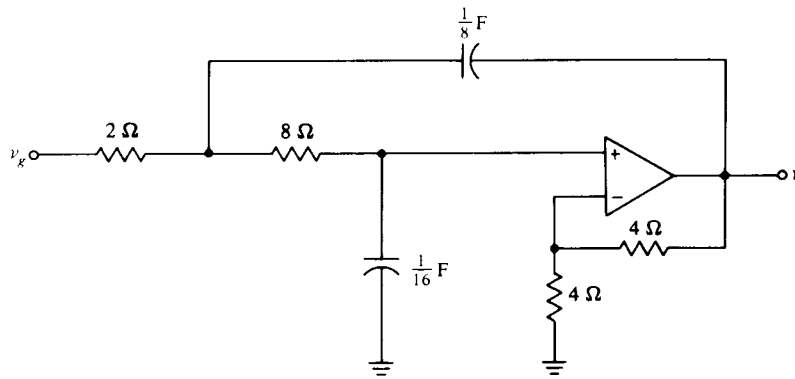
PROBLEMA 14.6



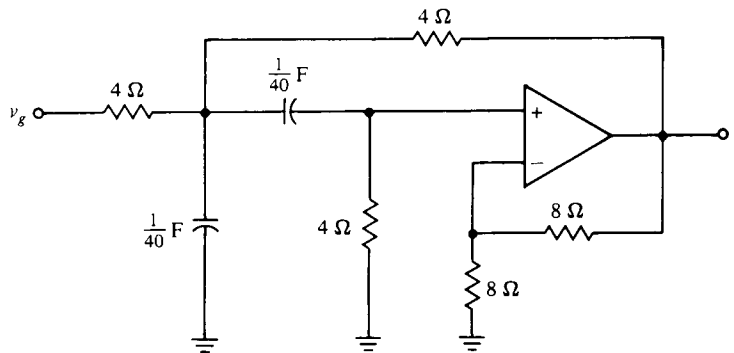
PROBLEMA 14.7



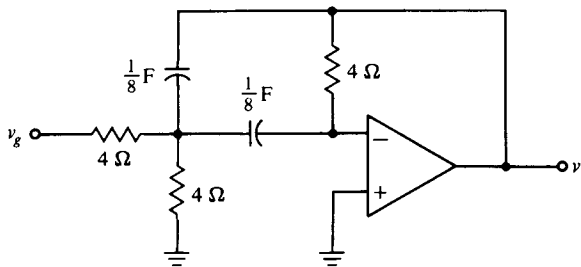
PROBLEMA 14.9



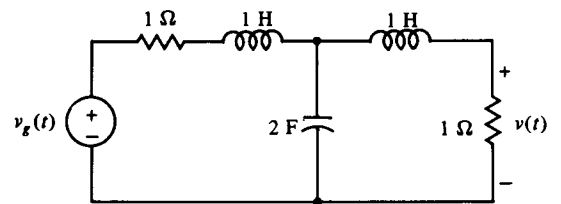
PROBLEMA 14.11



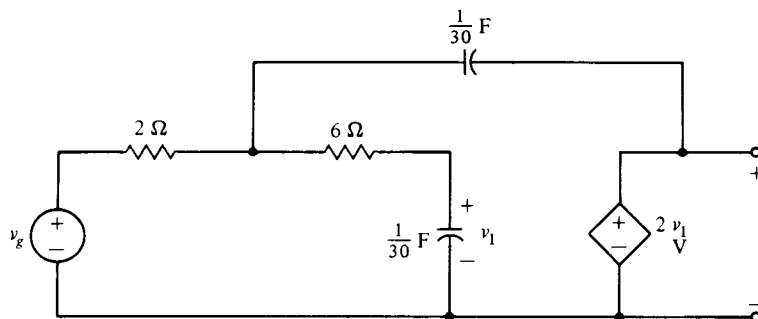
PROBLEMA 14.12



PROBLEMA 14.13



PROBLEMA 14.14



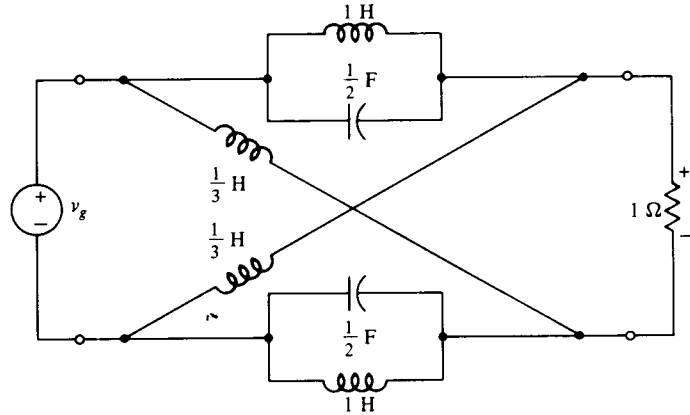
PROBLEMA 14.15

- 14.16 Calcule a função de rede  $V(s)/V_g(s)$  e a resposta forçada  $v$ , se (a)  $v_g = 6e^{-4t} \cos 2t$  V e (b)  $v_g = 6 \cos 2t$  V.
- 14.17 Calcule a função de rede  $V(s)/V_g(s)$  e a resposta forçada  $v$ , se  $v_g = 6e^{-4t} \cos 2t$  V.
- 14.18 Substitua tudo no circuito fasorial correspondente, exceto o indutor, por seu circuito equivalente Thévenin e use o resultado para calcular a resposta forçada  $i$ , se  $v_g = 4e^{-3t} \cos 3t$  V.
- 14.19 Para o circuito fasorial correspondente, substitua tudo à esquerda dos terminais  $a$ - $b$  por seu equivalente Thévenin e use o resultado para calcular a resposta forçada  $i$ .
- 14.20 Dada a função de rede

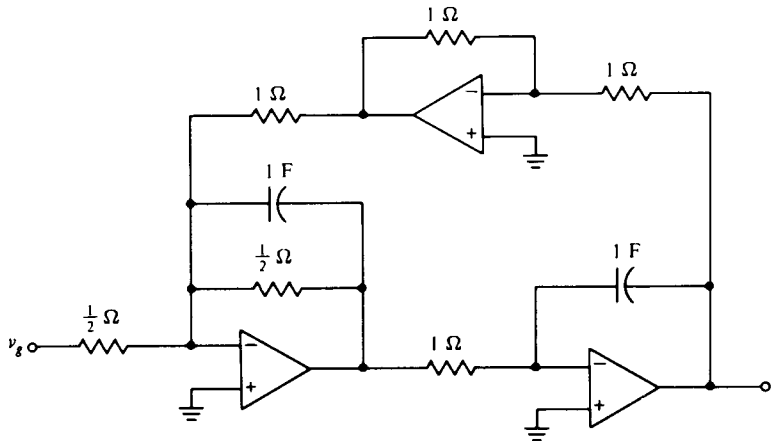
$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{4s(s+2)}{(s+1)(s+3)}$$

Se não ocorrer nenhum cancelamento, calcule a resposta completa  $v_o(t)$ , para  $t > 0$ , se  $v_i(t) = 6e^{-t} \cos 2t$  V e  $v_o(0^-) = dv_o(0^-)/dt = 0$ .

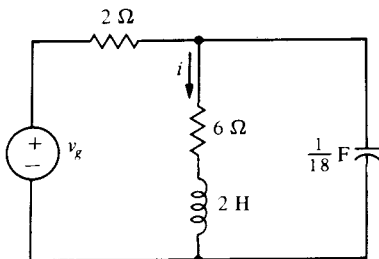
- 14.21 Repita o Prob. 14.20, se  $v_i(t) = 6e^{-t}$  V. (*Sugestão:* Observe a equação diferencial que representa o sistema.)
- 14.22 Calcule a resposta completa  $v$  para  $t > 0$ , usando a função de rede, se  $v(0^-)$  e  $dv(0^-)/dt$  são iguais a zero.
- 14.23 Calcule a resposta completa  $v$  se  $v(0) = 0$ . Use as funções de rede e superposição.
- 14.24 Calcule as frequências naturais em  $v$  no Prob. 14.22 eliminando a fonte e usando (a) a entrada do alicate com uma fonte de tensão inserida entre o capacitor e o resistor e (b) a entrada do soldador, com uma fonte de corrente através do resistor.
- 14.25 Considerando a figura do Prob. 14.22 como um quadripolo com



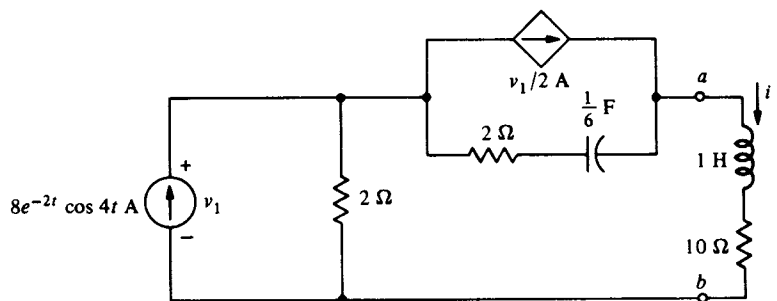
PROBLEMA 14.16



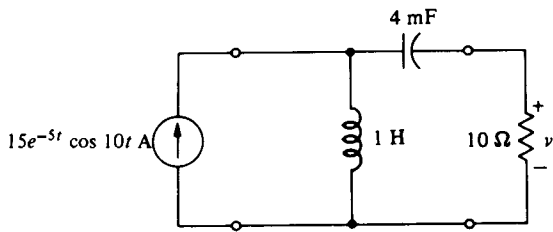
PROBLEMA 14.17



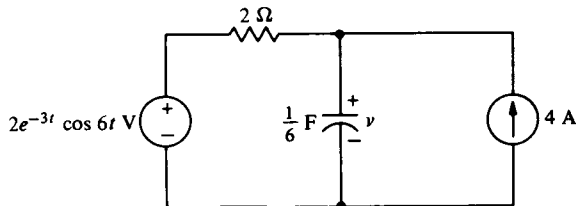
PROBLEMA 14.18



PROBLEMA 14.19



PROBLEMA 14.22



PROBLEMA 14.23

terminais como indicado, calcule os parâmetros  $z$  e  $y$  em função de  $s$ .

14.26 Calcule os parâmetros  $y$  no Prob. 14.16.

14.27 Mostre que os parâmetros híbridos definidos em (14.42) podem ser obtidos a partir dos parâmetros  $z$  por

$$g_{11} = \frac{1}{z_{11}}, \quad g_{12} = -\frac{z_{12}}{z_{11}}$$

$$g_{21} = \frac{z_{21}}{z_{11}}, \quad g_{22} = \frac{\Delta_Z}{z_{11}}$$

$$\text{onde } \Delta_Z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}.$$

14.28 Calcule os parâmetros  $h$  e  $g$  do quadripolo do Prob. 14.25.

14.29 Mostre que os parâmetros de transmissão,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , definidos para o quadripolo da Fig. 14.12 como

$$V_1 = AV_2 - BI_2$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2$$

são dados por

$$A = \frac{z_{11}}{z_{21}}, \quad B = \frac{\Delta_Z}{z_{21}}$$

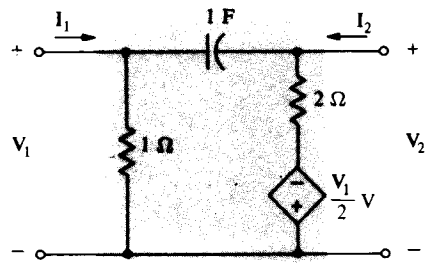
$$C = \frac{1}{z_{21}}, \quad D = \frac{z_{22}}{z_{21}}$$

(Essa é a primeira coluna da terceira linha da Tabela 14.1.)

14.30 Calcule os parâmetros de transmissão do quadripolo do Prob. 14.25.

14.31 Demonstre a transformação  $Y-\Delta$  do Capítulo 13 tornando as Figs. 14.13 e 14.14 equivalentes nos terminais (ou seja, com parâmetros do quadripolo iguais).

14.32 Calcule os parâmetros  $y$  da rede indicada. Coloque um resistor de  $1-\Omega$  nos terminais de saída e calcule a função de rede resultante  $V_2/V_1$ .



PROBLEMA 14.32

14.33 Mostre que, para a Fig. 14.16, em função dos parâmetros de transmissão, temos

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{A + B}$$

Confira o resultado, usando essa fórmula, para a rede com o resistor do Prob. 14.32.

14.34 Considere  $h_{11} = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $h_{12} = 10^{-4}$ ,  $h_{21} = 100$  e  $h_{22} = 10^{-4} \text{ S}$  na Fig. 14.22, calcule a função de rede  $V_2/V_1$ , se o acesso 2 é um circuito aberto.

14.35 Mostre que, para a rede com terminação dupla da Fig. 14.18, a função de transferência de ganho de tensão é dada pelas três equações

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{y_{21}Z_L}{y_{12}y_{21}Z_gZ_L - (1 + y_{11}Z_g)(1 + y_{22}Z_L)}$$

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{-h_{21}Z_L}{(h_{11} + Z_g)(1 + h_{22}Z_L) - h_{12}h_{21}Z_L}$$

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{Z_L}{(A + CZ_g)Z_L + B + DZ_g}$$

14.36 Use a segunda das fórmulas do Prob. 14.35 para calcular a função de transferência de ganho de tensão para uma rede com terminação dupla com  $h_{11} = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $h_{12} = 10^{-4}$ ,  $h_{21} = 100$ ,  $h_{22} = 10^{-4} \text{ S}$ ,  $Z_g = 360 \Omega$  e  $Z_L = 1 \text{ k}\Omega$ .

14.37 Mostre que o circuito dado é equivalente ao quadripolo genérico. Note como ele difere do circuito equivalente do Ex. 14.9.3.

14.38 Demonstre que os circuitos dados são equivalentes ao quadripolo genérico. Note como os dois circuitos diferem.

14.39 O circuito mostrado é uma *treliça* com dois braços em série iguais a  $Z_a$  e dois braços em cruz iguais a  $Z_b$ . Este circuito é chamado *treliça simétrica* porque os braços em série são iguais e os braços em cruz também são iguais. Mostre que os parâmetros  $z$  e  $y$  são dados por

$$z_{11} = z_{22} = \frac{1}{2}(Z_b + Z_a)$$

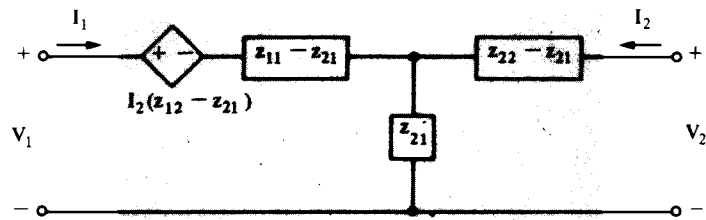
$$z_{12} = z_{21} = \frac{1}{2}(Z_b - Z_a)$$

$$y_{11} = y_{22} = \frac{1}{2}(Y_b + Y_a)$$

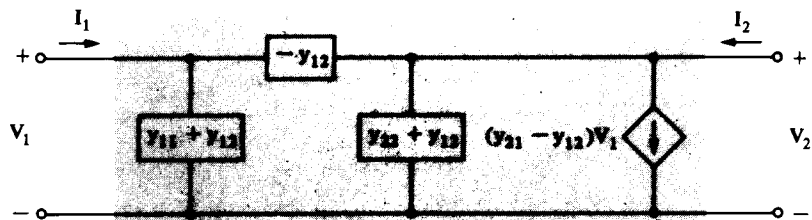
$$y_{12} = y_{21} = \frac{1}{2}(Y_b - Y_a)$$

onde  $Y_a = 1/Z_a$  e  $Y_b = 1/Z_b$ .

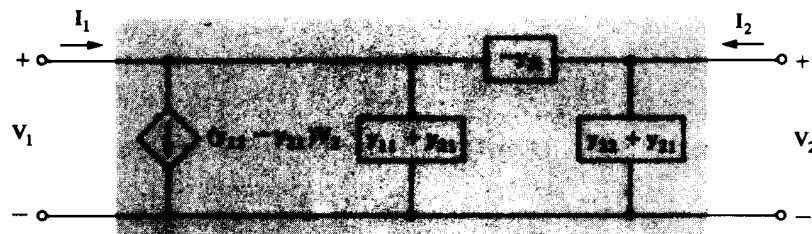
14.40 A treliça simétrica do Prob. 14.39 é terminada com um resistor de  $1 \Omega$  e  $Z_a$  e  $Z_b$  são como indicado na figura. Calcule a função de transferência do ganho de tensão.



PROBLEMA 14.37

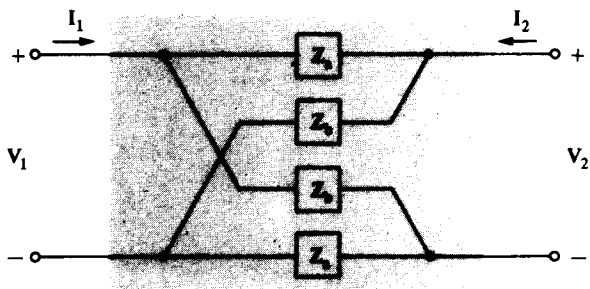


(a)

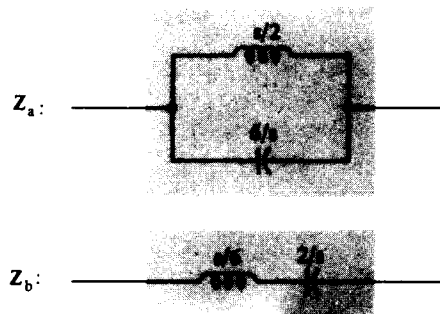


(b)

PROBLEMA 14.38

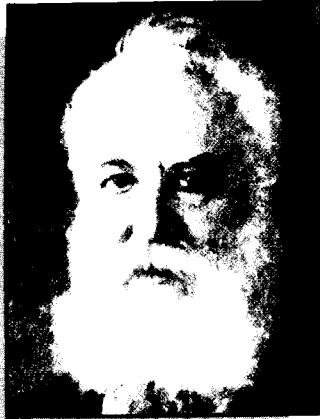


PROBLEMA 14.39



PROBLEMA 14.40





Alexander Graham Bell  
1847-1922

# 15

## Resposta em Frequência

---

*Sr. Watson, venha cá. Preciso de você!*

*Alexander Graham Bell*

---

O instrumento elétrico mais comum e mais usado é, sem dúvida, o telefone, inventado pelo cientista escocês-americano Alexander Graham Bell. Foi no dia 2 de junho de 1875 que Bell e seu assistente Thomas Watson transmitiram um sinal musical. A primeira frase inteligível, "Sr. Watson, venha cá. Preciso de você!", foi pronunciada inadvertidamente por Bell em pessoa, em 10 de março de 1876, quando chamou Watson para um quarto adjacente a fim de ajudá-lo com um ácido derramado.

Bell nasceu em Edimburgo, Escócia. Seu pai, Alexander Melville Bell, foi um conhecido professor de idiomas e seu avô, Alexander Bell, foi também professor de idiomas. O jovem Bell, após frequentar a Universidade de Edimburgo e a Universidade de Londres, também tornou-se um professor de idiomas. Em 1866, Bell interessou-se por tentar transmitir sons eletricamente, após ler um livro que descrevia como os sons de vogais podiam ser gerados com diapasões. Logo depois, os dois irmãos de Bell morreram de tuberculose e Melville Bell se mudou com a família para o Canadá, por questões de saúde. Em 1873, o jovem Bell tornou-se um professor na Universidade de Boston e iniciou seus experimentos com eletricidade nos momentos de lazer. Foi lá que formou sociedade com Watson e chegaram à sua grande descoberta. A patente do telefone de Bell foi a mais valiosa jamais registrada e o telefone abriu uma nova era no desenvolvimento de civilização. ■

Funções no domínio da frequência são extremamente úteis, como vimos, para calcular as funções correspondentes no domínio do tempo. A resposta em frequência de um circuito, contudo, é extremamente útil por si só, como veremos neste capítulo. Por exemplo, se estamos interessados em que frequência é dominante em um sinal de saída, digamos,  $V(j\omega)$ , então precisamos considerar apenas a amplitude  $|V(j\omega)|$ . As frequências dominantes correspondentes a amplitudes relativamente grandes e as frequências que são praticamente eliminadas correspondem a amplitudes relativamente pequenas.

Existem muitas aplicações nas quais as respostas em frequência são importantes. Uma aplicação muito comum é no projeto de filtros elétricos, que são redes que deixam passar sinais de certas frequências e bloqueiam sinais de outras frequências. Ou seja, se o sinal de saída de um filtro tem amplitude  $|V(j\omega)|$ , então  $\omega_1$  passa se  $|V(j\omega_1)|$  for relativamente grande e é bloqueada se  $|V(j\omega_1)|$  for relativamente pequeno. Existem muitos exemplos de filtros elétricos na nossa sociedade moderna, alguns dos mais comuns sendo os dos nossos aparelhos de TV, que nos permitem sintonizar um determinado canal permitindo passar sua faixa de frequências enquanto filtramos a dos outros canais.

Neste capítulo, estudaremos as respostas em frequência, tanto amplitude como fase. Vamos também definir ressonância e índice de mérito e mostrar como estão relacionados com as respostas em frequência. Finalmente, vamos considerar métodos de colocar redes em escala, para obter uma dada resposta em frequência com valores práticos de elementos de circuitos.

## 15.1

### Respostas em Amplitude e Fase

Uma função de rede  $H(j\omega)$ , assim como qualquer grandeza fasorial, é, em geral, uma função complexa, tendo uma componente real e uma imaginária. Ou seja,

$$H(j\omega) = \text{Re } H(j\omega) + j \text{Im } H(j\omega) \quad (15.1)$$

Como sabemos, podemos também escrever a função de rede em forma polar

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad (15.2)$$

onde  $|H(j\omega)|$  é a resposta em amplitude ou módulo e  $\phi(\omega)$  é a resposta em fase, dados, respectivamente, por

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2 H(j\omega) + \text{Im}^2 H(j\omega)} \quad (15.3)$$

e

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{\text{Im } H(j\omega)}{\text{Re } H(j\omega)} \quad (15.4)$$

As respostas em amplitude e fase são, é claro, casos especiais de *respostas em frequência*.

### EXEMPLO 15.1

Como um exemplo, suponha que a função de rede do circuito  $RLC$  paralelo da Fig. 15.1 é a impedância de entrada

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{I}_1(s)} = \mathbf{Z}(s) = \frac{1}{(1/R) + sC + (1/sL)} \quad (15.5)$$

ou

$$\mathbf{H}(s) = \frac{(1/C)s}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)} \quad (15.6)$$

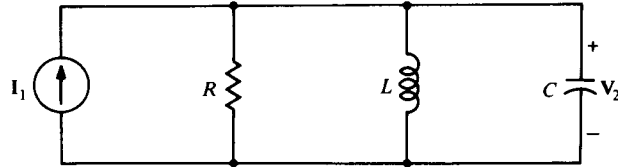


FIGURA 15.1 Circuito  $RLC$  paralelo

Para  $s = j\omega$ , temos, de (15.5),

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{1}{(1/R) + j[\omega C - (1/\omega L)]} \quad (15.7)$$

de forma que as respostas em amplitude e fase são

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1/R)^2 + [\omega C - (1/\omega L)]^2}} \quad (15.8)$$

e

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (15.9)$$

Visto que  $R$ ,  $L$  e  $C$  são constantes, a amplitude máxima ocorre na frequência  $\omega = \omega_0$  para a qual o denominador de (15.8) é um mínimo. Evidentemente, isso ocorre quando

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

ou

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (15.10)$$

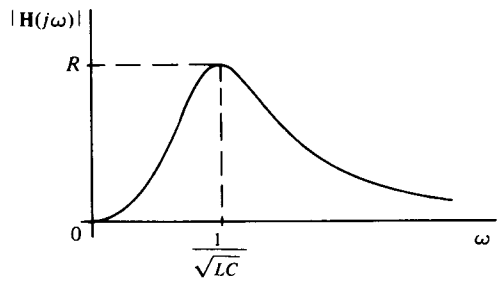
Desta forma

$$|\mathbf{H}(j\omega)|_{\max} = |\mathbf{H}(j\omega_0)| = R$$

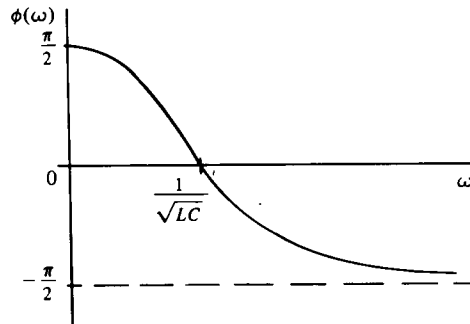
Também, é claro que  $|\mathbf{H}(j\omega)| \rightarrow 0$  quando  $\omega \rightarrow \infty$ . Portanto, a resposta em amplitude tem a forma mostrada na Fig. 15.2(a). De modo similar, podemos esboçar a resposta em fase, indicada na Fig. 15.2(b), visto que  $\phi(\omega_0) = 0$ ,  $\phi(\omega) \rightarrow \pi/2$  quando  $\omega \rightarrow 0$ , e  $\phi(\omega) \rightarrow -\pi/2$  quando  $\omega \rightarrow \infty$ . Se a entrada da Fig. 15.1 é a função no domínio do tempo

$$i_1(t) = I_m \cos \omega t$$

então o fasor de entrada é  $\mathbf{I}_1 = I_m \angle 0^\circ$ , e o fasor de saída é  $\mathbf{V}_2 = I_m \mathbf{Z} = I_m \mathbf{H}$ . Logo a amplitude da saída é simplesmente a da função de rede multiplicada por uma constante. Portanto, podemos obter tanta informação da resposta da função de rede como da resposta da saída. Por esta razão e pela razão



(a)



(b)

FIGURA 15.2 Respostas em (a) amplitude (b) fase de (15.7)

que a função de rede depende apenas da rede e não da excitação, devemos considerar normalmente a resposta em frequência da função de rede.

## EXERCÍCIOS

- 15.1.1 Faça  $R = 4 \Omega$ ,  $L = 1/10 \text{ H}$  e  $C = 1/40 \text{ F}$  na Fig. 15.1 e calcule a amplitude máxima e o ponto onde ela ocorre. Esboce também as respostas em amplitude e fase.  
*Resposta:*  $|\mathbf{H}|_{\max} = 4$ ,  $\omega_0 = 20$
- 15.1.2 Para o circuito  $RLC$  em série com uma fonte de tensão  $v_g$ , faça a função de rede ser  $\mathbf{H} = \mathbf{I}/V_g$ , onde  $\mathbf{I}$  é a corrente fasorial. Mostre que as respostas em amplitude e fase são similares às da Fig. 15.2, com  $|\mathbf{H}|_{\max} = 1/R$  e  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .
- 15.1.3 Faça a função de rede da Fig. 15.1 ser  $\mathbf{H} = \mathbf{I}_L/\mathbf{I}_1$ , onde  $\mathbf{I}_L$  é a corrente fasorial no indutor, em sentido para baixo. Mostre que

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}$$

e que  $|\mathbf{H}|_{\max} = 1$ , ocorrendo em  $\omega_0 = 0$ , com a condição de

$$2R^2C \leq L$$

## 15.2

### Filtros

Com referência à Fig. 15.2(a), vemos que frequências próximas a  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  rad/s, ou  $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$  Hz correspondem a amplitudes relativamente grandes, ao passo que aquelas próximas de zero ou maiores que  $\omega_0$  correspondem a amplitudes relativamente pequenas. Desta forma, a Fig. 15.1 é um exemplo de um *filtro passa-faixa*, que passa a *faixa* de frequências centradas no entorno de  $\omega_0$ . No caso geral de amplitudes, mostrado na Fig. 15.3, dizemos que  $\omega_0$ , a frequência na qual a amplitude máxima ocorre,

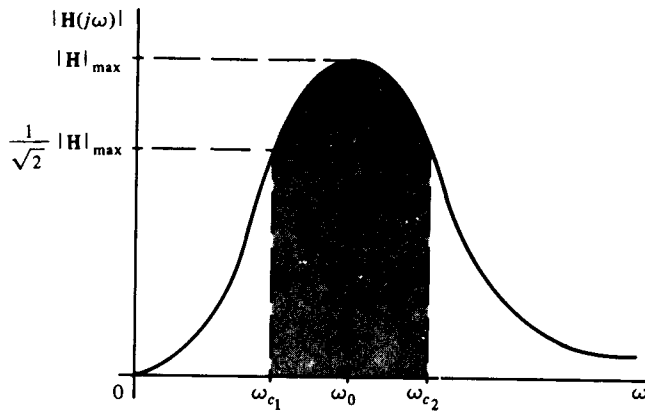


FIGURA 15.3 Resposta em amplitude genérica de um filtro passa-faixa

é a *freqüência central*. A faixa de freqüência que passa, ou a *faixa de passagem* é definida como sendo

$$\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2}$$

onde  $\omega_{c1}$  e  $\omega_{c2}$  são chamados pontos de *corte* e são definidos como as freqüências nas quais a amplitude é  $1/\sqrt{2} = 0,707$  vezes a amplitude máxima. A extensão da faixa de passagem, dada por

$$B = \omega_{c2} - \omega_{c1} \quad (15.11)$$

é chamada a *largura da faixa* ou *banda passante*.

Como veremos na Sec. 15.4, a largura da faixa no caso da Fig. 15.1 é  $B = 1/RC$ .

### EXEMPLO 15.2

Como outro exemplo, vamos considerar o circuito da Fig. 15.4. Analisando o circuito, podemos rapidamente obter a função de ganho de tensão,

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{V}_1(s)} = \frac{2}{s^2 + 2s + 2} \quad (15.12)$$

Fazendo  $s = j\omega$  e calculando a resposta em amplitude, temos

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{(2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$

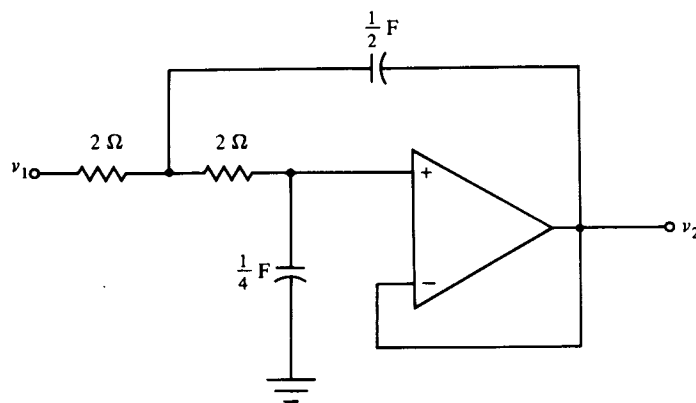


FIGURA 15.4 Filtro passa-baixas

ou, após simplificações

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega^4/4)}}$$

A função de amplitude decresce continuamente quando  $\omega$  aumenta, porque seu numerador é constante e seu denominador aumenta continuamente com a frequência. Portanto, a resposta de amplitude atinge seu valor máximo de  $|\mathbf{H}|_{\max} = 1$  em  $\omega_0 = 0$  e, deste modo, tem a forma da Fig. 15.5(a). Desta figura, vemos que o circuito da Fig. 15.4 é um filtro *passa-baixas*. Ou seja, deixa passar frequências baixas (amplitudes relativamente grandes) e rejeita altas frequências (amplitudes relativamente pequenas).

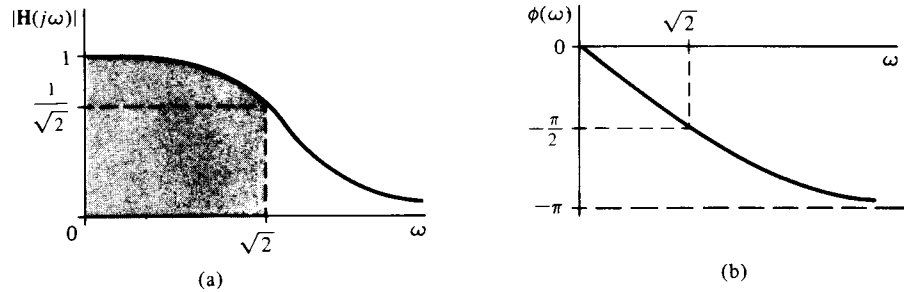


FIGURA 15.5 Respostas em frequência passa-baixas

Existe apenas um ponto de corte, como indicado na figura. Isso vem da definição

$$\begin{aligned} |\mathbf{H}(j\omega_c)| &= \frac{1}{\sqrt{2}} |\mathbf{H}(j\omega)|_{\max} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_c^4/4)}} \end{aligned}$$

cujas únicas respostas positivas reais são  $\omega_c = \sqrt{2}$ . Desta forma, a faixa de frequências que passa é a faixa de baixa frequência

$$0 \leq \omega \leq \sqrt{2}$$

A resposta em fase para a Fig. 15.4 pode ser facilmente calculada de  $\mathbf{H}(j\omega)$  como

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\omega}{2 - \omega^2}$$

que está esboçada na Fig. 15.5(b).

Um exemplo de um filtro passa-baixas passivo é o da Fig. 15.1, onde a função de rede é como definido no Ex. 15.1.3. De fato, se  $R = 1 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$  e  $C = 1/2 \text{ F}$ , a função de rede é a mesma que a da Fig. 15.4.

Existem muitos tipos de filtros, além do passa-baixas e do passa-faixas. Dois dos mais comuns são o filtro *passa-altas*, que passa altas frequências e rejeita baixas frequências e o filtro *corta-faixa*, que

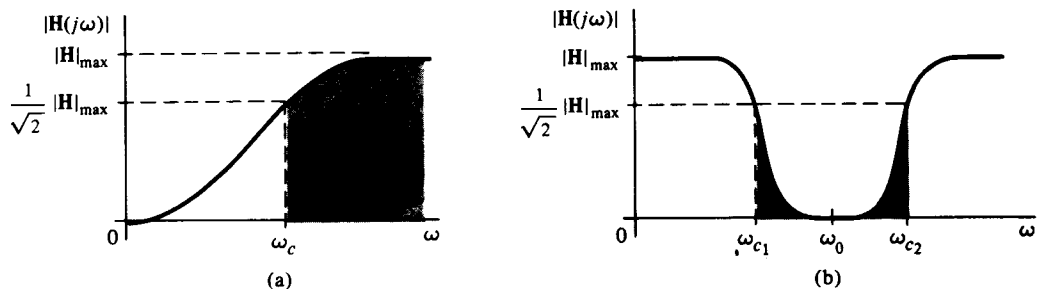


FIGURA 15.6 Resposta em amplitude (a) passa-altas (b) corta-faixa

passa todas as frequências, exceto uma certa faixa. Respostas em amplitude típicas são mostradas na Fig. 15.6, e exemplos serão considerados nos Ex. 15.2.2 e 15.2.3. Na Fig. 15.6(a),  $\omega_c$  é o ponto de corte e a faixa de passagem é  $\omega > \omega_c$ . Na Fig. 15.6(b),  $\omega_0$  é a frequência central da faixa bloqueada de largura da faixa  $B = \omega_{c2} - \omega_{c1}$ .

Em geral, a *ordem* de um filtro é a ordem do denominador da polinomial de sua função de rede. Desta forma, os filtros das Figs. 15.1 e 15.4 são filtros de segunda ordem, como visto de (15.6) e (15.12). Filtros de ordem mais elevada são mais caros de se construir mas têm melhor resposta em frequência que filtros de mais baixa ordem. Isso será visto para um tipo especial de filtro, no Prob. 15.18.

## EXERCÍCIOS

15.2.1 Mostre que

$$\mathbf{H}(s) = \frac{2s}{s^2 + 0.2s + 1}$$

é a função de rede de um filtro passa-faixa e calcule  $\omega_0$ ,  $\omega_{c1}$ ,  $\omega_{c2}$  e  $B$ .  
Resposta: 1;  $(-0,2 + \sqrt{4,04})/2 = 0,905$ ; 1,105; 0,2

15.2.2 Mostre que

$$\mathbf{H}(s) = \frac{2s^2}{s^2 + 4s + 8}$$

é a função de rede de um filtro passa-altas e calcule  $|\mathbf{H}(j\omega)|_{\max}$  e  $\omega_c$ .  
Resposta:  $|\mathbf{H}|_{\max} = 2$ ,  $\omega_c = 2\sqrt{2}$

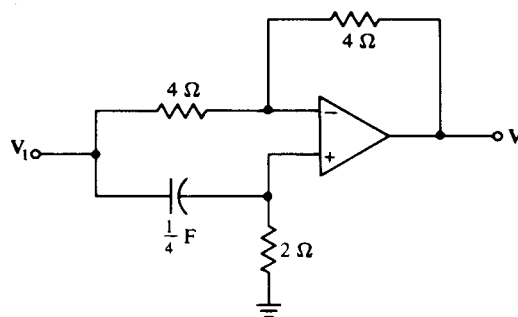
15.2.3 Mostre que

$$\mathbf{H}(s) = \frac{3(s^2 + 25)}{s^2 + s + 25}$$

é a função de rede de um filtro corta-faixa e calcule  $|\mathbf{H}(j\omega)|_{\max}$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_{c1}$  e  $\omega_{c2}$ .  
Resposta:  $|\mathbf{H}|_{\max} = 3$ ,  $\omega_0 = 5$ ,  $\omega_{c1}, c2 = (-1 + \sqrt{101})/2 = 4,525$ ; 5,525

15.2.4 Um filtro *passa-todas* é o filtro cuja resposta em amplitude é constante. (Então, ele passa *todas* as frequências igualmente bem). Pode ser ligado em cascata com outro filtro par manter uma resposta em amplitude desejada, mas *altera* a fase. Mostre, por meio da função de rede  $V_2/V_1$ , a resposta em amplitude e a resposta em fase, que o circuito dado é um filtro passa-todas de primeira ordem.

Resposta:  $\frac{s-2}{s+2}$ , 1,  $180^\circ - 2 \arctan \omega/2$



EXERCÍCIO 15.2.4

## 15.3

### Ressonância

Um sistema físico que tenha uma resposta natural senoidal reage vigorosamente, e às vezes violentamente, quando excitado em ou próximo a uma de suas frequências naturais. Este efeito pode ter sido notado

pelo leitor na Seç. 9.6, especialmente no caso do Ex. 9.6.3. O sistema, neste particular, é como qualquer um de nós. Quando estimulado a fazer o que gosta naturalmente de fazer, responde com entusiasmo.

Este fenômeno é conhecido como *ressonância*, e seus efeitos podem ser bons ou maus. Como um exemplo, um cantor pode quebrar uma peça de cristal somente com sua voz, produzindo uma nota na frequência correta. Também, uma ponte pode ser destruída, se for submetida a uma força periódica com a mesma frequência de uma de suas frequências naturais. Por esta razão, nenhum comandante de tropa sensato coloca seus homens para marchar ao atravessar uma ponte. Por outro lado, sem ressonância, os filtros elétricos não existiriam.

Vamos definir uma rede excitada senoidalmente como em ressonância quando a amplitude de sua função de rede atinge um valor máximo ou mínimo bem pronunciado. A frequência na qual isto ocorre é chamada *frequência de ressonância*. Como um exemplo, o circuito *RLC* paralelo da Fig. 15.1 está em ressonância quando a frequência da função de excitação é  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Isso foi mostrado na Seç. 15.1, onde foi demonstrado que a amplitude máxima da função de rede ocorreu em  $\omega_0$ . A resposta em amplitude da Fig. 15.2(a) é típica, com seu pico relativamente alto na frequência de ressonância. O circuito *RLC* paralelo é tão importante que o termo *ressonância em paralelo* é reservado para sua condição de ressonância.

O leitor pode se lembrar do termo *frequência de ressonância*, que apareceu anteriormente na Seç. 9.8, no caso sub-amortecido do circuito *RLC* paralelo. As duas frequências, lá e aqui, são exatamente as mesmas.

As frequências naturais do circuito *RLC* paralelo são os pólos da função de rede, dadas, de (15.6), por

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d \quad (15.13)$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad (15.14)$$

e

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (15.15)$$

Do diagrama de pólos e zeros mostrado na Fig. 15.7, vemos que a frequência de ressonância  $\omega_0$  ou  $s = j\omega_0$ , está bem próxima da frequência natural  $s = -\alpha + j\omega_d$ , visto que, por (15.15),  $\omega_0$  é o raio do semi-círculo tracejado. Se  $R$  cresce, então  $\alpha$  decresce e a frequência de ressonância torna-se ainda mais próxima da frequência natural. Neste caso, como está claro na Fig. 15.2(a), o pico está mais evidente. Evidentemente, se  $R$  fosse infinito (circuito aberto), então a frequência de ressonância coincidiria com a frequência natural e a amplitude seria infinita.

Antes de encerrarmos com o circuito *RLC* paralelo, notemos que a função de rede é realmente a impedância de entrada, como indicado em (15.5). A frequência de ressonância  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  é a frequência para a qual a impedância de entrada é puramente real, como estudado em (15.7). De fato, muitos autores definem a frequência de ressonância exatamente deste modo, no caso de um bipolo. No caso geral,

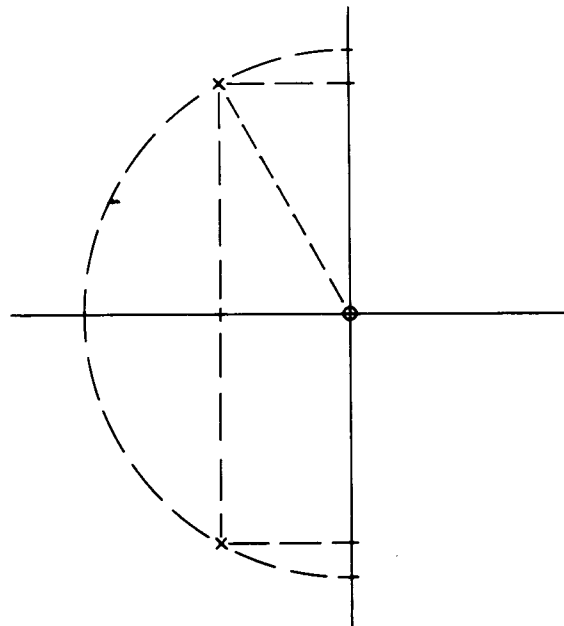


FIGURA 15.7 Diagrama de pólos e zeros para o circuito *RLC* paralelo



a amplitude máxima não ocorre sempre exatamente na frequência da impedância real, mas, normalmente, existe uma diferença muito pequena.

No caso de um circuito  $RLC$  série excitado por uma fonte de tensão  $V_g$ , se a corrente fasorial  $I$  é a saída, então

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{\mathbf{I}(j\omega)}{\mathbf{V}_g(j\omega)} = \mathbf{Y}(j\omega) = \frac{1}{R + j[\omega L - (1/\omega C)]}$$

onde  $\mathbf{Y}$  é a admitância de entrada vista pelos terminais da fonte. Evidentemente, ocorre ressonância série em  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , produzindo uma amplitude máxima de  $1/R$ . Como no caso de ressonância paralelo, a frequência de ressonância é também a frequência da impedância ou admitância real de entrada. Na ressonância, o efeito dos elementos armazenadores se cancela exatamente, e a fonte vê apenas a resistência.

## EXERCÍCIOS

- 15.3.1** Mostre que a frequência de ressonância, no caso da função do Ex. 15.2.1, coincide com a frequência para a qual a função é real.
- 15.3.2** Calcule a frequência de ressonância para o circuito  $RLC$  paralelo descrito por (a)  $R = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 4 \text{ mH}$  e  $C = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$ ; (b)  $\omega_d = 5 \text{ rad/s}$  e  $\alpha = 12 \text{ Np/s}$ ; e (c)  $\alpha = 1 \text{ Np/s}$ ,  $R = 4 \text{ }\Omega$  e  $L = 2 \text{ H}$ .  
Resposta: (a) 50.000; (b) 13; (c) 2 rad/s
- 15.3.3** No Ex. 15.3.2(a), calcule a amplitude para a tensão na associação se a fonte de corrente é  $i_g = \cos \omega t \text{ mA}$  e  $\omega$  é (a)  $10^4$ , (b)  $5 \times 10^4$  e (c)  $25 \times 10^4 \text{ rad/s}$ .  
Resposta: (a) 0,0417; (b) 2; (c) 0,0417 V

## 15.4

### Funções Passa-Faixa e Índice de Mérito

A função de rede (15.6) é um caso especial da função passa-faixa geral de segunda ordem

$$\mathbf{H}(s) = \frac{Ks}{s^2 + as + b} \quad (15.16)$$

onde  $K$ ,  $a > 0$  e  $b > 0$  são constantes reais. Para se ver que a função é do tipo passa-faixa, vamos considerar sua amplitude

$$\begin{aligned} |\mathbf{H}(j\omega)| &= \frac{|K\omega|}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}} \\ &= \frac{|K|}{\sqrt{a^2 + [(b - \omega^2)/\omega]^2}} \end{aligned}$$

Evidentemente, o valor máximo é

$$|\mathbf{H}(j\omega)|_{\max} = \frac{|K|}{a}$$

que ocorre na frequência central, ou ressonante,  $\omega_0$ , que satisfaz

$$b = \omega_0^2 \quad (15.17)$$

Numa frequência de corte  $\omega_c$ , devemos ter

$$|\mathbf{H}(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |\mathbf{H}(j\omega)|_{\max}$$

ou

$$\frac{|K|}{\sqrt{a^2 + [(b - \omega_c^2)/\omega_c]^2}} = \frac{|K|}{\sqrt{2} a}$$

que, evidentemente, se verifica se

$$\frac{b - \omega_c^2}{\omega_c} = \pm a$$

Desta forma, temos

$$\omega_c^2 \pm a\omega_c - b = 0 \quad (15.18)$$

que, devido ao duplo sinal, tem quatro soluções. Usando o sinal positivo, temos, pela fórmula quadrática,

$$\omega_{c_1} = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \quad (15.19)$$

Descartamos o sinal negativo no radical porque dá uma frequência de corte negativa. Usando o sinal negativo em (15.18) e, novamente desconsiderando a raiz negativa, temos a outra frequência de corte,

$$\omega_{c_2} = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \quad (15.20)$$

Evidentemente, de (15.19) e (15.20), temos a largura da faixa,

$$B = \omega_{c_2} - \omega_{c_1} = a \quad (15.21)$$

Desta forma, considerando (15.17) e (15.21), podemos escrever a função de rede como

$$\mathbf{H}(s) = \frac{Ks}{s^2 + Bs + \omega_0^2} \quad (15.22)$$

que é a função de rede geral de um filtro passa-faixa de segunda ordem, tendo frequência central  $\omega_0$  e largura da faixa  $B$ . A resposta em amplitude está indicada na Fig. 15.3.

Outro resultado digno de nota de (15.17), (15.19) e (15.20) é

$$\omega_0^2 = \omega_{c_1}\omega_{c_2} \quad (15.23)$$

que demonstra que a frequência central  $\omega_0$  é a média geométrica  $\sqrt{\omega_{c_1}\omega_{c_2}}$  dos pontos de corte.

Uma boa avaliação da *seletividade ou exatidão do pico* num circuito ressonante é o chamado *índice de mérito*  $Q$ , que é definido como a relação entre a frequência de ressonância e a largura da faixa. Ou seja,

$$Q = \frac{\omega_0}{B} \quad (15.24)$$

(A letra  $Q$  foi usada também para a potência reativa, como o leitor se lembrará. Contudo, as duas grandezas não irão nunca ser encontradas no mesmo contexto, de forma que não haverá confusão.) Evidentemente, visto que  $B = \omega_0/Q$ , um  $Q$  baixo corresponde a uma largura de faixa relativamente grande e um  $Q$  elevado (algumas vezes tomado como 5 ou mais, arbitrariamente) indica uma largura de faixa pequena, ou um circuito mais seletivo.

Com essa definição de  $Q$ , podemos escrever (15.22) na forma

$$\mathbf{H}(s) = \frac{Ks}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2} \quad (15.25)$$

de forma que vemos num relance a frequência central, o índice de mérito e a largura da faixa.

### EXEMPLO 15.3

Como um exemplo, o filtro descrito no Ex. 15.2.1 é um filtro passa-faixa, com  $\omega_0 = 1$  rad/s,  $B = 0,2$  rad/s e  $Q = 5$ . Outro exemplo é o circuito  $RLC$  paralelo com função de rede dada em (15.6). Naquele caso,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ,  $B = 1/RC$  e  $Q = \omega_0/B$ , que tem os valores equivalentes

$$\begin{aligned} Q &= \omega_0 RC \\ &= R \sqrt{\frac{C}{L}} \\ &= \frac{R}{\omega_0 L} \end{aligned} \quad (15.26)$$

Devemos mencionar que a grandeza que chamamos  $Q$  é definida por alguns autores como *seletividade*, que definem  $Q$  como

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energia total armazenada, na ressonância}}{\text{Energia dissipada por ciclo, na ressonância}} \quad (15.27)$$

Nos exemplos que estudamos, as duas definições têm o mesmo significado, como ao leitor é solicitado mostrar nos Exs. 15.4.1 e 15.4.2. Contudo, em geral, existe uma pequena diferença.

Finalmente, vamos estudar o efeito de  $Q$  na ressonância. Incorporando (15.19) e (15.20) em uma só equação e substituindo  $a$  e  $b$  pelos seus valores, temos

$$\omega_{c_1, c_2} = \mp \frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2}$$

ou

$$\omega_{c_1, c_2} = \left( \mp \frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right) \omega_0 \quad (15.28)$$

Evidentemente, se  $Q$  é elevado, então podemos desprezar  $(1/2Q)^2$  em comparação com 1, e escrever

$$\omega_{c_1, c_2} \approx \mp \frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0$$

ou, aproximadamente

$$\begin{aligned} \omega_{c_1} &= \omega_0 - \frac{B}{2} \\ \omega_{c_2} &= \omega_0 + \frac{B}{2} \end{aligned} \quad (15.29)$$

Desta forma, com o crescimento de  $Q$ , a resposta em amplitude tende a simetria aritmética. Ou seja, os pontos de corte estão metade da largura da faixa acima e abaixo da frequência central.

No exemplo do Ex. 15.2.1, temos  $\omega_0 = 1$  e  $Q = 5$ , considerado como elevado. Desta forma, por (15.29), as frequências de corte aproximadas são  $\omega_{c_1} = 0,9$  e  $\omega_{c_2} = 1,1$  rad/s. Os valores exatos são

$$\omega_{c_1, c_2} = 0,905, \quad 1,105$$

## EXERCÍCIOS

15.4.1 Para o circuito  $RLC$  paralelo em ressonância, mostre que a energia total armazenada é

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{2} R^2 C I_m^2 \cos^2 \omega_0 t + \frac{R^2 I_m^2}{2 \omega_0^2 L} \sin^2 \omega_0 t \\ &= \frac{1}{2} R^2 C I_m^2 \end{aligned}$$

- onde a excitação é  $i = I_m \cos \omega_0 t$ .
- 15.4.2** Mostre que, para o circuito do Ex. 15.4.1, a energia dissipada por ciclo é

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} RI_m^2 \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{\pi RI_m^2}{\omega_0}$$

e, desta forma, pela definição (15.27) e o resultado do Ex. 15.4.1, que

$$Q = \omega_0 RC$$

- 15.4.3** Para o circuito  $RLC$  série com excitação  $v_g = V_m \cos \omega t$ , V, mostre que  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  e  $Q = \omega_0 L/R$ . A resposta é a corrente de laço.
- 15.4.4** No Ex. 14.4.3, substitua o resistor de  $8\text{-}\Omega$  por  $2\text{-}\Omega$ , mostre que o circuito é um filtro passa-faixa e calcule  $\omega_0$  e  $Q$ .  
Resposta: 4 rad/s; 0,4

## 15.5

### Uso dos Diagramas de Pólos e Zeros

O diagrama de pólos e zeros de uma função de rede pode muitas vezes ser usado para esboçar rapidamente as respostas em frequência. Para ver como isso pode ser feito, vamos escrever a função de rede na forma

$$\mathbf{H}(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (15.30)$$

onde, como antes, os  $z$ 's e os  $p$ 's são os zeros e os pólos. Cada um dos fatores é um número complexo da forma  $s - s_1$  e pode ser representado no plano  $s$  por um vetor, desenhado de  $s_1$  para  $s$ , como indicado na Fig. 15.8. Isso é verdadeiro, visto que, por soma vetorial, o vetor  $s$  é evidentemente a soma dos vetores  $s_1$  e  $s - s_1$ .

O vetor típico  $s - s_1$ , desenhado de  $s_1$  para  $s$ , pode ser escrito na forma polar, onde seu módulo é seu comprimento e sua fase é o ângulo que ele faz com o eixo real positivo. Se  $s = j\omega$ , o ponto  $s$  na Fig. 15.8 está no eixo  $j\omega$  e os fatores de (15.30) podem ser escritos

$$j\omega - z_i = N_i e^{j\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$j\omega - p_k = M_k e^{j\beta_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Portanto, a função de rede é

$$\mathbf{H}(j\omega) = |\mathbf{H}(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

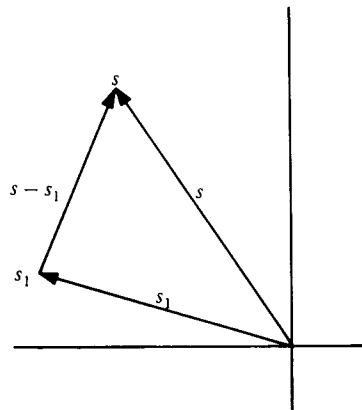


FIGURA 15.8 Representação vetorial de  $s - s_1$

onde, para  $K > 0$ , a amplitude é

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \frac{KN_1N_2 \dots N_m}{M_1M_2 \dots M_n} \quad (15.31)$$

e a fase é

$$\phi(\omega) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m) - (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) \quad (15.32)$$

que podem ser medidos diretamente do diagrama de pólos e zeros. Se  $K < 0$ , então  $K = |K| \angle 180^\circ$ , que devem ser considerados na amplitude e na fase.

Desta forma, para qualquer ponto  $j\omega$ , simplesmente desenhamos vetores de todos os pólos e zeros para  $j\omega$ , medimos seus comprimentos e ângulos e calculamos sua amplitude e fase, com (15.31) e (15.32). Frequentemente precisamos apenas uns poucos pontos para esboçar as respostas, como veremos.

### EXEMPLO 15.4

Como um exemplo, suponhamos que temos

$$\mathbf{H}(s) = \frac{4s}{s^2 + 2s + 401}$$

que tem um zero em 0 e pólos em  $-1 \pm j20$ . Estes estão indicados nos diagramas de pólos e zeros da Fig. 15.9. Por (15.31) e (15.32), temos

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \frac{4N}{M_1M_2}$$

$$\phi(\omega) = \alpha - (\beta_1 + \beta_2)$$

cujas componentes são identificadas na Fig. 15.9(a). Primeiramente, notamos que se  $\omega$  varia de  $0^+$  ta  $+\infty$ , então  $\alpha = 90^\circ$ . Para  $\omega = 0$ , temos, da Fig. 15.9(b),

$$|\mathbf{H}| = \frac{4(0)}{\sqrt{401}\sqrt{401}} = 0$$

$$\phi = 90^\circ - (-\tan^{-1} 20 + \tan^{-1} 20) = 90^\circ$$

Para  $\omega = 20$  [Fig. 15.9(c)], temos

$$|\mathbf{H}| = \frac{4(20)}{(1)\sqrt{1601}} \approx 2$$

$$\phi = 90^\circ - (0 + \tan^{-1} 40) \approx 0$$

seu pico nas proximidades deste ponto. Realmente sabemos, de nosso estudo anterior, que  $\omega_0 = \sqrt{401}$  produz a amplitude de pico de 2.

Se  $\omega = \omega_h$ , um valor muito elevado, digamos,  $10^6$ , então todos os três vetores serão essencialmente verticais, de forma que

$$N \approx M_1 \approx M_2 \approx \omega_h$$

$$\alpha \approx \beta_1 \approx \beta_2 \approx 90^\circ$$

Portanto, temos  $|\mathbf{H}| \approx 4/\omega_h$ , um valor muito pequeno e  $\phi \approx -90^\circ$ .

Esboçando as funções, temos as formas da Fig. 15.2, como era de se esperar, com  $\omega_0 \approx 20$  e  $|\mathbf{H}|_{\max} \approx 2$ .

Podemos ter uma idéia grosseira dos pontos de corte a partir da Fig. 15.9(d). Nesta figura,  $M_1 = \sqrt{2}$ , que é  $\sqrt{2}$  vezes seu valor no ponto aproximado de pico, representado na Fig. 15.9(c). Visto que  $M_2$  e  $N$  mudaram num percentual menor, a amplitude é então aproximadamente  $1/\sqrt{2}$  vezes seu pico, de forma que  $\omega_{c1} \approx 19$ . De forma similar, para  $\omega = 21$ , teremos  $\omega_{c2} \approx 21$ . Os valores exatos, por (15.19) e (15.20), são  $\omega_{c1;c2} = 19,05; 21,05$ . Neste exemplo, comparando a função de rede com (15.25), vemos que  $Q = 10,01$ . Desta forma, temos um  $Q$  elevado, de forma que os pólos estão muito próximos do eixo  $j\omega$ . Desta forma,  $\omega_d$  está muito próximo de  $\omega_0$  e as aproximações que fizemos estão muito próximas dos valores exatos.

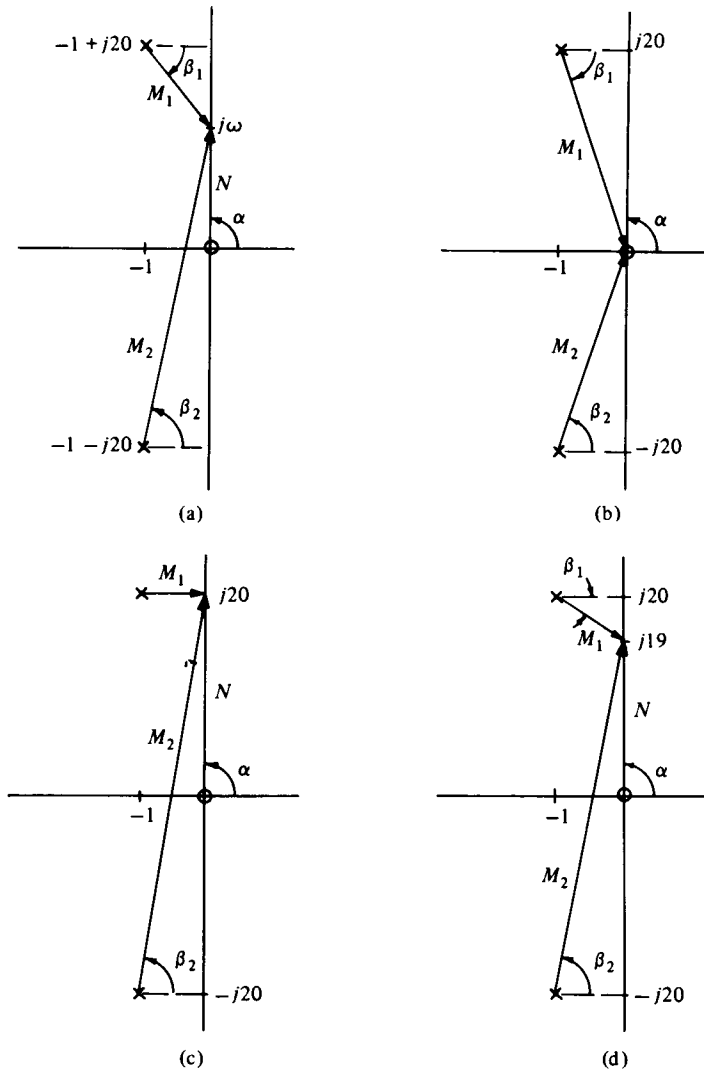


FIGURA 15.9 Passos para a construção das respostas em frequência. (As figuras não estão em escala.)

## EXERCÍCIOS

15.5.1 Use o método desta seção para esboçar as respostas em amplitude e em fase

$$\mathbf{H}(s) = \frac{16s}{s^2 + 4s + 2504}$$

Resposta:  $\omega_0 \approx 50$ ,  $Q \approx 12,5$ ,  $B = 4$ ,  $\omega_{c1,c2} \approx 48, 52$

15.5.2 Calcule os valores exatos para as respostas dadas no Ex. 15.5.1.

Resposta: 50,04; 12,51; 4; 48,08; 52,08.

## 15.6

### Fator de Escala da Função de Rede

O leitor pode ter notado que, em muitos dos nossos exemplos, usamos elementos de rede de valores tais como 1  $\Omega$ , 1 F, 2 H, etc., que são números bons para se trabalhar, quando estamos analisando uma rede. Por exemplo, na Fig. 15.4 tivemos elementos de 2  $\Omega$ , 1/4 F e 1/2 F e a rede foi um filtro passa-baixas com uma frequência de corte de  $\sqrt{2}$  rad/s ou 0,23 Hz. Contudo, tais valores para os elementos

não são muito práticos, no mínimo, e existe pouca demanda para filtros que deixam passar frequências entre 0 e 0,23 Hz. (Para ilustrar, um capacitor de 1-F, construído com duas placas paralelas separadas de 1 cm e usando ar como dielétrico, necessitaria de uma área das placas de  $1,13 \times 10^9 \text{ m}^2$ .)

Seria uma situação ideal se os circuitos a serem analisados ou projetados contivessem elementos de valores como 1 F, etc., ao passo que os circuitos reais que construímos tivessem elementos reais com valores como  $0,047 \mu\text{F}$  e características úteis como ponto de corte de 100 Hz. Como veremos nesta seção, o fator de escala de redes nos permitirá ter esta situação ideal.

Vamos estudar dois tipos de fatores de escala de redes, ou seja, *fator de escala de impedância e de frequência*. Para ilustrar o primeiro, vamos supor que a função de rede é uma impedância dada por

$$\mathbf{Z}'(s) = sL' + R' + \frac{1}{sC'}$$

A rede será alterada por um *fator de escala de impedância*  $k_i$  se a impedância  $\mathbf{Z}(s)$  da rede modificada em escala for  $\mathbf{Z}(s) = k_i \mathbf{Z}'(s)$ . Em outras palavras, temos que ter

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(s) &= k_i \left( sL' + R' + \frac{1}{sC'} \right) \\ &= s(k_i L') + k_i R' + \frac{1}{s(C'/k_i)} \end{aligned} \quad (15.33)$$

Se a impedância da rede alterada em escala for

$$\mathbf{Z}(s) = sL + R + \frac{1}{sC}$$

então, vemos por comparação com (15.33), que

$$\begin{aligned} L &= k_i L' \\ R &= k_i R' \\ C &= \frac{C'}{k_i} \end{aligned} \quad (15.34)$$

Em resumo, para alterar em escala as impedâncias de uma rede por um fator de escala  $k_i$ , multiplicamos os  $L$ 's e  $R$ 's por  $k_i$  e dividimos os  $C$ 's por  $k_i$ . Apresentamos uma ilustração para um caso especial mas pode ser demonstrado que o princípio é válido em geral. Também, se existem fontes dependentes, o processo é completado pela multiplicação das constantes de ganho tendo unidades de ohms por  $k_i$ , dividindo os que têm unidade de siemens por  $k_i$  e não alterando aqueles que são adimensionais. O processo de alterar em escala multiplica por  $k_i$ , divide por  $k_i$  ou não altera as funções de rede que têm unidades de ohms, siemens ou são adimensionais.

### EXEMPLO 15.5

Para ilustrar, vamos alterar em escala as impedâncias da rede da Fig. 15.4 por  $k_i = 5$ . Os resistores de 2- $\Omega$  tornam-se  $2 \times 5 = 10 \Omega$ , o capacitor de  $\frac{1}{2}$ -F torna-se  $(\frac{1}{2}) \div 5 = 0,1$  F e o capacitor de  $\frac{1}{4}$ -F torna-se  $(\frac{1}{4}) \div 5 = 0,05$  F. O amp. op., um dispositivo de ganho infinito, permanece como tal, e, desta forma, permanece imutável. A função de rede  $\mathbf{V}_2(s)/\mathbf{V}_1(s)$ , sendo adimensional, também não se altera.

Para alterar em escala a frequência de uma função de rede por um *fator de escala de frequência*  $k_f$ , substituímos simplesmente  $s$  por  $s/k_f$ . Ou seja, se a rede original tem a função de rede  $\mathbf{H}'(S)$ , então a função de rede modificada em escala  $\mathbf{H}(s)$  é obtida fazendo  $S = s/k_f$ , resultando em

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}'\left(\frac{s}{k_f}\right) \quad (15.35)$$

Desta forma, se a rede original tem uma propriedade, tal como frequência central, quando  $S = j1$ , então a rede modificada em escala tem esta propriedade em  $s = jk_f$ . Isto é evidente de (15.35), que dá

$$\mathbf{H}(jk_f) = \mathbf{H}'(j1)$$

Outra forma de alterar em escala a frequência é notar que  $s = kfS$ , de forma que, se  $s = j\omega$  corresponde a  $S = j\Omega$ , então  $\omega = k_f \Omega$ . Desta forma, os valores no eixo de frequência foram multiplicados pelo fator de escala  $k_f$ , sem afetar os valores no eixo vertical de uma resposta em frequência.

A alteração em escala de uma rede para efetuar a transformação de (15.35) é bastante simples. Se  $Z'(S)$ , dado por

$$Z'(S) = SL' + R' + \frac{1}{SC'}$$

é uma impedância qualquer da rede original, então a impedância correspondente na rede modificada em escala é

$$\begin{aligned} Z(s) &= sL + R + \frac{1}{sC} \\ &= Z'\left(\frac{s}{k_f}\right) \\ &= s\left(\frac{L'}{k_f}\right) + R' + \frac{1}{s(C'/k_f)} \end{aligned}$$

Comparando estes resultados, temos

$$\begin{aligned} L &= \frac{L'}{k_f} \\ R &= R' \\ C &= \frac{C'}{k_f} \end{aligned} \tag{15.36}$$

Portanto, para alterar em escala a frequência de uma rede por um fator  $k_f$ , dividimos os  $L$ 's e  $C$ 's por  $k_f$  e deixamos os  $R$ 's sem alteração. Se existirem fontes dependentes com ganhos constantes, estas também não se alteram.

### EXEMPLO 15.6

Para ilustrar, o circuito da Fig. 15.4 é um filtro passa-baixas com frequência de corte  $\omega_c = \sqrt{2}$  rad/s, como vimos anteriormente. Suponha que desejamos alterar em escala a frequência da rede, de forma que a frequência de corte seja 2 rad/s. Então o fator de escala  $k_f$  é dado por

$$\sqrt{2} k_f = 2$$

ou  $k_f = \sqrt{2}$ . Dividindo os  $C$ 's na Fig. 15.4 por  $k_f$  temos, na rede modificada em escala, capacitâncias de  $1/2\sqrt{2}$  F e  $1/4\sqrt{2}$  F. O resto do circuito permanece inalterado, não havendo indutores para serem alterados em escala.

Certamente, podemos alterar tanto as impedâncias como as frequências em escala numa rede. Para se obter uma rede com uma propriedade prática como frequência central ou de corte, devemos primeiramente alterar em escala a frequência, com o fator apropriado  $k_f$ . Então, para tornar os valores resultantes dos elementos mais práticos, podemos alterar em escala as impedâncias por um fator  $k_i$ .

### EXEMPLO 15.7

Por exemplo, se a rede  $RLC$  em paralelo da Fig. 15.1 é formada por um resistor de  $1\text{-}\Omega$ , um indutor de  $2\text{-H}$  e um capacitor de  $1/2$  F, então, para a função de rede de (15.5), temos uma resposta em amplitude como na Fig. 15.2(a), com frequência de ressonância de 1 rad/s e uma amplitude de pico de  $1\ \Omega$ . Suponha que alteremos em escala a amplitude e a frequência da rede para obter uma frequência de ressonância de  $10^6$  rad/s, usando um capacitor de 1 nF. Então, teremos  $k_f = 10^6$ , e a nova capacitância é

$$C = 10^{-9} = \frac{1/2}{k_i k_f} = \frac{1}{2k_i \times 10^6}$$

Portanto,  $k_i = 500$  e as novas indutância e resistência são

$$\begin{aligned} L &= \frac{2k_i}{k_f} = 10^{-3} \text{ H} = 1 \text{ mH} \\ R &= 1k_i = 500 \ \Omega \end{aligned}$$



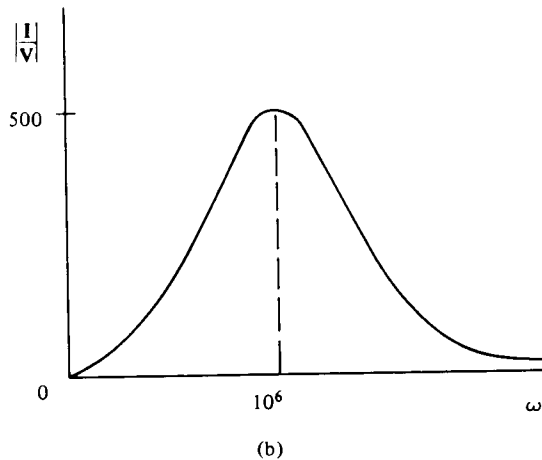
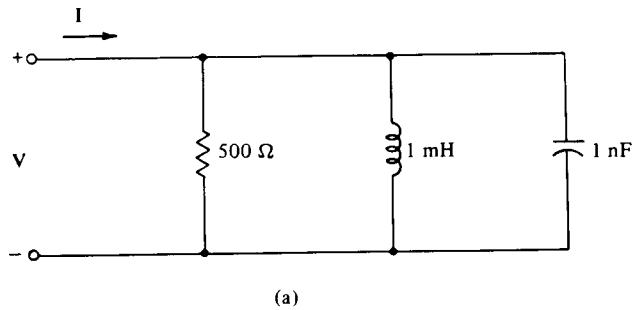
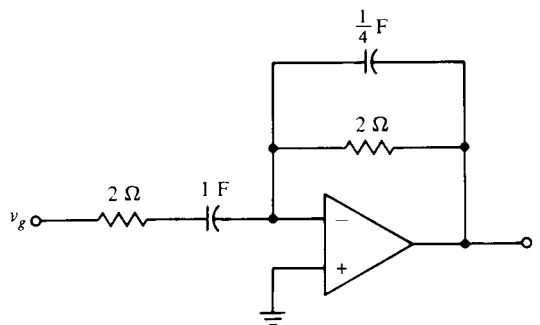


FIGURA 15.10 (a) Rede (b) sua resposta em amplitude

A rede modificada em escala é mostrada na Fig. 15.10(a) e sua resposta em amplitude, uma versão alterada em escala da Fig. 15.2(a), é mostrada na Fig. 15.10(b).

## EXERCÍCIOS

- 15.6.1** Altere em escala a frequência e a impedância do circuito da Fig. 15.4 para obter  $\omega_c = 2000\pi$  rad/s ( $f_c = 1000$  Hz) usando capacitores de  $0,01$  e  $0,005 \mu\text{F}$ .  
*Resposta:*  $k_f = (1000 \sqrt{2})\pi$ ,  $k_i = 10^5/2\sqrt{2}\pi$ ,  $R$ 's =  $22,5 \text{ k}\Omega$  cada um
- 15.6.2** Mostre que o circuito é um filtro passa-faixa, com  $\omega_0 = 1$  rad/s e altere em escala a frequência e a impedância para obter uma frequência central de  $1000$  rad/s, usando capacitores de  $1 \mu\text{F}$  e  $4 \mu\text{F}$ .  
*Resposta:* Dois resistores de  $500 \Omega$



EXERCÍCIO 15.6.2

## O Decibel

Se a saída de uma rede é usada para gerar alguma grandeza que é para ser sentida por um ser humano, a função é sentida de modo descontínuo. Por exemplo, se a rede gera um som, como no caso do telefone, o ouvinte não pode detectar mudanças contínuas na intensidade. Além disso, se a intensidade do som é 1 (em uma escala arbitrária) e deve ser aumentada para 1.1 antes que o ouvinte perceba alguma mudança, então o mesmo ouvinte não pode descobrir nenhuma mudança, se o nível original é 2, até que o sinal seja aumentado para 2.2. Em outras palavras, o ouvido humano não é um dispositivo linear, mas trabalha mais como um dispositivo *logarítmico*, visto que as diferenças

$$\log 1,1 - \log 1 = \log 1,1$$

e

$$\log 2,2 - \log 2 = \log \left( \frac{2,2}{2} \right)$$

são as mesmas, nos dois casos.

Por essa razão, entre outras, a resposta em amplitude,

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \left| \frac{\mathbf{V}_2(j\omega)}{\mathbf{V}_1(j\omega)} \right|$$

é usualmente expressa em decibéis, abreviado como dB e definido por

$$\text{número de dB} = 20 \log_{10} |\mathbf{H}(j\omega)| \quad (15.37)$$

Historicamente, a unidade logarítmica, agora conhecida como *bel*, foi definida originalmente por Alexander Graham Bell (1847-1922) (que, evidentemente, inventou o telefone), como a unidade de potência,

$$\text{número de bels} = \log_{10} \frac{P_2}{P_1}$$

Contudo, esta unidade resultou muito grande, de forma que a unidade decibel (1/10 bel) tornou-se usual. Ou seja,

$$\text{número de dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1}$$

Se as duas potências médias  $P_1$  e  $P_2$  são referidas a impedâncias iguais, a última expressão pode ser dada, em termos das tensões correspondentes, por

$$\text{número de dB} = 10 \log_{10} \left| \frac{\mathbf{V}_2(j\omega)}{\mathbf{V}_1(j\omega)} \right|^2$$

que, evidentemente, é equivalente a (15.37). De qualquer forma, (15.37) é considerada a definição normalizada.

Na prática, as frequências não são bloqueadas ou *atenuadas* de forma ideal no processo de filtragem, como pode ser visto na resposta de um passa-baixas da Fig. 15.5(a). Uma amplitude zero corresponderia a uma atenuação absoluta ou infinita, e qualquer aproximação desta situação ideal seria difícil de avaliar num desenho linear. Por exemplo, se  $|\mathbf{H}(j\omega)| = 0,001$  na Fig. 15.5(a) (1/10 de 1% do seu valor de pico = 1), isso corresponderia a -60 dB (ou 60 dB abaixo de seu valor de pico de 0 dB). Este último número significa muito mais para um engenheiro de telefonia que o número linear.

Mais freqüentemente, na prática, é de interesse considerar a *atenuação ou perda*, definida por

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= -20 \log_{10} |\mathbf{H}(j\omega)| \\ &= -20 \log_{10} \left| \frac{\mathbf{V}_2(j\omega)}{\mathbf{V}_1(j\omega)} \right| \\ &= 20 \log_{10} \left| \frac{\mathbf{V}_1(j\omega)}{\mathbf{V}_2(j\omega)} \right| \text{ dB} \end{aligned} \quad (15.38)$$

Neste caso, uma frequência  $\omega_1$  passa se  $\alpha(\omega_1)$  é relativamente pequeno e é atenuada se  $\alpha(\omega_1)$  é relativamente grande. A unidade decibel nos permite dizer, com alguma precisão normalizada, o grau no qual a frequência é atenuada.

### EXEMPLO 15.8

Como um exemplo, suponha

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

Como o leitor pode verificar, a resposta em amplitude é

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^4}}$$

que é a de um filtro passa-baixas com  $\omega_c = 1$  rad/s. O esboço linear parece com a Fig. 15.5(a). A atenuação, em decibéis, é dada por

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^4} \\ &= 10 \log_{10}(1 + \omega^4) \end{aligned} \quad (15.39)$$

e é indicada na Fig. 15.11 para  $0 \leq \omega \leq 5$ .

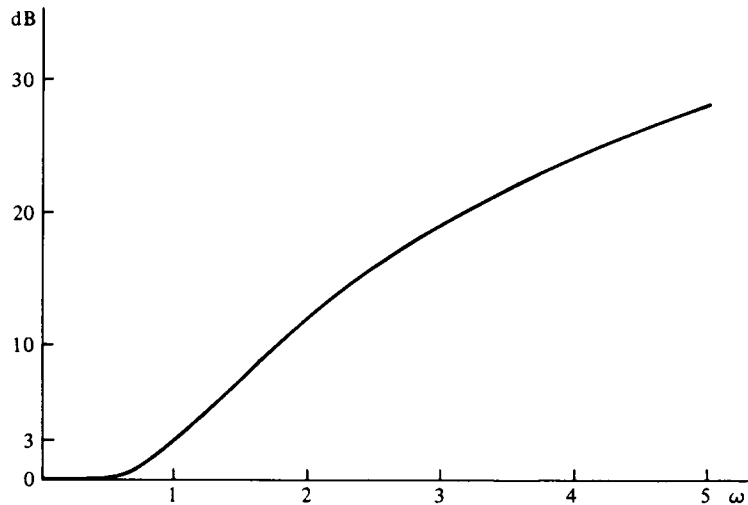


FIGURA 15.11 Atenuação de um filtro passa-baixas

### EXERCÍCIOS

**15.7.1** Faça a resposta em amplitude  $|\mathbf{H}(j\omega)|$  ser tal que  $|\mathbf{H}(j\omega)|_{\max} = |\mathbf{H}(j0)| = K$ , de forma que no corte  $|\mathbf{H}(j\omega_c)| = K/\sqrt{2}$ . Calcule a perda, dada por (15.38), em  $\omega = 0$  e em  $\omega = \omega_c$ . Note que  $\omega_c$  corresponde ao “ponto de 3-dB”, o que significa que em  $\omega = \omega_c$  a perda é aproximadamente 3 dB maior no ponto de mínima perda,  $\omega = 0$ , neste caso.

Resposta:  $\alpha(0) = -20 \log K$ ;  $\alpha(\omega_c) = -20 \log K + 3$

**15.7.2** Dada a função do filtro passa-faixa

$$\mathbf{H}(s) = \frac{0,2s}{s^2 + 0,2s + 1}$$

calcule as perdas em decibéis em  $\omega = 0,0001$ ; 0,5; 0,905; 1,0; 1,105; 10 e 100 rad/s.

Resposta: 94; 18; 3; 0; 3; 34; 54

## 15.8

### Resposta em Freqüência com o "SPICE"

A resposta em freqüência de uma rede é facilmente obtida usando-se o SPICE pela especificação de uma faixa de freqüências e pelo número de pontos desejado dentro da faixa na declaração de controle da solução .AC. A criação de um arquivo de circuito para uma dada resposta em freqüência é quase idêntica aos procedimentos descritos nos capítulos anteriores para análise c a. As declarações de controle da saída .PRINT ou .PLOT podem ser usadas para saída no console ou na impressora.

#### EXEMPLO 15.9

Como primeiro exemplo, vamos plotar a resposta em freqüência para uma varredura linear em freqüência na rede da Fig. 15.12 de 10 a 500 kHz, com  $v_g$  tendo uma amplitude de 1 V. A fonte  $v_d = 0$  (indicada em tracejado), conectada entre o nó 5 ao nó de referência, foi adicionada para especificar a corrente  $i$  da FCCC. Um arquivo de circuito é

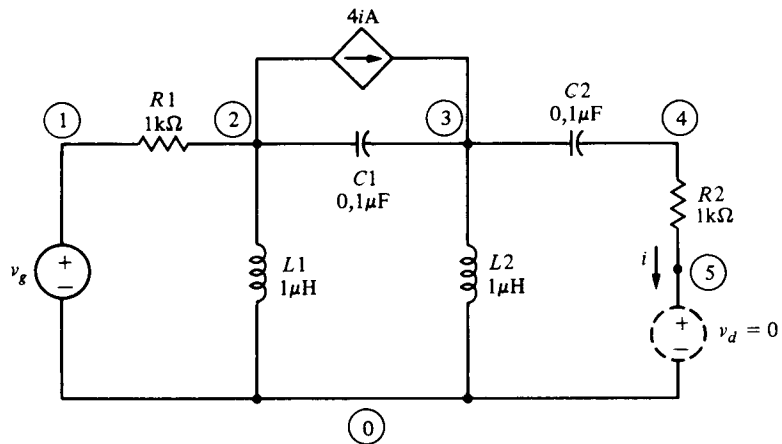


FIGURA 15.12 Circuito RLC com FCCC

RESPOSTA EM FREQÜÊNCIA PARA A FIGURA 15.12

\* DECLARAÇÕES DE DADOS

VG 0 1 AC 1 0

R1 1 2 1K

L 1 2 0 1UH

C1 2 3 0.1UF

F 2 3 VD 4

L 2 3 0 1UH

C2 3 4 0.1UF

R2 4 5 1K

VD 5 0 AC 0 0

\* DECLARAÇÕES DE CONTROLE DA SOLUÇÃO

.AC LIN 25 10K 500K

\* DECLARAÇÕES DE CONTROLE DA SAÍDA

.PLOT AC IM(R2) IP(R2)

.END

O gráfico resultante para este exemplo está indicado na Fig. 15.13

LEGENDA:

\*: IM(R2)  
+: IP(R2)

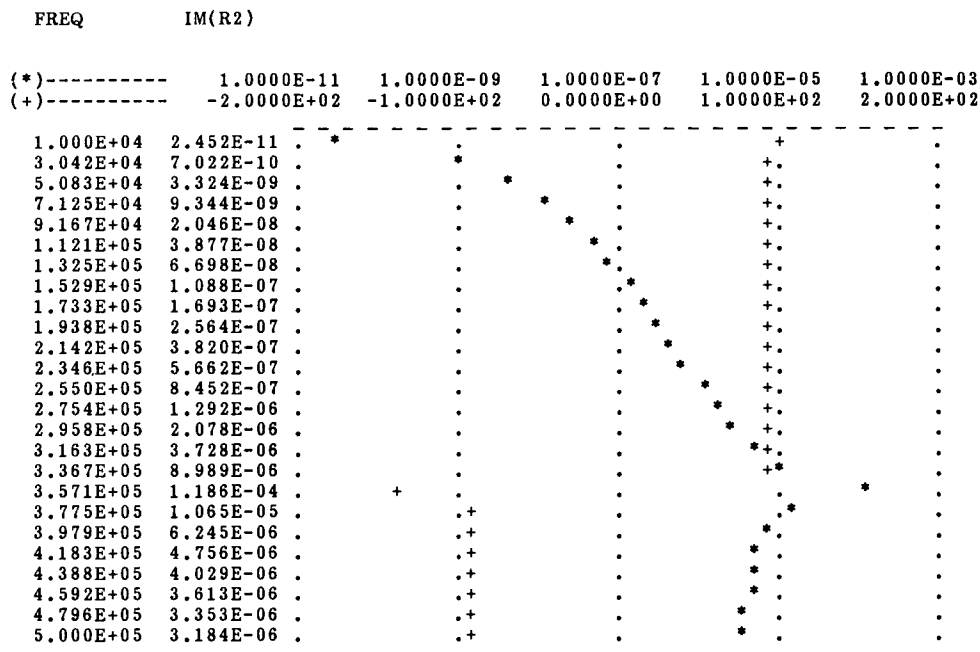


FIGURA 15.13 Resposta em frequência para Fig. 15.12

**EXEMPLO 15.10**

Como um exemplo final, considere a rede da Fig. 15.4, onde atribuímos o número 1 ao nó de  $v_1$ , 2 ao nó comum aos resistores de 2 ohms, 3 ao inversor de entrada do amp. op. e 4 à sua saída. Vamos calcular a resposta em frequência para uma varredura linear de 0,001 a 1 Hz, para  $v$  tendo uma amplitude de 1-V. Um arquivo de circuito, usando o arquivo de subcircuito OPAMP.CKT do Capítulo 4 é

```

RESPSTA EM FREQUÊNCIA PARA O FILTO PASSA-BAIXAS DA FIG. 15.4.
* DECLARAÇÕES DE DADOS
V1 1 0 AC 1 0
R1 1 2 2
R2 2 3 2
C1 2 4 0.5
C2 3 0 0.2 5
XO PAMP 4 3 4 OPAMP
* DEFINA ARQUIVO DE SUBCIRCUITO
.LIB OPAMP.CKT
* DECLARAÇÕES DE CONTROLE DA SOLUÇÃO
.AC LIN 25 0,001 1
* DECLARAÇÕES DE CONTROLE DA SAÍDA
.PLOT AC VM(4) VP(4)
.END
    
```

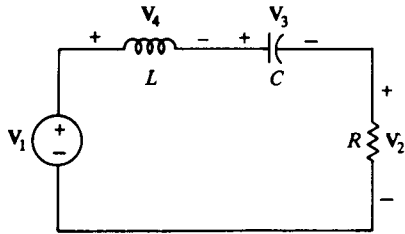
O diagrama para esta resposta é similar ao da Fig. 15.5.

**EXERCÍCIOS**

- 15.8.1 Usando o SPICE, calcule a resposta em frequência de 10 Hz a 400 kHz para  $V$  na Fig. 15.10(a) se o capacitor e o indutor têm valores de  $10 \mu\text{F}$  e  $0,1 \mu\text{H}$ , respectivamente. Use uma fonte de corrente de 1 mA.
- 15.8.2 Usando o SPICE, calcule a resposta em frequência para a rede do Ex. 15.2.4, no intervalo de 0,001 a 1 Hz.

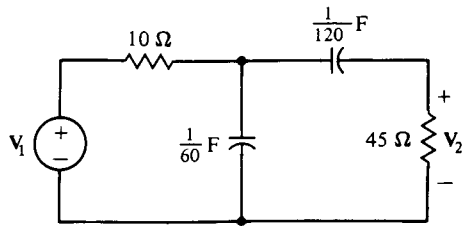
## PROBLEMAS

- 15.1 Para o circuito mostrado,  $R = 2 \Omega$ ,  $L = 2 \text{ H}$  e  $C = 0,02 \text{ F}$ . Se a entrada e a saída forem  $V_1$  e  $V_2$ , respectivamente, calcule a função de rede e esboce as respostas em amplitude e fase. Mostre que o pico da amplitude e a fase zero ocorrem em  $\omega = 5 \text{ rad/s}$ .



PROBLEMA 15.1

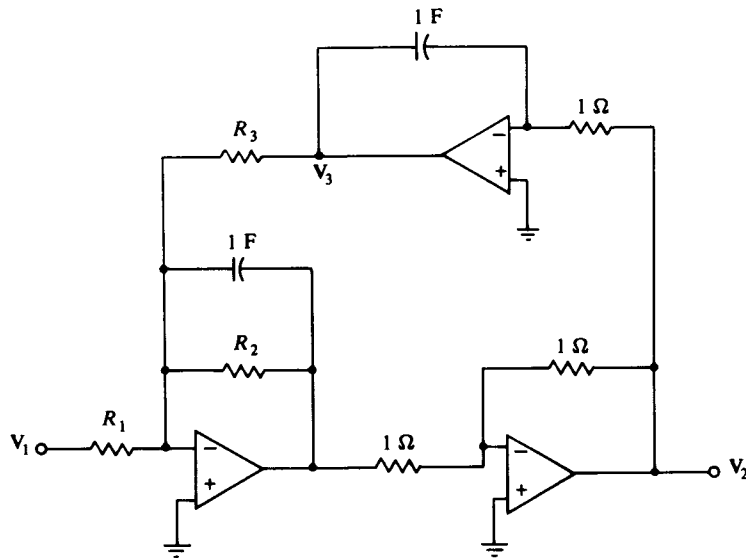
- 15.2 Se  $H(s) = V_2/V_1$ , no circuito do Prob. 15.1, e  $L = 1 \text{ H}$ , calcule  $R$  e  $C$  de forma que o pico da amplitude ocorra em  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  e  $|H(j6)| = 0,707$ .
- 15.3 Calcule  $H(s) = V_2(s)/V_1(s)$  e esboce as respostas em amplitude e fase. Mostre que o pico da amplitude e a fase zero ocorrem em  $\omega = 4 \text{ rad/s}$ .



PROBLEMA 15.3

- 15.4 Mostre que a função de transferência  $V_2/V_1$  é dada por

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{1}{R_1}s}{s^2 + \frac{1}{R_2}s + \frac{1}{R_3}}$$



PROBLEMA 15.4

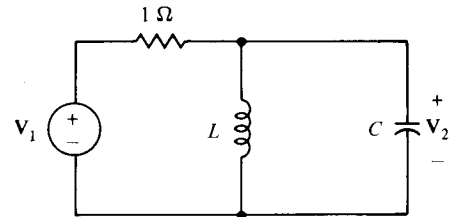
Calcule  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  de forma a que a função de transferência seja idêntica à do Prob. 15.1.

- 15.5 Se  $R_1 = R_2 = 0,5 \Omega$  e  $R_3 = 0,01 \Omega$  no Prob. 15.4, calcule  $H(s)$ , a frequência  $\omega_0$  na qual o pico da amplitude e a fase zero ocorrem e o módulo de  $H$  em  $\omega_0$ .
- 15.6 Mostre que, no caso geral, a função de rede na figura do Prob. 15.1 é dada por

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{(R/L)s}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}$$

Desta forma, por comparação com (15.22) e (15.25), mostre que o circuito é um filtro passa-faixa com frequência de ressonância  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , largura da faixa  $B = R/L$  e índice de mérito  $Q = \omega_0/B = (1/R)\sqrt{LC}$ . Mostre também que o ganho  $G$  do filtro, definido como seu valor de pico da amplitude, é dado, neste caso, por  $G = 1$ .

- 15.7 Mostre, calculando a função de rede  $H(s) = V_2(s)/V_1(s)$ , que o circuito é um filtro passa-faixa com  $\omega_0^2 = 1/(LC)$ ,  $B = 1/C$  e ganho = 1. Escolha  $L$  e  $C$  de forma que  $B = 0,2$  e  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ .

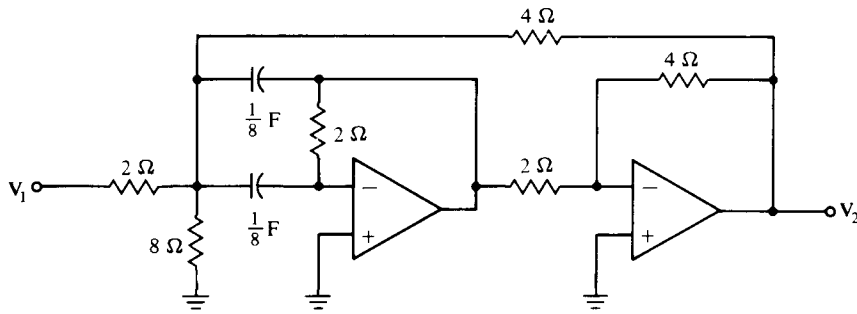


PROBLEMA 15.7

- 15.8 Escolha  $C = 0,1 \mu\text{F}$  e calcule  $R$  e  $L$  no Prob. 15.6, de forma que  $\omega_0 = 10^4 \text{ rad/s}$  e  $B = 10^4 \text{ rad/s}$ .
- 15.9 Mostre que, no Prob. 15.6, se  $L = Q$ ,  $C = 1/Q$  e  $R = 1$ , então

$$H(s) = \frac{(1/Q)s}{s^2 + (1/Q)s + 1}$$

que é uma função de rede passa-faixa com índice de mérito  $Q$ , frequência central  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ , largura da faixa  $B = 1/Q \text{ rad/s}$  e ganho  $G = 1$ .



PROBLEMA 15.12

- 15.10 Mostre que, no caso geral, o circuito do Prob. 15.4 é um filtro passa-faixa com frequência central  $1/\sqrt{R_3}$  rad/s, largura da faixa  $1/R_2$  rad/s, ganho  $R_2/R_1$  e índice de mérito  $R_2/\sqrt{R_3}$ . Faça  $R_1 = Q/G$ ,  $R_2 = Q$  e  $R_3 = 1$  para obter a função de rede

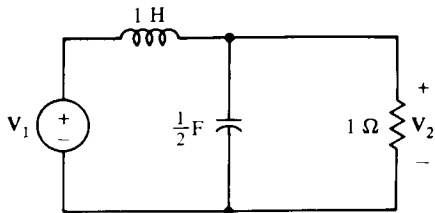
$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{(G/Q)s}{s^2 + (1/Q)s + 1}$$

- 15.11 Usando o resultado do Prob. 15.10, obtenha um filtro passa-faixa tendo a forma da figura do Prob. 15.4, com  $\omega_0 = 1$  rad/s,  $Q = 10$  e  $G = 2$ . Calcule os pontos de corte aproximados e a largura da faixa.
- 15.12 Mostre calculando  $V_2/V_1$  que o circuito é um filtro passa-faixa e calcule o ganho, a largura da faixa e a frequência central.
- 15.13 Mostre que a função de rede  $V_3/V_1$  na figura do Prob. 15.1 é dada por

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}$$

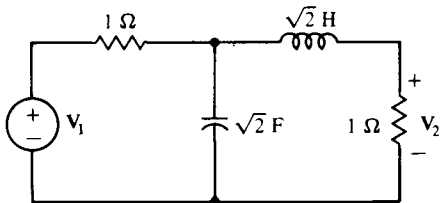
Faça  $R = 1 \Omega$ ,  $L = 1/\sqrt{2}$  H e  $C = \sqrt{2}$  F, e mostre que o resultado é um filtro passa-baixas e  $\omega_c = 1$  rad/s, calculando a resposta em amplitude.

- 15.14 Mostre que o circuito é um filtro passa-baixas, calculando a função de transferência  $H(s) = V_2(s)/V_1(s)$ , as respostas em amplitude e fase e  $\omega_c$ .



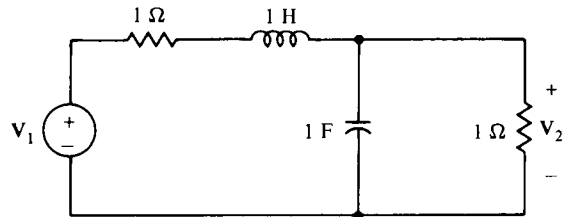
PROBLEMA 15.14

- 15.15 Para o circuito indicado, calcule a função de rede,  $H(s) = V_2(s)/V_1(s)$ , e esboce as respostas em amplitude e fase. Mostre que o pico da amplitude e a fase zero ocorrem em  $\omega = 0$ .



PROBLEMA 15.15

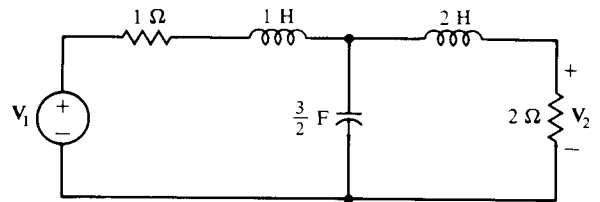
- 15.16 Mostre que o circuito é um filtro passa-baixas, calculando a função de transferência  $H(s) = V_2(s)/V_1(s)$ , as respostas em amplitude



PROBLEMA 15.16

e fase e  $\omega_c$ . (Note que este circuito e o do Prob. 15.14 têm a mesma resposta em amplitude, exceto por um multiplicador constante.)

- 15.17 Mostre que o circuito dado é um filtro passa-baixas com  $\omega_c = 1$  rad/s, calculando  $H(s) = V_2(s)/V_1(s)$  e a resposta em amplitude.



PROBLEMA 15.17

- 15.18 Um tipo de filtro passa-baixas é o filtro *Butterworth* de enésima ordem, cuja resposta em amplitude é

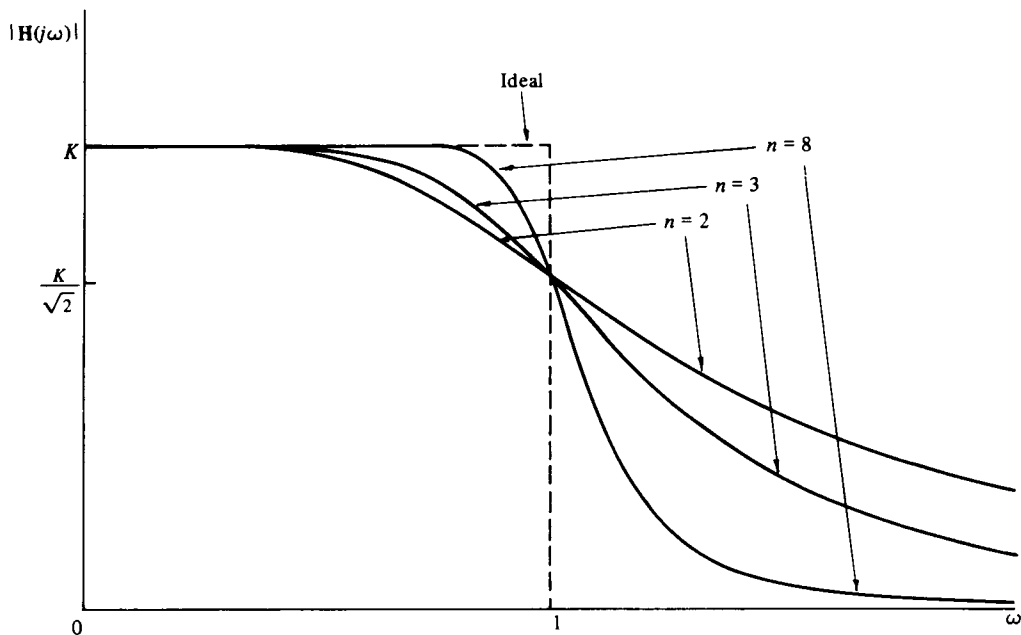
$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

onde  $K$  é uma constante. Idealmente, um filtro deixaria passar igualmente todas as frequências na sua faixa de passagem ( $|H| > 0$  seria constante) e bloquearia perfeitamente todas as outras frequências ( $|H|$  seria zero). Como mostrado na figura, para  $n = 2, 3$  e  $8$ , o filtro Butterworth se aperfeiçoa (se aproxima do ideal) com o aumento da ordem  $n$ . Mostre que  $\omega_c = 1$  rad/s para qualquer  $n$  e que os filtros dos Probs. 15.13 e 15.17 são filtros Butterworth de segunda ordem e de terceira ordem, respectivamente. Finalmente, esboce a resposta de um filtro Butterworth de quarta ordem e compare-a com as respostas de segunda, terceira e oitava ordens.

- 15.19 Mostre que, para a figura do Prob. 15.4

$$H(s) = \frac{V_3(s)}{V_1(s)} = -\frac{1/R_1}{s^2 + (1/R_2)s + (1/R_3)}$$

Escolha valores para as resistências de forma que o circuito seja um filtro passa-baixas Butterworth, com  $\omega_c = 1$  rad/s e  $H(0) = -2$ . (Sugestão: Pelo Prob. 15.13, o denominador de  $H(s)$  deve ser  $s^2 + \sqrt{2}s + 1$ .)



PROBLEMA 15.18

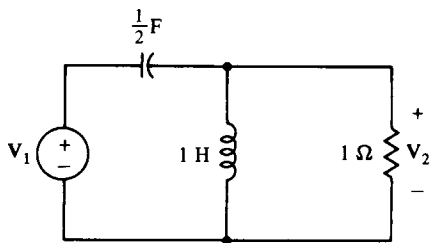
15.20 Se o ganho de um filtro passa-baixas com função de rede  $H(s)$  é definido como  $K = |H(0)|$ , compare os ganhos nos casos gerais dos Probs. 15.13 e 15.19, que são, respectivamente, circuitos passivos e ativos que se desempenham como filtros passa-baixas. Observe que ganhos superiores a 1 são possíveis com elementos ativos presentes. Essa característica e a ausência de indutores, que são indesejáveis para baixas frequências, são vantagens de filtros ativos sobre filtros passivos.

15.21 Mostre que na figura do Prob. 15.1

$$\frac{V_4}{V_1} = \frac{s^2}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}$$

Faça  $R = 1 \Omega$ ,  $L = 1/\sqrt{2} \text{ H}$  e  $C = \sqrt{2} \text{ F}$  e mostre que o resultado é um filtro passa-altas com corte  $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$ . O ganho de um filtro passa-altas é definido como o limite de sua função de transferência quando  $s \rightarrow \infty$ . Note que, neste caso, o ganho é 1.

15.22 Mostre, calculando a função de transferência  $V_2(s)/V_1(s)$ , a resposta em amplitude, o ganho (ver o Prob. 15.21) e o ponto de corte  $\omega_c$ , que o circuito é um filtro passa-altas de segunda ordem.



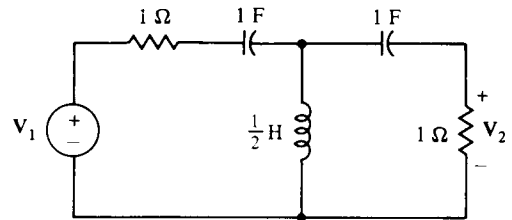
PROBLEMA 15.22

15.23 Mostre, calculando a função de transferência  $V_2(s)/V_1(s)$ , a resposta em amplitude, o ganho e  $\omega_c$ , que o circuito é um filtro passa-altas de terceira ordem.

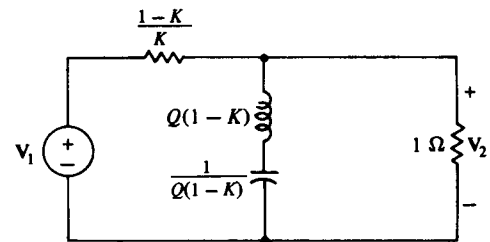
15.24 Mostre que a função de rede do circuito dado é

$$H(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{K(s^2 + 1)}{s^2 + (1/Q)s + 1}$$

Desta forma o circuito é um filtro corta-faixa com frequência cen-



PROBLEMA 15.23



PROBLEMA 15.24

tral (rejeição)  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ . Também, como no caso do filtro passa-faixa,  $Q$  é o índice de mérito e  $B = \omega_0/Q = 1/Q$  é a largura da faixa. Note que o ganho é  $H(0) = K$ , onde  $0 < K < 1$ .

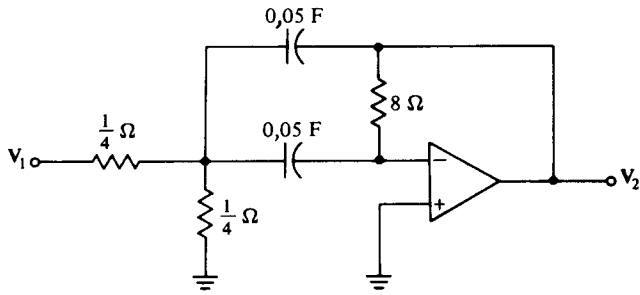
15.25 Use os resultados do Prob. 15.24 para projetar um filtro corta-faixa com  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ ,  $Q = 2$  e um ganho de  $1/2$ .

15.26 Altere em escala a impedância e a frequência no circuito do Prob. 15.1 com  $R = 1 \Omega$ ,  $L = 0,5 \text{ H}$  e  $C = 0,02 \text{ F}$  para obter um filtro passa-faixa com frequência central  $f_0 = 10^5 \text{ Hz}$ , com índice de mérito  $Q = 5$  e usando um capacitor de  $1 \text{ nF}$  (Sugestão: Veja o Prob. 15.9.)

15.27 Obtenha um filtro passa-faixa ativo usando a configuração do Prob. 15.4, com  $f_0 = 1000 \text{ Hz}$ ,  $Q = 10$  e  $K = 2$ , com capacitores de  $0,01 \mu\text{F}$ . (Sugestão: Ver Prob. 15.10.)

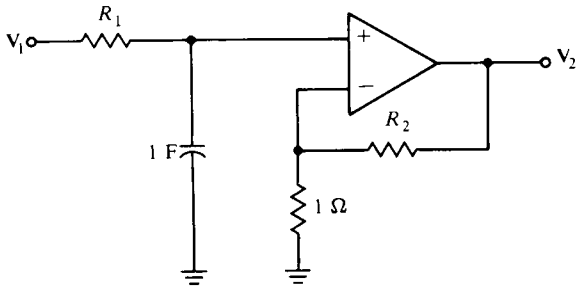
15.28 Mostre, calculando  $H = V_2/V_1$ , que o circuito dado é um filtro passa-faixa e calcule a frequência central e a faixa de passagem. Altere em escala o circuito de forma que a frequência central seja  $20.000 \text{ rad/s}$ , usando capacitores de  $0,01 \mu\text{F}$ .





**PROBLEMA 15.28**

15.29 Determine  $R_1$  e  $R_2$ , de forma que o circuito seja um filtro passa-baixas de primeira ordem ( $\mathbf{H} = \mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$ ), com  $\omega_c = 1$  rad/s e um ganho de 3. Altere em escala o resultado, para obter  $\omega_c = 10^5$  rad/s, usando um capacitor de 1-nF.



**PROBLEMA 15.29**

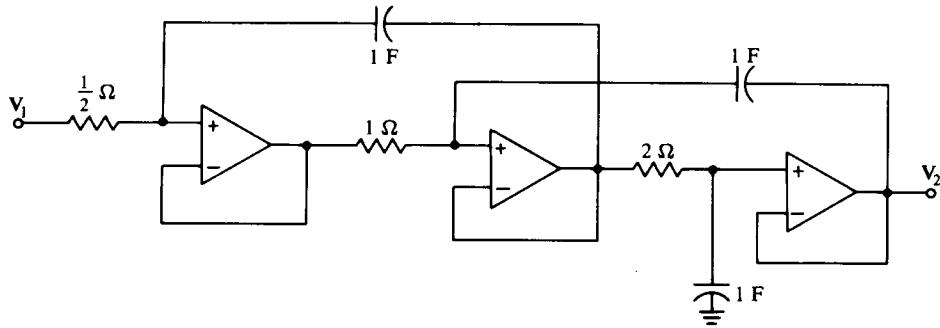
- 15.30 Mostre que o circuito dado é um filtro "Butterworth" passa-baixas de terceira ordem com  $\omega_c = 1$  rad/s e ganho de 1. Altere em escala o circuito de forma que os capacitores sejam de 0,01  $\mu\text{F}$  cada e  $f_c = 1000$  Hz.
- 15.31 Altere em escala o circuito do Prob. 15.23 para obter um filtro passa-altas com  $\omega_c = 10^5$  rad/s, usando capacitores de 1-nF (Sugestão:  $\omega_c = 1$  rad/s no Prob. 15.23.)
- 15.32 Mostre que o circuito, com  $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}_2(s)/\mathbf{V}_1(s)$ , é um filtro passa-altas de segunda ordem com a mesma função de transferência, exceto pelo ganho, que o Prob. 15.22.
- 15.33 Altere em escala o circuito do Prob. 15.32 para obter um filtro passa-altas com  $\omega_c = 2000$  rad/s, usando capacitores de 0,05  $\mu\text{F}$ .
- 15.34 Mostre que, se  $R_1 = R_2 R_4$ , a função de transferência é

$$\frac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{V}_1(s)} = \frac{-\frac{1}{R_4} s^2}{s^2 + \frac{1}{R_2} s + \frac{1}{R_3}}$$

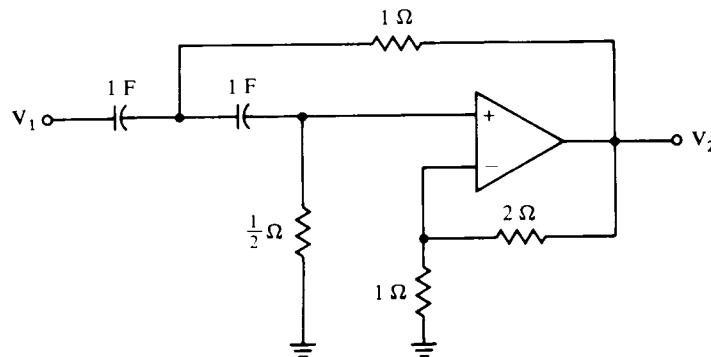
e, desta forma, o circuito é um filtro passa-altas de segunda ordem. Calcule  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  e  $R_4$ , de forma que a função de transferência seja

$$\frac{\mathbf{V}_2(s)}{\mathbf{V}_1(s)} = \frac{-3s^2}{s^2 + 2s + 2}$$

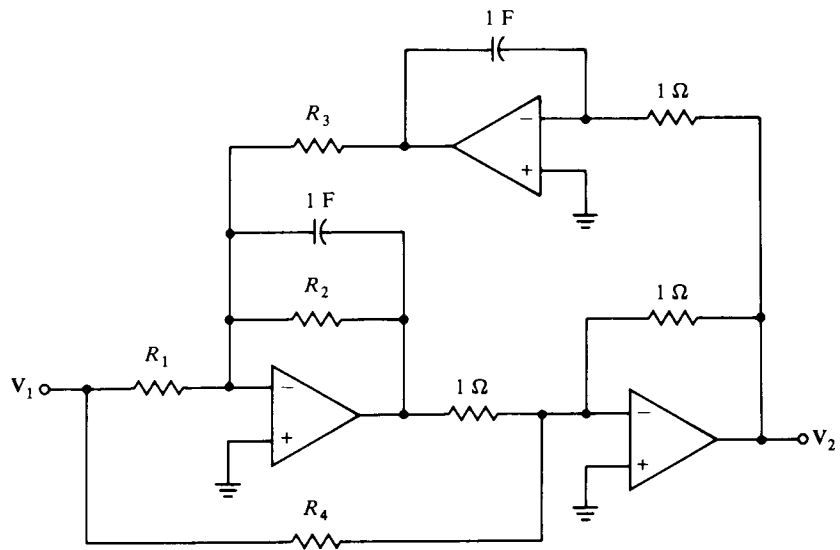
- 15.35 Altere em escala a rede da figura do Prob. 15.24 de forma que  $\omega_0 = 10^5$  rad/s,  $Q = 5$  e  $K = 0,5$  e a capacitância seja 1 nF.
- 15.36 Mostre que o circuito dado é um filtro corta-faixa com um ganho de 1,  $Q = 1$  e a frequência central  $\omega_0 = 1$  rad/s. Altere em escala a rede para obter uma frequência central  $f_0 = 60$  Hz, usando capacitores de 1 e 2 nF.



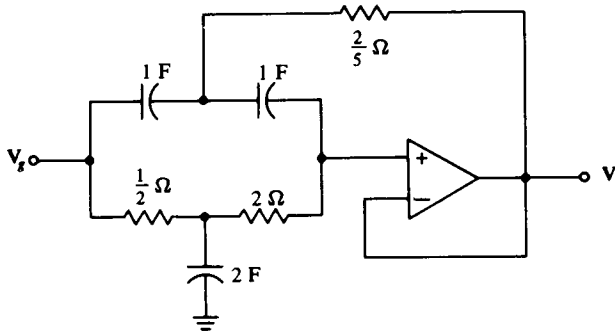
**PROBLEMA 15.30**



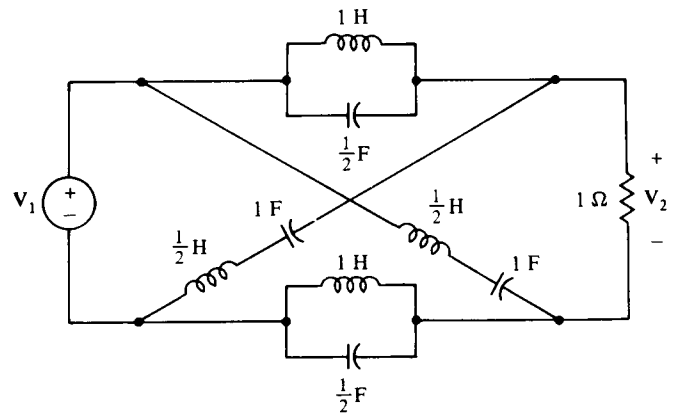
**PROBLEMA 15.32**



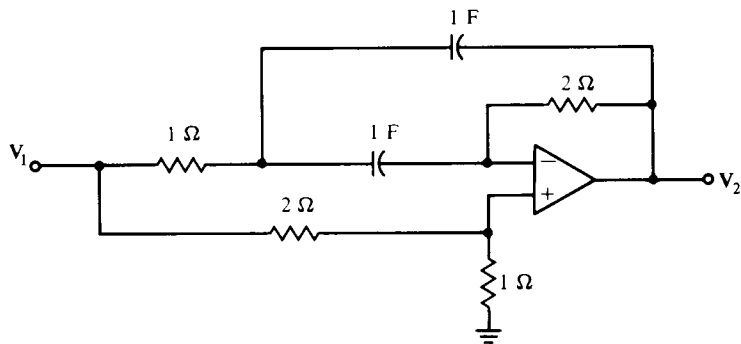
PROBLEMA 15.34



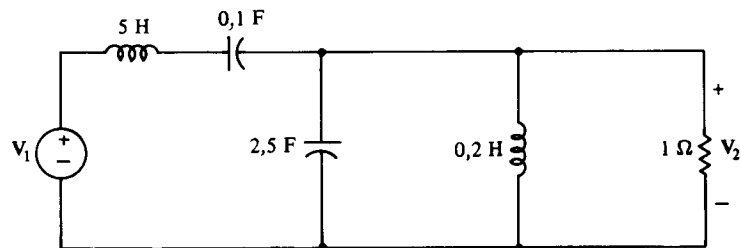
PROBLEMA 15.36



PROBLEMA 15.37



PROBLEMA 15.38



PROBLEMA 15.39

15.37 Mostre que a função de transferência é

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{s^2 - 2s + 2}{s^2 + 2s + 2}$$

e calcule as respostas em amplitude e fase. Note, do Ex. 15.2.4, que o circuito é um filtro passa-todas.

15.38 Mostre, calculando  $\mathbf{H} = V_2/V_1$  e as respostas em amplitude e fase, que o circuito é um filtro passa-todas de segunda ordem (Sugestão: Veja o Ex. 15.2.4).

15.39 O circuito dado é um filtro passa-faixa de quarta ordem (o denominador da função de rede é de quarto grau), com  $\omega_0 = \sqrt{2}$  rad/s e  $Q = 5$ . Confirme este resultado calculando

$$\mathbf{H}(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{2}{25}s^2}{s^4 + \frac{2}{5}s^3 + \frac{102}{25}s^2 + \frac{4}{5}s + 4}$$

e assim por diante. [Sugestão: Calcule a resposta em amplitude e verifique que  $\omega_0 = \sqrt{2}$  produz o ponto de pico e que  $\omega_{c1}, \omega_{c2} \approx \omega_0 \mp (\omega_0/10)$  satisfaz a equação apropriada. Visto que  $|\mathbf{H}| \approx 0$ , seu máximo ocorre quando o máximo de  $|\mathbf{H}|^2$  ocorre. Também,  $|\mathbf{H}|$  e  $|\mathbf{H}|^2$  são funções de  $\omega^2$ ; desta forma o máximo ocorre quando

$$\frac{d}{d\omega^2} |\mathbf{H}(j\omega)|^2 = 0$$

Visto que  $(d/d\omega) |\mathbf{H}|^2 = (d/d\omega^2) |\mathbf{H}|^2 (d\omega^2/d\omega) = 2\omega (d/d\omega^2) |\mathbf{H}|^2 = 0$ , devemos verificar  $\omega = 0$  separadamente.]

15.40 Altere em escala o circuito do Prob. 15.39 de forma que  $\omega_0 = \sqrt{2} \times 10^6$  rad/s, usando capacitores de  $0,01 \mu\text{F}$  e  $0,25 \mu\text{F}$ .

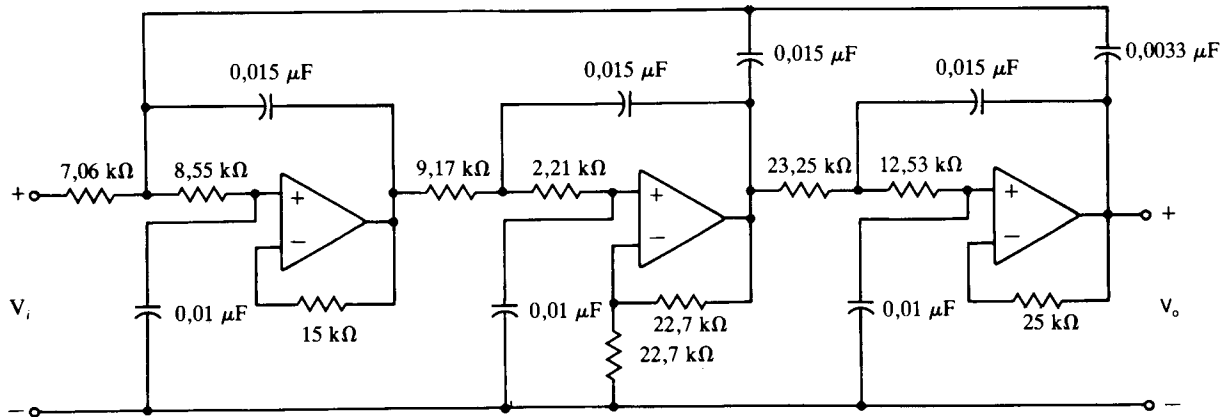
## PROBLEMAS DE APLICAÇÃO DE COMPUTADOR

15.41 Usando SPICE, plote a resposta em frequência de  $V_2$  no Prob. 15.17 para  $0,001 < f < 0,05$  Hz.

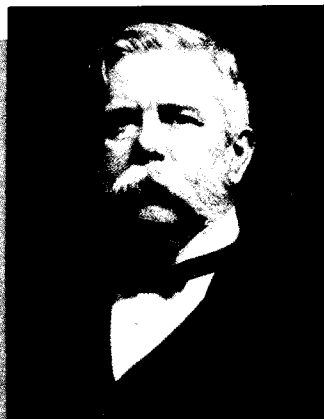
15.42 Repita o Prob. 15.28 para calcular a frequência central e a largura da faixa diretamente de uma plotação usando o SPICE para o circuito indicado.

15.43 Usando SPICE, plote a resposta em frequência da rede do Prob. 15.39 para  $0,001 < f < 0,5$  Hz.

15.44 Plote a resposta em frequência da rede indicada e determine o tipo de filtro (por exemplo, passa-faixa, etc.) e as características (frequência de corte, etc.) usando SPICE.



PROBLEMA 15.44



George Westinghouse  
1846-1914

---

*Westinghouse foi um verdadeiro fidalgo... com quem a humanidade tem um imenso débito de gratidão.*

*Nikola Tesla*

---

## Transformadores

Na "batalha de correntes" dos anos 1880, ca venceu cc por causa dos fabulosos inventos de Nikola Tesla, da disponibilidade de transformadores para elevar e abaixar a tensão alternada e do gênio de George Westinghouse. Westinghouse já havia feito fortuna em 1869 com a invenção de disjuntores a ar para trens ferroviários. Ele foi bastante perspicaz para usar sua riqueza e empregar Tesla e para comprar a patente de Lucien Gaulard e John D. Gibbs do recém-inventado transformador.

Westinghouse nasceu em Central Bridge, Nova Iorque, filho de um próspero proprietário de uma fábrica de máquinas. Serviu no exército e na marinha da União durante a Guerra Civil e freqüentou o Union College, antes de trabalhar por conta própria. Aos 40 anos de idade, havia fundado a Companhia Westinghouse de Disjuntores a Ar, desenvolvido um sistema de tubulações para levar gás natural de modo seguro às residências e inventado o medidor de gás. Organizou a Westinghouse Electric Company em 1886, que usou como base para defender, com sucesso, o sistema de ca. Westinghouse foi um dos maiores inventores norte-americanos e um dos verdadeiros gigantes da indústria dos Estados Unidos.■

Em nosso estudo da indutância no Cap. 7, verificamos que uma corrente variável produz um fluxo magnético variável, que induz uma tensão numa bobina. Neste capítulo, vamos considerar o efeito de um fluxo magnético variável que seja comum a duas ou mais bobinas distintas. Bobinas vizinhas que compartilham um fluxo magnético comum são ditas *mutuamente acopladas*. Em circuitos mutuamente acoplados, uma corrente variável em um enrolamento produz uma tensão induzida no outro enrolamento. A tensão induzida é caracterizada por uma indutância mútua, que existe entre as bobinas próximas.

Um sistema de bobinas mutuamente acopladas que são enroladas numa forma, ou *núcleo*, é normalmente chamado *transformador*. Transformadores estão disponíveis numa grande variedade de tamanhos e formatos, que são projetados para numerosas aplicações. Dispositivos tão pequenos como um comprimido de aspirina, por exemplo, são comuns em rádios, aparelhos de TV e amplificadores estereofônicos, para conectar os vários estágios dos sistemas. Por outro lado, transformadores são projetados para uso em sistemas de potência em 60-Hz, com tamanhos que variam de uma bola de pingue-pongue a transformadores maiores que um automóvel.

Vamos nos restringir a transformadores *lineares* (aqueles cujas bobinas são lineares) e iniciar estudando as propriedades de indutância *própria* e *mútua*. O armazenamento de energia e as propriedades das impedâncias serão então analisadas, e o caso importante e especial do transformador linear, o transformador ideal, será então apresentado. Concluiremos o capítulo com uma discussão de circuitos equivalentes que será útil para representar transformadores lineares.

A análise de circuitos apresentada neste capítulo vai incluir tanto casos no domínio do tempo como no domínio da frequência. Ênfase particular será dada ao domínio da frequência porque as aplicações mais importantes de transformadores ocorrem em regime permanente ca.

## 16.1

### Indutância Mútua

Na Sec. 7.4 vimos que a indutância  $L$  de um indutor linear, como mostrado na Fig. 16.1, está relacionada ao enlace de fluxo  $\lambda$  pela expressão

$$\lambda = N\phi = Li$$

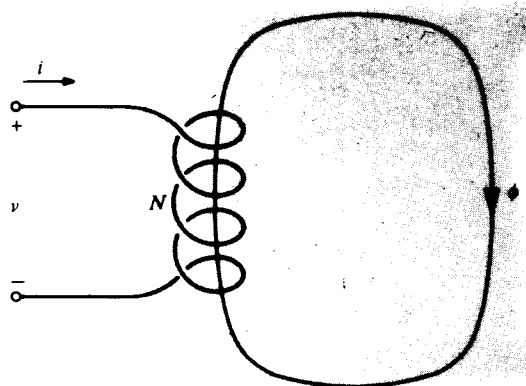
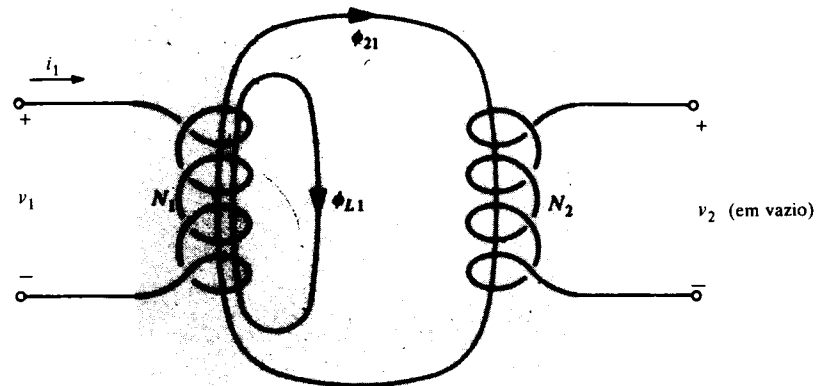


FIGURA 16.1 Indutor simples

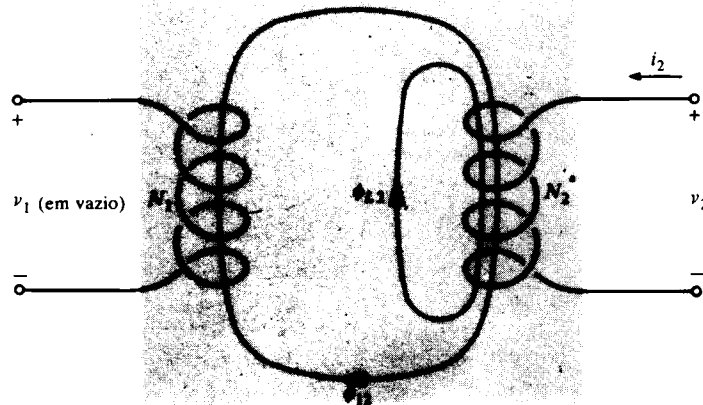
Da lei de Faraday, a tensão nos terminais é dada por

$$v = \frac{d\lambda}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

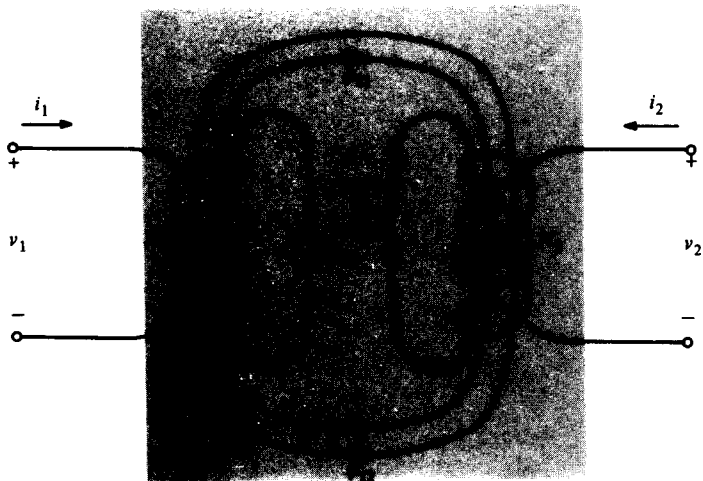
É evidente, a partir da lei de Faraday, que uma tensão é induzida numa bobina que enlaça um fluxo magnético variável no tempo, independentemente da fonte do fluxo. Vamos, portanto, considerar uma segunda bobina, tendo  $N_2$  espiras, colocada nas vizinhanças da primeira bobina, que tem  $N = N_1$  espiras, como indicado na Fig. 16.2(a). Neste caso, construímos um transformador simples, com dois



(a)



(b)



(c)

FIGURA 16.2 Bobinas mutuamente acopladas nas quais (a)  $i_2 = 0$ ; (b)  $i_1 = 0$ ; (c)  $i_1$  e  $i_2$  são diferentes de zero

pares de terminais, no qual a bobina 1 é chamada de *enrolamento primário* e a bobina 2, *enrolamento secundário*.

Para apresentar várias grandezas indutivas importantes, vamos começar estudando o caso do secundário em vazio (circuito aberto) da Fig. 16.2(a). A corrente  $i_1$  produz um fluxo magnético  $\phi_{11}$ , dado por

$$\phi_{11} = \phi_{L1} + \phi_{21}$$

onde  $\phi_{L1}$  é o fluxo de  $i_1$  que enlaça a bobina 1 e não a bobina 2, chamado de *fluxo de dispersão*, e  $\phi_{21}$  é o fluxo de  $i_1$  que enlaça a bobina 2 e a bobina 1, chamado de *fluxo mútuo*.

Devemos assumir, como no caso do indutor linear, que o fluxo em cada bobina enlaça todas as espiras da bobina. Visto que o secundário é um circuito aberto, nenhuma corrente circula na bobina 2 e o enlace de fluxo dessa bobina é

$$\lambda_2 = N_2 \phi_{21}$$

Portanto, a tensão  $v_2$  é dada por

$$v_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt}$$

(Vamos justificar mais tarde que a polaridade é como indicado.)

Num transformador linear, o fluxo  $\phi_{21}$  é proporcional a  $i_1$ . Desta forma, podemos escrever

$$N_2 \phi_{21} = M_{21} i_1 \quad (16.1)$$

onde  $M_{21}$  é a *indutância mútua*, em henrys (H). Em termos desta indutância mútua, a tensão no secundário em vazio torna-se

$$v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

Vamos agora calcular a tensão  $v_1$  no primário. Sabemos que

$$v_1 = \frac{d\lambda_1}{dt}$$

onde  $\lambda_1$ , o enlace de fluxo da bobina 1, é dado por

$$\lambda_1 = N_1 \phi_{11}$$

Como no caso de um indutor linear isolado, a indutância  $L_1$  do enrolamento primário, algumas vezes chamada de *indutância própria* do primário, para distingui-la da indutância mútua, é definida por

$$L_1 i_1 = N_1 \phi_{11} \quad (16.2)$$

Por isso, vemos que

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

no caso em estudo.

A seguir, vamos estudar a Fig. 16.2(b), na qual o primário é um circuito aberto e uma corrente  $i_2$  flui no secundário. Procedendo como anteriormente, temos

$$\phi_{22} = \phi_{L2} + \phi_{12}$$

onde  $\phi_{L2}$  é o fluxo de dispersão de  $i_2$ , que enlaça a bobina 2 mas não a bobina 1, e  $\phi_{12}$  é o fluxo mútuo de  $i_2$ , que enlaça as bobinas 1 e 2. O enlace de fluxo da bobina 1 é

$$\lambda_1 = N_1 \phi_{12}$$

Portanto, a tensão no primário é dada por

$$v_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi_{12}}{dt}$$

Se definimos

$$N_1 \phi_{12} = M_{12} i_2 \quad (16.3)$$

onde  $M_{12}$  é a indutância mútua, então a tensão no primário, em vazio, é

$$v_1 = M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

Na próxima seção, mostraremos que as indutâncias mútuas  $M_{12}$  e  $M_{21}$  são iguais; portanto, podemos escrever

$$M = M_{12} = M_{21} \quad (16.4)$$

e nos referir a  $M$  como a indutância mútua.

A tensão no secundário é dada por

$$v_2 = \frac{d\lambda_2}{dt}$$

onde o enlace de fluxo é

$$\lambda_2 = N_2 \phi_{22}$$

Definimos agora a relação

$$L_2 i_2 = N_2 \phi_{22} \quad (16.5)$$

onde  $L_2$  é a indutância própria da bobina 2 em henrys (H). Portanto,

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt}$$

no caso do primário em vazio.

Vamos agora estudar o caso geral da Fig. 16.2(c), no qual tanto  $i_1$  como  $i_2$  são diferentes de zero. Os fluxos nas bobinas 1 e 2, como indicado na figura, são

$$\phi_1 = \phi_{L1} + \phi_{21} + \phi_{12} = \phi_{11} + \phi_{12}$$

$$\phi_2 = \phi_{L2} + \phi_{12} + \phi_{21} = \phi_{21} + \phi_{22}$$

respectivamente. Portanto, os enlaces de fluxo nas bobinas do primário e do secundário são

$$\lambda_1 = N_1 \phi_{11} + N_1 \phi_{12}$$

$$\lambda_2 = N_2 \phi_{21} + N_2 \phi_{22}$$

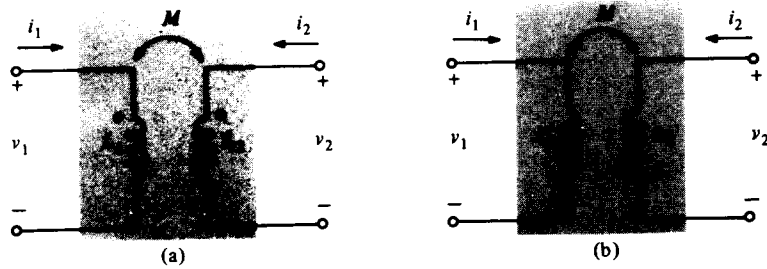
Substituindo de (16.1)-(16.5), encontramos, por diferenciação, que as tensões no primário e no secundário são

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \quad (16.6)$$

Fica claro que as tensões consistem em tensões induzidas próprias, devidas às indutâncias  $L_1$  e  $L_2$  e tensões mútuas, devidas à indutância mútua  $M$ .

Nesta discussão, os enrolamentos da Fig. 16.2 são tais que o sinal algébrico dos termos das tensões mútuas,  $M di_1/dt$  e  $M di_2/dt$ , são positivos para a tensão no terminal e correntes como indicado. Na prática, é certamente indesejável mostrar um esboço detalhado dos enrolamentos. Evita-se este procedimento, pelo uso de uma *convenção de ponto*, que indica a polaridade da tensão mútua. Símbolos equivalentes de circuito para o transformador da Fig. 16.2 estão indicados na Fig. 16.3. As marcas de polaridade são atribuídas de forma que uma corrente aumentando positivamente que flui para dentro do terminal com ponto (sem ponto) em um enrolamento, induz uma tensão positiva no terminal com ponto (sem ponto) do outro enrolamento.





**FIGURA 16.3** Símbolos de circuito para o transformador da Fig. 16.2: (a) pontos nos terminais superiores; (b) pontos nos terminais inferiores

Com o propósito de escrever as equações representativas, podemos estabelecer a seguinte regra:

Uma corrente  $i$  que entra num terminal com ponto (sem ponto) em um enrolamento induz uma tensão  $M di/dt$  com polaridade positiva no terminal com ponto (sem ponto) do outro enrolamento.

Notamos que, com esta regra, não tem importância se a corrente  $i$  está aumentando ou não, visto que o sinal da tensão induzida está considerado em  $di/dt$ . Ou seja, se  $i$  for crescente, a tensão induzida  $M di/dt$  é positiva, e, se  $i$  for decrescente, a tensão induzida é negativa. Se  $i$  for uma corrente cc, então certamente a tensão induzida é zero.

### EXEMPLO 16.1

Como exemplo, vamos escrever as equações de laço para a Fig. 16.3(a). Vemos que  $i_2$  entra num terminal com ponto. Então, a tensão mútua  $M di_2/dt$  tem polaridade positiva no terminal com ponto do primário. De forma similar, visto que  $i_1$  entra num terminal com ponto, a tensão mútua  $M di_1/dt$  tem polaridade positiva no terminal com ponto do secundário. Aplicando-se a LKT nos circuitos do primário e do secundário dá (16.6).

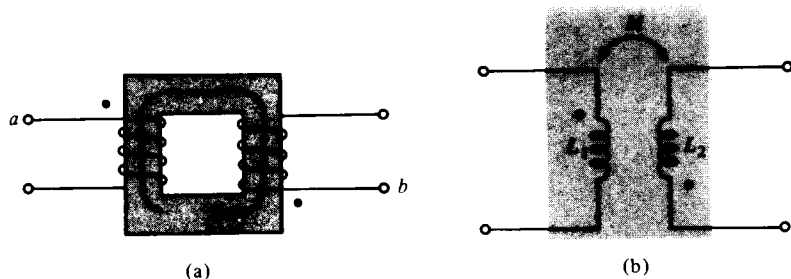
De modo similar, declarações idênticas se aplicam aos terminais sem pontos da Fig. 16.3(b), e outra aplicação da LKT resulta novamente em (16.6).

Vamos agora estabelecer um método para atribuir marcas de polaridade num transformador. Começamos atribuindo arbitrariamente um ponto a um terminal, como o terminal  $a$  da Fig. 16.4(a). Uma corrente neste terminal produz um fluxo  $\phi$ , como indicado. (O sentido de  $\phi$  é determinado pela regra da mão direita, que estabelece que se os dedos da mão direita envolvem uma bobina no sentido da corrente, o polegar indica o sentido do fluxo.) O terminal marcado com ponto na outra bobina é aquele no qual uma corrente entra e produz um fluxo no mesmo sentido de  $\phi$ . (Esta declaração, que pode ser usada para obter-se a polaridade da tensão induzida, é uma consequência da regra conhecida como *Lei de Lenz*. O leitor poderá estudar esta lei, formulada em 1834 pelo cientista alemão Heinrich F. E. Lenz, num curso de teoria de campo eletromagnético.) Notamos que uma corrente circulando para  $b$  na Fig. 16.4(a) produz um fluxo no mesmo sentido de  $\phi$ . Desta forma, o terminal  $b$  recebe o ponto de polaridade. O símbolo de circuito para este transformador está indicado na Fig. 16.4(b).

Evidentemente, as marcas de polaridade num transformador são independentes das tensões terminais e correntes atribuídas. Considere, por exemplo, as atribuições da Fig. 16.5(a). Aplicando a LKT nos laços do primário e do secundário, encontramos

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$



**FIGURA 16.4** (a) Modelo de transformador para se determinar as marcas de polaridade (b) símbolo de circuito

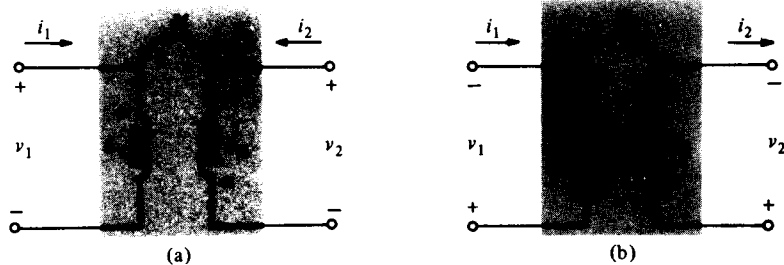


FIGURA 16.5 Transformador com atribuições diversas de tensões terminais e correntes

Na Fig. 16.5(b), as tensões e correntes atribuídas foram alteradas. Aplicando a LKT para esta nova escolha, obtemos

$$v_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

O resultado acima pode também ser obtido por um método alternativo para seleção do sinal das tensões mútuas, como se segue:

Se as duas correntes entram (ou saem) dos terminais com ponto das bobinas, os termos de indutância mútua e própria para cada par de terminais têm o mesmo sinal; de outra forma, eles têm sinais opostos.

O estudante pode facilmente verificar o uso deste método para os casos das Figs. 16.3 e 16.5.

### EXEMPLO 16.2

Como exemplo, vamos calcular a tensão  $v_2$ , em vazio (circuito aberto) no circuito da Fig. 16.6, dado que  $i_1(0^-) = 0$ . Para  $t > 0$ , visto que nenhuma corrente circula no secundário, aplicando a LKT ao longo do primário, obtemos

$$\frac{di_1}{dt} + 10i_1 = 20$$

Esta é uma equação diferencial de primeiro grau, com solução geral

$$i_1 = 2 + Ae^{-10t}$$

Visto que  $i(0^+) = i(0^-) = 0$ ,  $A = -2$  e

$$i_1 = 2(1 - e^{-10t}) \text{ A}$$

Portanto, no secundário,

$$v_2 = -0,25 \frac{di_1}{dt}$$

$$= -5e^{-10t} \text{ V}$$

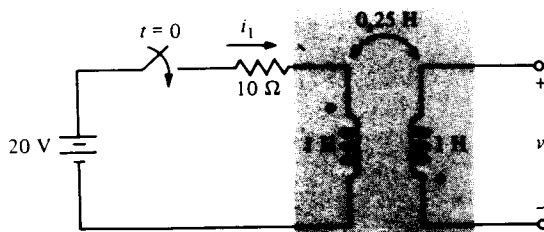


FIGURA 16.6 Circuito com secundário em vazio

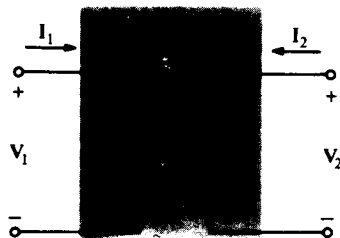


FIGURA 16.7 Circuito fasorial para um transformador

Vamos estudar agora o transformador da Fig. 16.3(a), no caso de uma excitação com frequência complexa  $s$ . Neste caso, visto que diferenciação no domínio do tempo é equivalente a multiplicar por  $s$  no domínio da frequência, as equações fasoriais correspondentes a (16.6) são

$$\begin{aligned} V_1(s) &= sL_1 I_1(s) + sMI_2(s) \\ V_2(s) &= sMI_1(s) + sL_2 I_2(s) \end{aligned}$$

O circuito fasorial para esta rede está indicado na Fig. 16.7. No caso de uma excitação puramente senoidal, simplesmente trocamos  $s$  por  $j\omega$ .

**EXEMPLO 16.3**

Como exemplo final, vamos calcular a tensão fasorial  $V_2(s)$  na rede da Fig. 16.8 devida à função de excitação complexa  $V_1(s)$ . As equações de laço no primário e no secundário são

$$\begin{aligned} V_1 &= (s + 2)I_1 + sI_2 \\ 0 &= sI_1 + (2s + 3)I_2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\begin{vmatrix} s + 2 & V_1 \\ s & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s + 2 & s \\ s & 2s + 3 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{-sV_1}{s^2 + 7s + 6} \end{aligned}$$

e, se  $H(s)$  é a função de ganho de tensão, então

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{V_2}{V_1} = \frac{3I_2}{V_1} = \frac{-3s}{s^2 + 7s + 6} \\ &= \frac{-3s}{(s + 1)(s + 6)} \end{aligned}$$

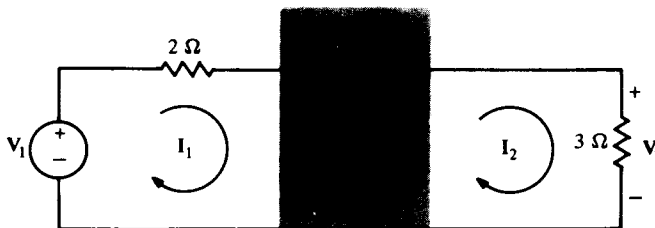


FIGURA 16.8 Circuito com uma excitação complexa

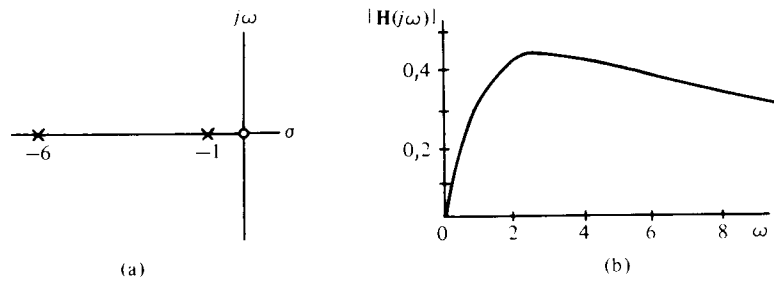


FIGURA 16.9 (a) Diagrama de pólos e zeros e (b)  $|H(j\omega)|$  para a rede da Fig. 16.8

Um diagrama de pólos e zeros e um esboço de  $|H(j\omega)|$  estão indicados na Fig. 16.9. Podemos mostrar que a máxima resposta em regime permanente ca ocorre para  $\omega = \sqrt{6}$  rad/s. Suponha, como um exemplo, que  $v_1 = 100 \cos 10t$  V. Então

$$V_1 = 100 \text{ V}, \quad s = j10 \text{ rad/s}$$

e

$$V_2 = \mathbf{H}V_1 = \frac{(-j30)(100)}{-100 + j70 + 6}$$

que simplifica como

$$V_2 = 25,6/126,7^\circ \text{ V}$$

Desta forma, a resposta em regime permanente ca é

$$v_2(t) = 25,6 \cos(10t + 126,7^\circ) \text{ V}$$

## EXERCÍCIOS

- 16.1.1** No circuito da Fig. 16.3(a),  $L_1 = 4$  H,  $L_2 = 6$  H e  $M = 3$  H. Calcule  $v_1$  e  $v_2$ , no momento em que as taxas de variação das correntes são

$$\frac{di_1}{dt} = -2 \text{ A/s}, \quad \frac{di_2}{dt} = 2 \text{ A/s}$$

Resposta:  $-2; 6$  V

- 16.1.2** No circuito da Fig. 16.3(a),  $L_1 = L_2 = 0,1$  H e  $M = 10$  mH. Calcule  $v_1$  e  $v_2$ , se (a)  $i_1 = 0,4 \sin t$  A e  $i_2 = 0,2 \cos t$  A e (b)  $i_1 = 0$ ,  $i_2 = 10 \cos 100t$  mA.

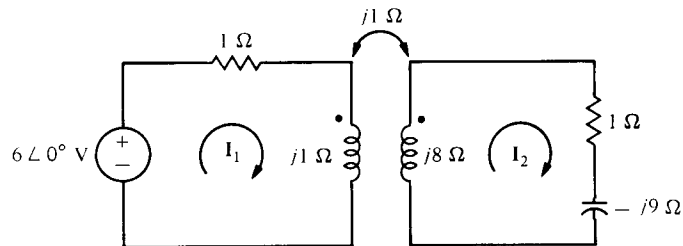
Resposta: (a)  $40 \cos t - 2 \sin t$ ;  $4 \cos t - 20 \sin t$  mV; ;

(b)  $-10 \sin 100t$ ;  $-100 \sin 100t$  mV

- 16.1.3** Verifique que os enrolamentos da Fig. 16.2 são consistentes com as marcas de polaridade da Fig. 16.3.

- 16.1.4** Calcule as correntes fasoriais  $I_1$  e  $I_2$ .

Resposta:  $2 - j2$ ;  $j2$  A



EXERCÍCIO 16.1.4

## Armazenamento de Energia

Mostramos anteriormente que a energia armazenada em um indutor, no tempo  $t$ , é

$$w(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

Evidentemente, para uma dada indutância  $L$ , a energia é completamente especificada em termos de  $i(t)$ . Vamos determinar agora a energia armazenada num par de indutores mutuamente acoplados, como os das Figs. 16.2-16.4. Fazendo isso, vamos mostrar que  $M_{12} = M_{21} = M$  e estabelecer limites para o módulo de  $M$ .

Na Fig. 16.3, a energia armazenada é a soma das energias entregues aos terminais do primário e do secundário. As potências instantâneas entregues a estes terminais, de (16.6), são

$$\begin{aligned} p_1 &= v_1 i_1 = \left( L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \right) i_1 \\ p_2 &= v_2 i_2 = \left( M_{21} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \right) i_2 \end{aligned} \quad (16.7)$$

onde  $M$  foi trocado por  $M_{12}$  e  $M_{21}$ , nos termos apropriados.

Vamos fazer agora uma experiência simples. Vamos supor que iniciamos, no tempo  $t_0$ , com  $i_1(t_0) = i_2(t_0) = 0$ . Visto que o fluxo magnético é zero, nenhuma energia é armazenada no campo magnético; ou seja,  $w(t_0) = 0$ . A seguir, vamos assumir, começando no tempo  $t_0$ , que mantemos  $i_2 = 0$  e aumentamos  $i_1$ , até que, no tempo  $t_1$ ,  $i_1(t_1) = I_1$  e  $i_2(t_1) = 0$ . Durante este intervalo,  $i_2 = 0$  e  $di_2/dt = 0$ . Logo, a energia acumulada durante este tempo é

$$\begin{aligned} w_1 &= \int_{t_0}^{t_1} (p_1 + p_2) dt = \int_{t_0}^{t_1} L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} dt \\ &= \int_0^{I_1} L_1 i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \end{aligned}$$

Como último passo, vamos manter  $i_1 = I_1$  e aumentar  $i_2$ , no tempo  $t_2$ ,  $i_2(t_2) = I_2$ . Durante este intervalo de tempo,  $di_1/dt = 0$ , e a energia acumulada, usando (16.7), é

$$\begin{aligned} w_2 &= \int_{t_1}^{t_2} \left( M_{12} I_1 \frac{di_2}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} \right) dt \\ &= \int_0^{I_2} (M_{12} I_1 + L_2 i_2) di_2 \\ &= M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \end{aligned}$$

Desta forma, a energia armazenada no transformador no tempo  $t_2$  é

$$\begin{aligned} w(t_2) &= w(t_0) + w_1 + w_2 \\ &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \end{aligned}$$

Vamos agora repetir nossa experiência, mas invertendo a ordem na qual aumentamos  $i_1$  e  $i_2$ . Ou seja, no intervalo de tempo  $t_0$  a  $t_1$ , aumentamos  $i_2$  de forma que  $i_2(t_1) = I_2$ , enquanto mantemos  $i_1 = 0$ . Finalmente, mantemos  $i_2 = I_2$ , enquanto aumentamos  $i_1$  de forma que  $i_1(t_2) = I_1$ . Usando os mesmos passos que antes, encontramos, neste caso, que

$$w(t_2) = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{21} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

Visto que  $i_1(t_2) = I_1$  e  $i_2(t_2) = I_2$  nas duas experiências, então  $w(t_2)$  deve ser o mesmo nos dois casos. Comparando nossos resultados, vemos que é necessário que

$$M_{12} = M_{21} = M$$

Se repetirmos nossa experiência com as marcas de polaridade da Fig. 16.4, o sinal da tensão mútua é negativo, o que faz com que o termo mútuo na energia  $MI_1I_2$  seja negativo. Desta forma, uma expressão geral para a energia, num tempo qualquer  $t$ , é dada por

$$w(t) = \frac{1}{2}L_1i_1^2 \pm Mi_1i_2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 \quad (16.8)$$

onde o sinal no termo mútuo é positivo se as duas correntes entram no terminal com ponto (ou sem ponto); caso contrário, é negativo.

O *coeficiente de acoplamento* entre os indutores indica o valor do acoplamento e é definido por

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} \quad (16.9)$$

Evidentemente,  $k = 0$  se não existe acoplamento entre as bobinas, visto que  $M = 0$ . Podemos calcular o limite superior de  $k$ , substituindo de (16.1)-(16.5), que dá

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} = \frac{\sqrt{M_{12}M_{21}}}{\sqrt{L_1L_2}} = \sqrt{\frac{\phi_{12}}{\phi_{11}}} \sqrt{\frac{\phi_{21}}{\phi_{22}}} \leq 1$$

visto que  $\phi_{12}/\phi_{11} \leq 1$  e  $\phi_{21}/\phi_{22} \leq 1$ . Desta forma, devemos ter

$$0 \leq k \leq 1$$

ou, de forma equivalente,

$$0 \leq M \leq \sqrt{L_1L_2}$$

Se  $k = 1$ , todo o fluxo enlaça todas as espiras das duas bobinas, o que é um transformador com *acoplamento unitário*.

O valor de  $k$  (e, portanto de  $M$ ) depende das dimensões e do número de espiras de cada bobina, de suas posições relativas e das propriedades magnéticas do núcleo sobre o qual estão enroladas. Bobinas são ditas como *fracamente acopladas* se  $k < 0,5$  e *fortemente acopladas* se  $k > 0,5$ . A maioria dos transformadores com núcleo de ar são fracamente acoplados, em contraste com os transformadores de núcleo de ferro, para os quais  $k$  pode se aproximar de 1.

Vamos agora examinar os valores de  $i_1$  e  $i_2$  em (16.8) para os quais  $w(t)$  é zero. Da fórmula quadrática, podemos escrever

$$i_1 = \mp \frac{Mi_2}{L_1} \pm \frac{i_2}{L_1} \sqrt{M^2 - L_1L_2}$$

Para valores reais de  $i_1$  e  $i_2$ , vemos que, para  $w(t) = 0$ , devemos ter

$$\begin{aligned} i_1 = i_2 = 0 & \quad M < \sqrt{L_1L_2} \\ i_1 = \pm \frac{M}{L_1} i_2, & \quad M = \sqrt{L_1L_2} \end{aligned} \quad (16.10)$$

onde o sinal do termo mútuo é negativo se as duas correntes entram nos terminais com ponto (ou sem ponto); caso contrário, é positivo. A segunda equação de (16.10) mostra que  $w(t)$  pode ser zero num transformador com acoplamento unitário ( $k = 1$ ), mesmo que  $i_1$  e  $i_2$  não sejam iguais a zero.

## EXERCÍCIOS

- 16.2.1** Calcule o coeficiente de acoplamento, se  $L_1 = 0,02$  H,  $L_2 = 0,125$  H e  $M = 0,04$  H.  
Resposta: 0,8

16.2.2 Calcule  $M$ , se  $L_1 = 0,2 \text{ H}$ ,  $L_2 = 0,8 \text{ H}$  e (a)  $k = 1$ , (b)  $k = 0,5$  e (c)  $k = 0,02$ .

Resposta: (a)  $0,4 \text{ H}$ ; (b)  $0,2 \text{ H}$ ; (c)  $8 \text{ mH}$

16.2.3 Determine a energia armazenada em  $t = 0$ , para todos os casos do Ex. 16.1.2.

Resposta: (a)  $2 \text{ mJ}$ ; (b)  $5 \mu\text{J}$

## 16.3

### Circuitos com Transformadores Lineares

Um transformador de dois enrolamentos é, em geral, um quadripolo no qual o potencial de referência do primário pode ser diferente do secundário, sem alterar os valores de  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $i_1$  ou  $i_2$ .

#### EXEMPLO 16.4

Considere, por exemplo, o circuito da Fig. 16.10. Aplicando a LKT ao redor dos circuitos do primário e do secundário, obtemos

$$v_1(t) = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$0 = -M \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Evidentemente, as tensões e correntes não são afetadas por  $V_0$ . Por esta razão, o secundário do transformador é considerado como tendo *isolamento cc*, em relação ao primário. O ponto *a*, certamente, está num potencial absoluto de  $V_0 + i_2 R_2$  volts, com relação ao terra de referência. Se, agora, fazemos  $V_0 = 0$ , vê-se que os terminais inferiores do transformador estão conectados e os circuitos do primário e do secundário têm um ponto de referência em comum. O transformador, neste caso, é um dispositivo de três terminais.

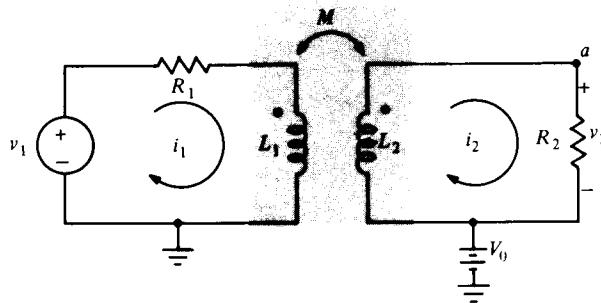


FIGURA 16.10 Circuito indicando potenciais de referência diferentes no primário e no secundário

#### EXEMPLO 16.5

Como um segundo exemplo, vamos calcular a resposta completa  $i_2$ , para  $t > 0$ , na Fig. 16.11, dados  $M = 1/\sqrt{2} \text{ H}$  e  $i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0$ . Visto que a resposta forçada para  $i_1$  é uma corrente cc (por inspeção), nenhuma tensão em regime permanente é produzida no secundário; desta forma,  $i_{2f} = 0$ . Para calcular a resposta natural, vamos primeiramente obter a função de rede para  $t > 0$ . Aplicando a LKT para a excitação completa  $V_1(s)$  temos

$$V_1(s) = \left(\frac{3}{2}s + 2\right) \mathbf{I}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} s \mathbf{I}_2$$

$$0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} s \mathbf{I}_1 + (s + 2) \mathbf{I}_2$$

da qual encontramos

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{I}_2}{V_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{s}{(s + 1)(s + 4)}$$

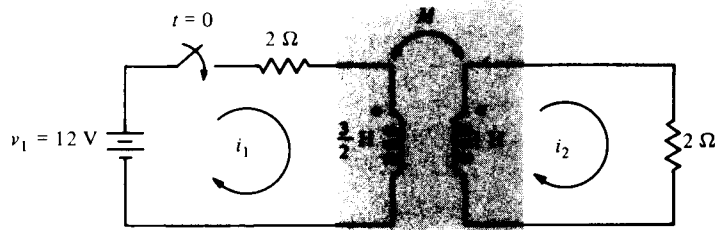


FIGURA 16.11 Circuito com chave, contendo um transformador

Os pólos de  $\mathbf{H}(s)$  são as frequências naturais,  $-1$ ;  $-4$ , da resposta natural. Então, para  $t > 0$ ,

$$i_2 = i_{2f} + i_{2n} = 0 + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t}$$

De (16.8),  $w(0^-) = 0$ ; portanto, visto que a energia não pode variar instantaneamente na ausência de uma função de excitação infinita,  $w(0^+) = 0$ . De (16.10), observando que  $M < \sqrt{L_1 L_2}$ , vemos que  $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$ . Para obter a segunda condição inicial para calcular  $A_1$  e  $A_2$ , aplicamos a LKT ao redor do primário e do secundário, em  $t = 0^+$ , o que fornece

$$12 = \frac{3}{2} \frac{di_1(0^+)}{dt} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{di_2(0^+)}{dt}$$

$$0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{di_1(0^+)}{dt} + \frac{di_2(0^+)}{dt}$$

Resolvendo, encontramos  $di_2(0^+)/dt = 6\sqrt{2}$  A/s. Avaliando  $A_1$  e  $A_2$ , usando  $i_2(0^+)$  e  $di_2(0^+)/dt$ , a solução torna-se

$$i_2 = 2\sqrt{2}(e^{-t} - e^{-4t}) \text{ A}$$

### EXEMPLO 16.6

Suponha que repetimos agora esse exemplo para  $M = \sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{3/2}$ . Neste caso, a função de rede para  $t > 0$  é

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\sqrt{3/2}s}{5s + 4}$$

e a resposta completa é

$$i_2 = A e^{-0,8t}$$

Sabemos que  $i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0$ ; contudo, se tomamos  $i_2(0^+) = i_2(0^-)$ , como antes, então resulta a solução não-razoável  $i_2 = 0$ . Também, aplicando a LKT, fornece

$$12 = 2i_1 + \frac{3}{2} \frac{di_1}{dt} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{di_2}{dt}$$

$$0 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{di_1}{dt} + 2i_2 + \frac{di_2}{dt}$$

Multiplicando a última equação por  $\sqrt{3/2}$  e adicionando-a à anterior, temos

$$12 = 2i_1 + \sqrt{6}i_2 \quad (16.11)$$

Este resultado contradiz  $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$ .

Retornando a (16.10), vemos que a energia é zero no caso com acoplamento unitário quando

$$i_1(0^+) = \frac{M}{L_1} i_2(0^+) = \sqrt{\frac{2}{3}} i_2(0^+)$$

Com este resultado e (16.11), obtemos  $i_2(0^+) = 2,94$  A e, portanto,

$$i_2 = 2,94 e^{-0,8t} \text{ A}$$



Desta forma, a corrente num transformador com acoplamento unitário pode variar instantaneamente como resultado da aplicação de uma função de excitação finita.

### EXEMPLO 16.7

Como outro exemplo, vamos calcular a resposta em regime permanente  $v_2$  na Fig. 16.12. Aplicando a LKT para uma frequência completa  $s$ , temos

$$\begin{aligned} V_1 &= \left(s + 3 + \frac{1}{s}\right)I_1 - \left(s + \frac{1}{s}\right)I_2 \\ 0 &= -\left(s + \frac{1}{s}\right)I_1 + \left(2s + 1 + \frac{1}{s}\right)I_2 \end{aligned}$$

para a qual

$$H(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{I_2}{V_1} = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 7s^2 + 4s + 4}$$

Substituindo  $s = j2$  rad/s e  $V_1 = 16$  V, encontramos  $V_2 = 2\angle 0^\circ$  V. Desta forma,

$$v_2 = 2 \cos 2t \text{ V}$$

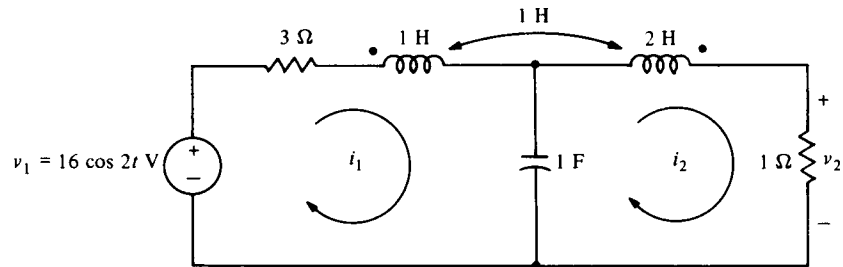


FIGURA 16.12 Circuito contendo um transformador linear

### EXEMPLO 16.8

Como um exemplo final, vamos calcular a função de rede  $V_2/V_1$  para o circuito fasorial da Fig. 16.13. Vamos primeiramente examinar a tensão  $V_A$  que aparece através do enrolamento A no laço 1. Vemos que a tensão devida a  $I_1$  é o termo de indutância própria ( $2sI_1$ ) e o termo mútuo do enrolamento C ( $2sI_1$ ). A tensão devida a  $I_2$  vem dos termos mútuos do enrolamento B ( $-sI_2$ ) e enrolamento C ( $-2sI_2$ ). Desta forma

$$V_A = (2s + 2s)I_1 - (s + 2s)I_2$$

De modo similar, encontramos

$$V_B = -(s + 3s)I_1 + (3s + 3s)I_2$$

$$V_C = (4s + 2s)I_1 - (4s + 3s)I_2$$

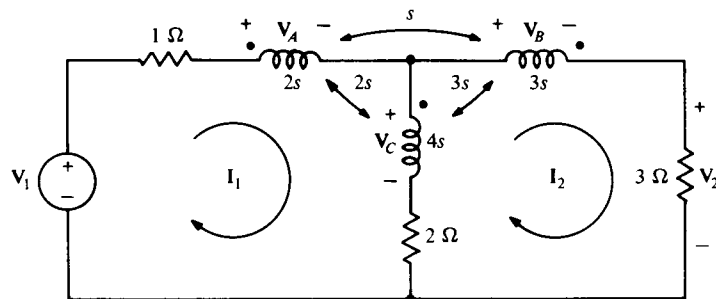


FIGURA 16.13 Circuito com um transformador de três enrolamentos

Aplicando a LKT aos laços 1 e 2, fornece

$$\begin{aligned} V_1 &= 3I_1 + V_A + V_C - 2I_2 \\ 0 &= -2I_1 - V_C + V_B + 5I_2 \end{aligned}$$

ou

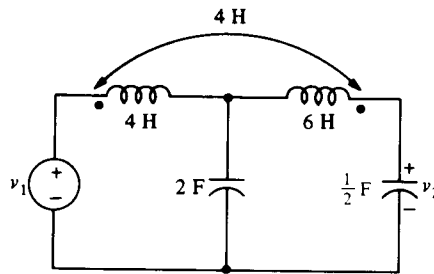
$$\begin{aligned} V_1 &= (10s + 3)I_1 - (10s + 2)I_2 \\ 0 &= -(10s + 2)I_1 + (13s + 5)I_2 \end{aligned}$$

Resolvendo estas equações para a relação  $I_2/V_1$ , encontramos a função de rede como

$$H(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{3I_2}{V_1} = \frac{3(10s + 2)}{30s^2 + 49s + 11}$$

## EXERCÍCIOS

- 16.3.1** Determine  $i_1$ , para  $t > 0$ , na rede da Fig. 16.11, dado  $M = 1/\sqrt{2}$  H. Assuma que o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .  
*Resposta:*  $6 - 4e^{-t} - 2e^{-4t}$  A
- 16.3.2** Calcule a resposta forçada  $v_2$ , se  $v_1 = 8e^{-2t} \cos t$  V.  
*Resposta:*  $\sqrt{2}e^{-2t} \cos(t + 45^\circ)$  V



EXERCÍCIO 16.3.2

- 16.3.3** Determine a função de rede  $V_2/V_1$  para a Fig. 16.13, se o ponto de polaridade da bobina  $B$  for colocado no outro terminal.  
*Resposta:*  $6(s + 1)/(6s^2 + 45s + 11)$

## 16.4

### Impedância Refletida

Nessa seção, vamos estudar várias relações importantes das impedâncias, para o caso em regime permanente ca. Vamos começar estudando o circuito fasorial da Fig. 16.14, tendo uma fonte real  $V_g$  com uma impedância  $Z_2$  conectada no secundário.

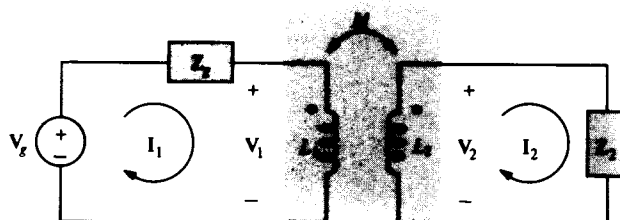


FIGURA 16.14 Circuito para o estudo de relações das impedâncias

Aplicando a LKT aos terminais do primário do transformador, encontramos

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= j\omega L_1 \mathbf{I}_1 - j\omega M \mathbf{I}_2 \\ 0 &= -j\omega M \mathbf{I}_1 + (\mathbf{Z}_2 + j\omega L_2) \mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (16.12)$$

eliminando  $\mathbf{I}_2$  destas equações, temos

$$\mathbf{V}_1 = \left[ j\omega L_1 - \frac{j\omega M (j\omega M)}{\mathbf{Z}_2 + j\omega L_2} \right] \mathbf{I}_1$$

de forma que a impedância de entrada vista nos terminais do primário do transformador é

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\mathbf{Z}_2 + j\omega L_2} \quad (16.13)$$

A primeira parte,  $j\omega L_1$ , depende totalmente da reatância do primário. A segunda parte é devida ao acoplamento mútuo e é chamada de *impedância refletida*, dada por

$$\mathbf{Z}_R = \frac{\omega^2 M^2}{\mathbf{Z}_2 + j\omega L_2}$$

Pode ser considerada como a impedância inserida, ou *refletida*, no primário pelo secundário. A impedância de entrada, vista pela fonte  $\mathbf{V}_g$ , é, evidentemente,

$$\mathbf{Z}_{in} = \mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_1$$

Também, a relação de corrente do secundário para o primário,  $\mathbf{I}_2/\mathbf{I}_1$ , pode ser calculada da segunda equação de (16.12) e a relação entre as tensões,  $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$ , pode ser calculada de

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{\mathbf{Z}_2 \mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1} = \mathbf{Z}_2 \left( \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} \right) \left( \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1} \right)$$

usando (16.13). Os resultados são

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} &= \frac{j\omega M}{\mathbf{Z}_2 + j\omega L_2} \\ \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} &= \frac{j\omega M \mathbf{Z}_2}{j\omega L_1 (\mathbf{Z}_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2} \end{aligned} \quad (16.14)$$

É interessante notar que  $\mathbf{Z}_R$  é independente da localização dos pontos de polaridade do transformador. Se algum dos pontos na Fig. 16.14 for trocado para o terminal oposto, o sinal do termo mútuo em cada equação de (16.14) muda, o que é equivalente a substituir  $M$  por  $-M$ . Visto que  $\mathbf{Z}_R$  varia com  $M^2$ , seu sinal não se altera. Uma segunda propriedade importante é ilustrada racionalizando  $\mathbf{Z}_R$ , que fornece

$$\mathbf{Z}_R = \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + (X_2 + \omega L_2)^2} [R_2 - j(X_2 + \omega L_2)]$$

onde usamos a relação  $\mathbf{Z}_2 = R_2 + jX_2$  para a impedância da carga. Foi visto que o sinal da parte imaginária de  $\mathbf{Z}_R$  é negativo. Portanto, a reatância refletida se opõe à reatância do secundário,  $X_2 + \omega L_2$ . Em particular, se  $X_2$  é uma reatância capacitiva cujo módulo é menor que  $\omega L_2$  ou se é uma reatância indutiva, então a reatância refletida é capacitiva. Caso contrário, a reatância refletida é ou indutiva ou nula. No último caso,  $X_2$  deve ser uma reatância capacitiva  $-1/\omega C$  com uma frequência de ressonância  $f_0 = \omega_0/2\pi = 1/2\pi\sqrt{L_2 C}$ . Neste caso, para  $\omega = \omega_0$ ,

$$\mathbf{Z}_R = \frac{\omega_0^2 M^2}{R_2}$$

e a impedância refletida é puramente real.

Inspecionando (16.13) e (16.14), vemos que se o ponto de polaridade em um dos enrolamentos da Fig. 16.14 ocorre no terminal oposto, então as relações de corrente e tensão necessitam de uma mudança de sinal, ao passo que as relações de impedância não se alteram.

## EXERCÍCIOS

- 16.4.1** Dado: Na Fig. 16.14,  $V_g = 100\angle 0^\circ$  V,  $Z_g = 40 \Omega$ ,  $L_1 = 0,5$  H,  $L_2 = 0,1$  H,  $M = 0,1$  H e  $\omega = 100$  rad/s. Se  $Z_2 = 10 - (j1.000/\omega) \Omega$ , calcule (a)  $Z_{in}$ , (b)  $I_1$ , (c)  $I_2$ , (d)  $V_1$  e (e)  $V_2$ .  
Resposta: (a)  $50 + j50 \Omega$ ; (b)  $1 - j1$  A; (c)  $1 + j1$  A; (d)  $60 + j40$  V; (e)  $20$  V
- 16.4.2** Repita o Ex. 16.4.1, se o ponto de polaridade estiver no terminal inferior do secundário.  
Resposta: (a)  $50 + j50 \Omega$ ; (b)  $1 - j1$  A; (c)  $-1 - j1$  A; (d)  $60 + j40$  V; (e)  $-20$  V
- 16.4.3** Calcule a frequência para a qual a impedância refletida na Fig. 16.14 é real, se  $L_2 = 2$  H e  $Z_2$  é um resistor de  $6\text{-}\Omega$  em série com um capacitor de  $1/32\text{-F}$ .  
Resposta:  $4$  rad/s

## 16.5

### O Transformador Ideal

Um *transformador ideal* é um transformador sem perdas e com acoplamento unitário, no qual as indutâncias próprias do primário e do secundário são infinitas mas sua relação é finita. Transformadores físicos que se aproximam deste caso ideal são os já mencionados transformadores com núcleo de ferro. As bobinas do primário e do secundário são enroladas na estrutura laminada do núcleo de ferro, de forma que aproximadamente todo o fluxo enlaça todas as espiras das duas bobinas. As reatâncias das impedâncias próprias do primário e do secundário são muito grandes, em comparação com impedâncias da carga moderadas, e o coeficiente de acoplamento é aproximadamente unitário, para a faixa de frequências para a qual o dispositivo é projetado. O transformador ideal é, desta forma, um modelo aproximado para transformadores com núcleo de ferro bem construídos.

Um parâmetro importante que é necessário para se descrever as características de um transformador ideal é a *relação de número de espiras  $n$* , definida como

$$n = \frac{N_2}{N_1} \quad (16.15)$$

onde  $N_1$  e  $N_2$  são o número de espiras no primário e no secundário, respectivamente.

O fluxo produzido num enrolamento de um transformador devido a uma corrente no enrolamento é proporcional ao produto da corrente pelo número de espiras no enrolamento. Desta forma, nos enrolamentos primários e secundários,

$$\phi_{11} = \alpha N_1 i_1$$

$$\phi_{22} = \alpha N_2 i_2$$

onde  $\alpha$  é uma constante de proporcionalidade que depende das propriedades físicas do transformador. (A constante  $\alpha$  é a mesma em cada caso, porque estamos assumindo que não há fluxo de dispersão e, desta forma, os dois percursos do fluxo são idênticos.) Substituindo estas relações em (16.2) e (16.5), vemos que

$$L_1 = \alpha N_1^2, \quad L_2 = \alpha N_2^2$$

Portanto,

$$\frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 = n^2 \quad (16.16)$$

No caso de acoplamento unitário,  $M = \sqrt{L_1 L_2}$ , e a segunda expressão de (16.14) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} &= \frac{j\omega Z_2 \sqrt{L_1 L_2}}{j\omega L_1 (Z_2 + j\omega L_2) + \omega^2 L_1 L_2} \\ &= \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \\ &= n \end{aligned}$$

Para o transformador ideal, além de acoplamento unitário, as indutâncias  $L_1$  e  $L_2$  tendem a infinito, de tal forma que a relação de (16.16) é a constante  $n^2$ . Da primeira equação de (16.14), vemos que, neste caso, temos

$$\begin{aligned} \frac{I_2}{I_1} &= \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \frac{j\omega \sqrt{L_1 L_2}}{Z_2 + j\omega L_2} \\ &= \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \frac{j\omega \sqrt{L_1/L_2}}{j\omega + (Z_2/L_2)} \\ &= \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \frac{j\omega(1/n)}{j\omega + (Z_2/L_2)} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Desta forma, as tensões e correntes no primário e no secundário de um transformador ideal se relacionam com a relação de número de espiras simplesmente por

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} &= n \\ \frac{I_2}{I_1} &= \frac{1}{n} \end{aligned} \quad (16.17)$$

Substituindo  $n$  por  $N_2/N_1$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} &= \frac{N_2}{N_1} \\ N_1 I_1 &= N_2 I_2 \end{aligned}$$

Portanto, as tensões estão na mesma relação que as espiras, e os *ampère-espiras* ( $NI$ ) são iguais, tanto no primário como no secundário.

O símbolo para um transformador ideal está indicado na Fig. 16.15(a), com polaridades de forma a satisfazer (16.17). As linhas verticais são usadas para representar o núcleo de ferro, e  $1:n$  é a relação de número de espiras. Se um ou outro, mas não ambos, dos pontos de polaridade for colocado no outro terminal, então  $n$  será trocado por  $-n$  em (16.17).

A Fig. 16.15(b) mostra um transformador ideal conectado a uma carga no secundário  $Z_2$  e a uma fonte  $V_g$ , com impedância interna  $Z_g$ . A impedância no primário,  $Z_1$ , de (16.13), no caso de um transformador

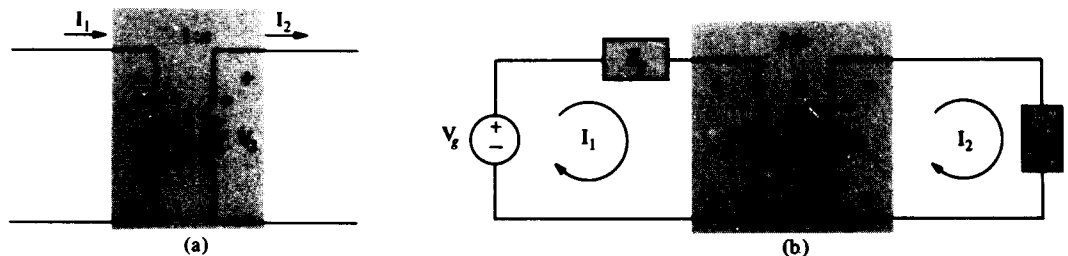


FIGURA 16.15 (a) Símbolo de transformador ideal; (b) circuito contendo um transformador ideal

ideal, é dada por

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{\mathbf{V}_2/n}{n\mathbf{I}_2} = \frac{\mathbf{V}_2/\mathbf{I}_2}{n^2}$$

ou

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_2}{n^2}, \quad \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1} = n^2 \quad (16.18)$$

Desta forma, a impedância de entrada vista dos terminais da fonte de tensão é

$$\mathbf{Z}_{in} = \mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_g + \frac{\mathbf{Z}_2}{n^2} \quad (16.19)$$

A propriedade de não ter perdas de um transformador ideal é facilmente demonstrada usando (16.17). Tomando o conjugado complexo da relação de corrente, temos, visto que  $n$  é real,

$$\mathbf{I}_1^* = n\mathbf{I}_2^*$$

da qual

$$\mathbf{I}_1^* = \frac{\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2^*}{\mathbf{V}_1}$$

ou

$$\frac{\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^*}{2} = \frac{\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2^*}{2}$$

Desta forma, a potência complexa aplicada ao primário é entregue à carga  $\mathbf{Z}_2$  e, portanto, o transformador não absorve nenhuma potência.

Ao se analisar redes contendo transformadores ideais, é freqüentemente conveniente trocar o transformador por um circuito equivalente, antes de se proceder à análise. Vamos considerar, por exemplo, substituir o transformador e a impedância de carga  $\mathbf{Z}_2$  da Fig. 16.15(b). Evidentemente, a impedância de entrada vista pelo gerador  $\mathbf{V}_g$  é  $\mathbf{Z}_{in}$ , dada por (16.19), de forma que um circuito equivalente no que diz respeito a  $\mathbf{V}_g$ , é mostrado na Fig. 16.16. As tensões e correntes podem agora ser facilmente calculadas do circuito com apenas um laço.

Vamos, a seguir, substituir o circuito do primário e o transformador da Fig. 16.15(b) por seu equivalente Thévenin. Por (16.17), temos

$$\mathbf{I}_1 = n\mathbf{I}_2, \quad \mathbf{V}_2 = n\mathbf{V}_1$$

de forma que, para  $\mathbf{V}_{oc}$ ,  $\mathbf{I}_2 = 0$ , e, desta forma,  $\mathbf{I}_1 = 0$ . Portanto,

$$\mathbf{V}_{oc} = \mathbf{V}_2 = n\mathbf{V}_1 = n\mathbf{V}_g$$

Para  $\mathbf{I}_{sc}$ , temos  $\mathbf{V}_2 = 0$  e, desta forma,  $\mathbf{V}_1 = 0$ . Portanto,

$$\mathbf{I}_{sc} = \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{I}_1}{n} = \frac{\mathbf{V}_g}{n\mathbf{Z}_g}$$

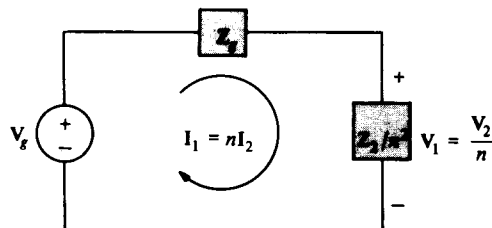


FIGURA 16.16 Circuito equivalente para a Fig. 16.15(b), obtido por substituição do secundário

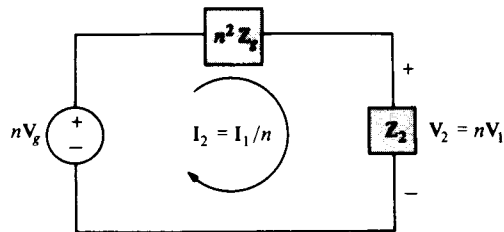


FIGURA 16.17 Circuito equivalente de Thévenin da Fig. 16.15(b)

e

$$Z_{th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = n^2 Z_g$$

O circuito equivalente resultante está indicado na Fig. 16.17.

Verificando os resultados para o circuito equivalente de Thévenin, vemos que cada tensão do primário está multiplicada por  $n$ , cada corrente do primário está multiplicada por  $1/n$  e cada impedância do primário está multiplicada por  $n^2$ , quando substituímos o circuito do primário e o transformador. Pode ser demonstrado que esta declaração é válida no caso geral, independentemente do resultado ser o circuito de Thévenin ou não. Por outro lado, se substituirmos o circuito do secundário e o transformador por um circuito equivalente, como na Fig. 16.16, simplesmente multiplicamos cada tensão, corrente e impedância do secundário por  $1/n$ ,  $n$  e  $1/n^2$ , respectivamente. Se algum dos pontos no transformador for trocado, trocamos simplesmente  $n$  por  $-n$ .

Ao aplicar a técnica acima descrita, o estudante deve ficar alerta, pois a técnica é válida somente se o transformador divide o circuito em duas partes. Quando existem conexões externas entre os dois enrolamentos, o método geralmente não pode ser aplicado. Os circuitos equivalentes a serem estudados na próxima seção são freqüentemente usados para circuitos deste tipo.

### EXEMPLO 16.9

Como exemplo, vamos calcular  $V_2$  no circuito da Fig. 16.18(a), que contém um transformador ideal e uma fonte de corrente controlada por tensão. Na Fig. 16.18(b) está indicado um circuito equivalente para o primário e o transformador. Deve ser notado que um sinal de menos foi usado nas tensões e correntes do primário para levar em consideração os pontos de polaridade indicados no transformador.

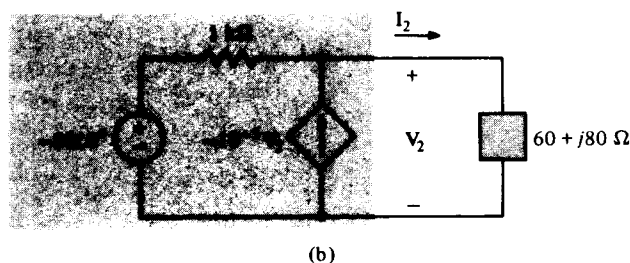
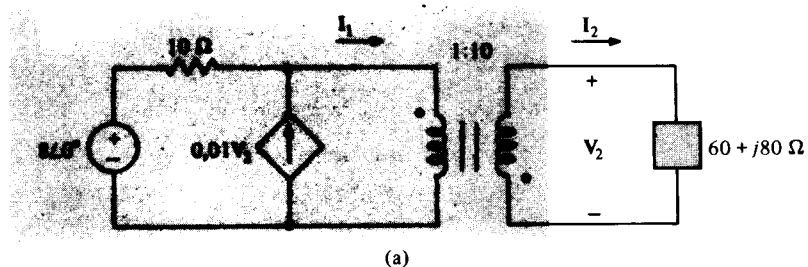


FIGURA 16.18 (a) Circuito do exemplo; (b) circuito equivalente

A equação de nós para  $V_2$  dá

$$\frac{V_2 + 80/0^\circ}{10^3} + 10^{-3}V_2 + \frac{V_2}{60 + j80} = 0$$

do qual

$$V_2 = 5\sqrt{2}/-135^\circ \text{ V}$$

Até este ponto, temos estudado apenas o transformador ideal no caso de regime permanente ca. No caso geral, vemos de (16.6) que

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \left( \frac{v_2}{L_2} - \frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt} \right) \\ &= \left( L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2} v_2 \end{aligned}$$

Desta forma, visto que  $M^2 = L_1 L_2$  e  $\sqrt{L_2/L_1} = n$ , temos

$$v_1 = \frac{v_2}{n}$$

A seguir, vamos rearranjar a primeira equação de (16.6) na forma

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{L_1} &= \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} \\ &= \frac{di_1}{dt} + n \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

Tomando o limite quando  $L_1$  tende a infinito, temos

$$\frac{di_1}{dt} = -n \frac{di_2}{dt}$$

Integrando os dois lados, temos

$$i_1 = -ni_2 + C_1$$

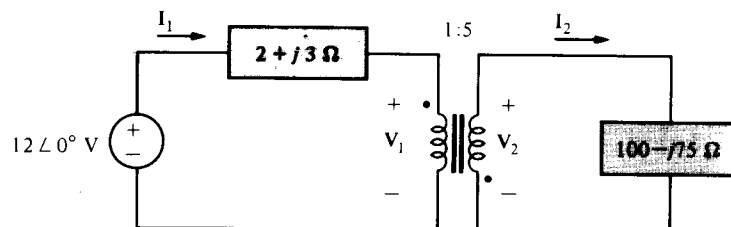
onde  $C_1$  é uma constante de integração. Visto que correntes cc não produzem fluxo magnético variável no tempo, elas não contribuem para as tensões e correntes induzidas no transformador ideal. Portanto, se desprezamos a constante  $C_1$ , então

$$i_1 = -ni_2$$

onde o sinal negativo aparece devido ao sentido atribuído a  $i_2$  na Fig. 16.3(a). Desta forma, as mesmas relações entre correntes e tensões são válidas no domínio do tempo, como foi calculado no domínio da frequência, se desprezarmos qualquer corrente cc.

## EXERCÍCIOS

- 16.5.1** Calcule  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $I_1$  e  $I_2$ .  
 Resposta:  $10/-36,9^\circ$  V,  $50/143,1^\circ$  V,  $2/0^\circ$  A,  $0,4/180^\circ$  A



EXERCÍCIO 16.5.1



- 16.5.2.** Na Fig. 16.15(b),  $V_g = 100\angle 0^\circ$  V,  $Z_g = 20 \Omega$  e  $Z_2 = 2 \text{ k}\Omega$ . Calcule  $n$  de forma que  $Z_1 = Z_g$ , e, então, calcule a potência entregue a  $Z_2$ .  
Resposta: 10; 125 W
- 16.5.3** Usando o teorema de Norton, mostre que o circuito do primário e o transformador da Fig. 16.15(b) é equivalente a uma fonte de corrente constante de  $V_g/nZ_g$  A em paralelo com uma impedância de  $n^2Z_g \Omega$ .
- 16.5.4** Calcule  $V_2$  na Fig. 16.18(a), trocando primeiramente o circuito do secundário e o transformador por um circuito equivalente.

## 16.6

### Circuitos Equivalentes

Circuitos equivalentes para transformadores lineares são facilmente desenvolvidos considerando-se as equações para as correntes e tensões do primário e do secundário. Na Fig. 16.19(a), temos

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

É evidente que o circuito da Fig. 16.19(b) satisfaz essas equações. As fontes dependentes de tensão, contudo, são controladas pelas derivadas em relação ao tempo das correntes do primário e do secundário. No domínio da frequência, estas fontes podem ser consideradas como fontes de tensão controladas por corrente.

Vamos rearranjar as equações na forma

$$v_1 = (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \left( \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right)$$

$$v_2 = M \left( \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right) + (L_2 - M) \frac{di_2}{dt}$$

Estas equações são satisfeitas pela rede T da Fig. 16.20(b). Visto que esse circuito é uma rede de três terminais, é equivalente à conexão do transformador da Fig. 16.20(a). Se um dos pontos de polaridade

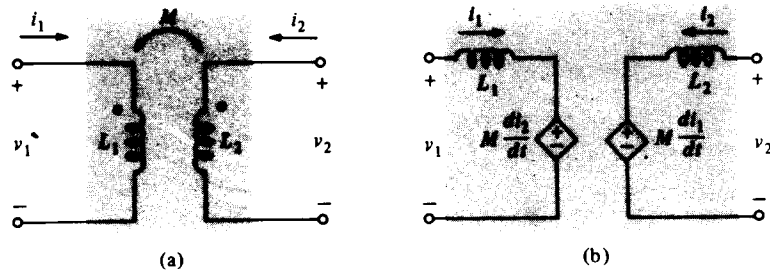


FIGURA 16.19 (a) Transformador linear; (b) circuito equivalente

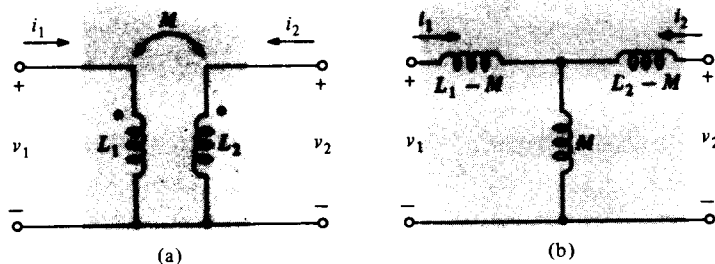


FIGURA 16.20 (a) Transformador linear com terminais em comum; (b) rede T equivalente

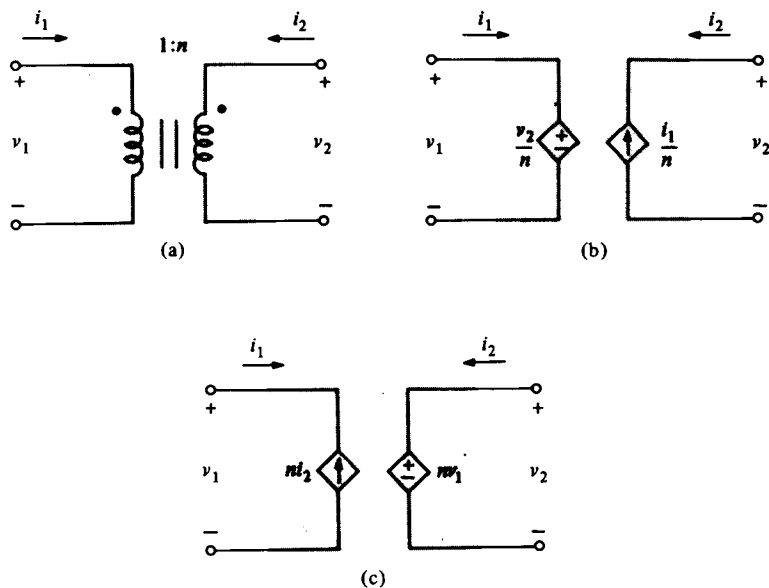


FIGURA 16.21 (a) Transformador ideal; (b) e (c) circuitos equivalentes

é alterado para o outro terminal, devemos trocar  $M$  por  $-M$  nos circuitos equivalentes.

No caso de um transformador ideal, como indicado na Fig. 16.21(a), as correntes e tensões são dadas por

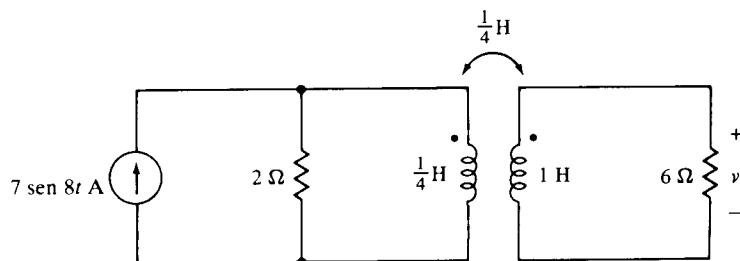
$$i_2 = \frac{-i_1}{n}, \quad v_2 = nv_1$$

Evidentemente, os circuitos das Figs. 16.21(b) e (c) satisfazem estas relações. Se um dos pontos de polaridade for trocado, certamente, devemos trocar  $n$  por  $-n$  nos circuitos equivalentes.

## EXERCÍCIOS

- 16.6.1 Use o equivalente T para o transformador linear para calcular o valor de  $v$  em regime permanente. (Note que um indutor com  $L = 0$  é um curto-circuito.)

Resposta:  $6 \sin 8t$  V



EXERCÍCIO 16.6.1

- 16.6.2 Calcule  $V_2$  na Fig. 16.18(a), usando o circuito equivalente da Fig. 16.21(c).

Resposta:  $5\sqrt{2} \angle -135^\circ$  V

## 16.7

### Análise de Transformadores com SPICE

SPICE pode ser usado para analisar circuitos que contenham transformadores lineares da mesma forma que foi feito nos capítulos anteriores, empregando-se a declaração de dados K para definir o transformador.

Uma descrição da declaração K é dada no Apêndice E. A declaração K expressa o acoplamento mútuo do transformador em termos do coeficiente de acoplamento dado em (16.9).

### EXEMPLO 16.10

Considere, como primeiro exemplo, o circuito da Fig. 16.11, redesenhado na Fig. 16.22, para aplicação do SPICE. Deve ser notado que o primário e o secundário foram conectados juntos no nó de referência para evitar que se tenha os nós dos elementos do secundário flutuando (estando desconectados) para análise com SPICE. Um arquivo de circuito para a resposta transitória, para  $0 < t < 1.5$  s é

```
SOLUÇÃO DA FIG. 16.11 USANDO EQ. 16.9, PARA CALCULAR k
* DECLARAÇÕES DE DADOS
VIN 1 0 DC 12V
R1 1 2 2
L1 2 0 1.5 IC=0
L2 3 0 1 IC=0
R2 3 0 2
K L1 L2 0.577
* DECLARAÇÕES DE CONTROLE DA SOLUÇÃO
.TRAN 0.1 1.5 UIC
* DECLARAÇÕES DE CONTROLE DA SAÍDA
.PLOT TRAN I(R2)
.END
```

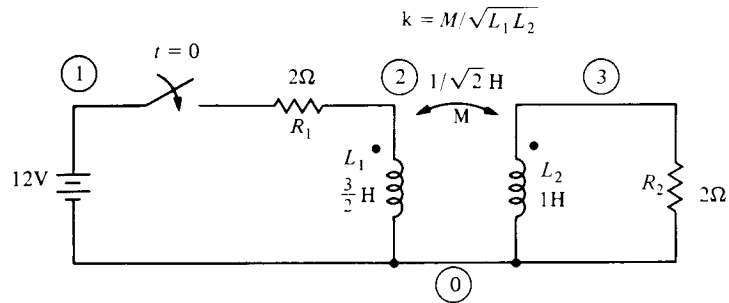


FIGURA 16.22 Circuito da Fig. 16.11, redesenhado para SPICE

Uma plotagem da saída do programa é mostrada na Fig. 16.23.

TIME	I(R2)
0.000E+00	3.174E-07
1.000E-01	6.602E-01
2.000E-01	1.044E+00
3.000E-01	1.242E+00
4.000E-01	1.324E+00
5.000E-01	1.333E+00
6.000E-01	1.295E+00
7.000E-01	1.232E+00
8.000E-01	1.155E+00
9.000E-01	1.072E+00
1.000E+00	9.885E-01
1.100E+00	9.065E-01
1.200E+00	8.284E-01
1.300E+00	7.550E-01
1.400E+00	6.867E-01
1.500E+00	6.238E-01

FIGURA 16.23 Resposta para o circuito da Fig. 16.22

### EXEMPLO 16.11

Como um segundo exemplo, vamos calcular a solução para a rede da Fig. 16.12, que tem um coeficiente de acoplamento de 0,707. Um arquivo de circuito, com os nós numerados sequencialmente no sentido dos ponteiros do relógio, com o nó 1 no topo de  $v_1$ , é

```
SOLUÇÃO DA FIG. 16.12
* DECLARAÇÕES DE DADOS
V1 1 0 AC 16V
R1 1 2 3
L1 2 3 1H
C 3 0 1
L2 4 3 2H
```

R2 4 0 1  
K L1 L2 0.707

\* DECLARAÇÕES DE CONTROLE DA SOLUÇÃO E DA SAÍDA  
.AC LIN 1 0.3183 0.3183  
.PRINT AC VM(R2) VP(R2)  
.END

que dá a solução

FREQ  
3.183E-01

VM(R2)  
2.000E+00

VP(R2)  
-3.139E-03

No caso de um transformador ideal, podem ser encontradas soluções usando os circuitos equivalentes da Fig. 16.21(b) e (c), empregando os procedimentos estudados nos capítulos anteriores.

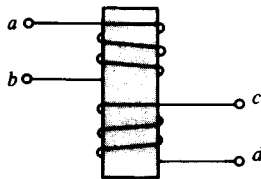
## EXERCÍCIO

- 16.7.1.** Usando o SPICE, calcule  $V_2$  na Fig. 16.13, se  $V_1 = 120\angle 0^\circ$  V,  $f = 60$  Hz e o resistor de 3-ohm for substituído por um de 300 ohms.

Resposta:  $30,75 \angle -75,1^\circ$  V.

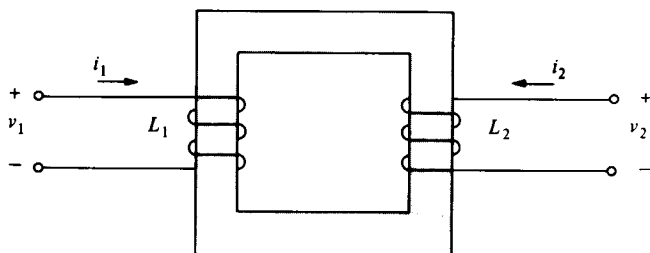
## PROBLEMAS

- 16.1** Na Fig. 16.2(a),  $N_2 = 500$  espiras e  $\phi_{21} = 200 \mu\text{Wb}$ , quando  $i_1 = 2$  A. Determine  $v_2$  se  $i_1 = 10 \cos 100t$  A.  
**16.2** Se a indutância medida entre os terminais  $a$  e  $d$  é  $0,1$  H, quando os terminais  $b$  e  $c$  são conectados, e a indutância medida entre os terminais  $a$  e  $c$  é  $0,9$  H, quando os terminais  $b$  e  $d$  são conectados, calcule a indutância mútua  $M$  entre as duas bobinas e a posição dos pontos de polaridade.



PROBLEMA 16.2

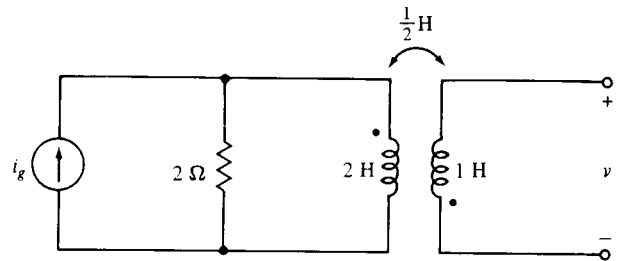
- 16.3** Se  $L_1 = 4$  H,  $L_2 = 3$  H,  $M = 2$  H e as correntes  $i_1$  e  $i_2$  estão variando com uma taxa de variação de  $-2$  A/s e  $10$  A/s, respectivamente, calcule  $v_1$  e  $v_2$  em (a) Fig. 16.3(a) e (b) Fig. 16.3(b).  
**16.4** (a) Calcule  $v_1$  e  $v_2$ , se  $L_1 = 2$  H,  $L_2 = 5$  H,  $M = 3$  H,  $i_1 = 5 \sin 2t$  A e  $i_2 = -3 \cos 4t$  A. (b) Calcule  $v_2$ , se o secundário está em vazio.



PROBLEMA 16.4

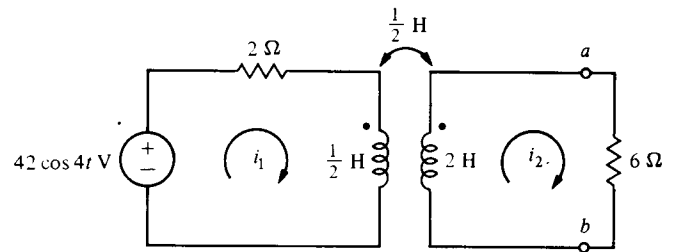
- 16.5** Calcule  $v_1$  e  $v_2$  nas Figs. 16.5(a) e (b), se  $L_1 = 2$  H,  $L_2 = 5$  H,  $M = 3$  H e as correntes  $i_1$  e  $i_2$  estão variando com taxas de  $10$  A/s e  $-2$  A/s, respectivamente.

- 16.6** Calcule  $v$ , para  $t > 0$ , no secundário em vazio, se  $i_g = 8 u(t)$  A.



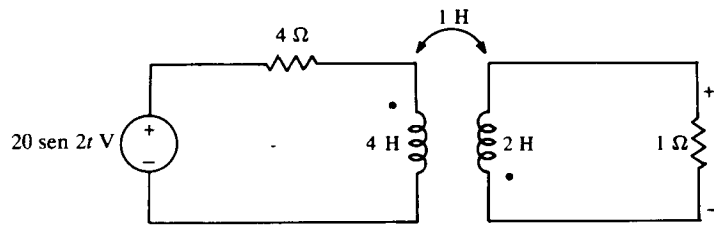
PROBLEMA 16.6

- 16.7** Repita o Prob. 16.6, se  $i_g = 8e^{-2t} u(t)$  A.  
**16.8** Calcule as correntes  $i_1$  e  $i_2$  em regime permanente.

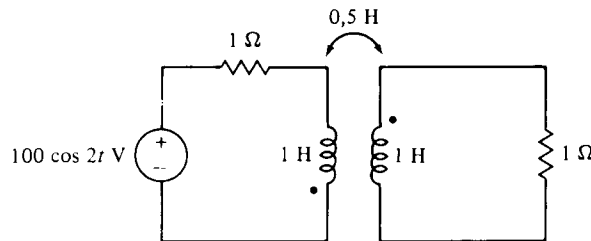


PROBLEMA 16.8

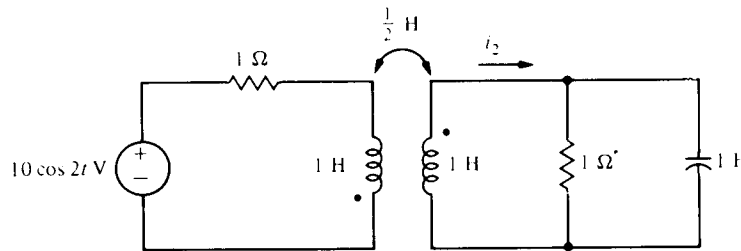
- 16.9** Calcule o valor de  $v$  em regime permanente.  
**16.10** Calcule a potência dissipada no resistor de  $1\text{-}\Omega$  do circuito primário e o fator de potência visto pela fonte.  
**16.11** Calcule a corrente  $i_2$  em regime permanente.  
**16.12** Calcule as correntes  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  em regime permanente, se  $\omega = 2$  rad/s.  
**16.13** Calcule a energia armazenada no transformador do Prob. 16.12, em  $t = 0$ . (Tome as correntes transitórias como iguais a zero.)



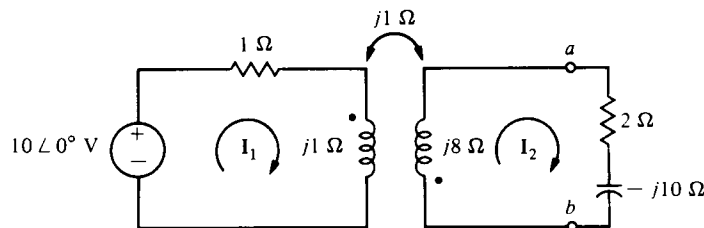
PROBLEMA 16.9



PROBLEMA 16.10



PROBLEMA 16.11



PROBLEMA 16.12

- 16.14** Calcule a energia armazenada no transformador da Fig. 16.3(a), quando  $i_1 = 2$  A e  $i_2 = 4$  A, se  $L_1 = 2$  H,  $L_2 = 10$  H e  $M = 4$  H. (b) Repita a parte (a), se um dos pontos de polaridade for passado para o outro terminal.
- 16.15** Repita o Prob. 16.13, se  $\omega = 4$  rad/s e  $t = \pi/8$  s.
- 16.16** Calcule o coeficiente de acoplamento  $k$ , se  $L_1 = 0,02$  H,  $L_2 = 0,125$  H e  $M = 0,01$  H.
- 16.17** Calcule  $M$ , se  $L_1 = 0,4$  H,  $L_2 = 0,9$  H e (a)  $k = 1$ , (b)  $k = 0,5$  e (c)  $k = 0,01$ .
- 16.18** Note que, para bobinas acopladas, podemos sempre escolher as atribuições de corrente entrando nos pontos e as polaridades positivas das tensões nos pontos, como na Fig. 16.3(a). (Isso, certamente, pode requerer o uso de  $-i$  no lugar de  $i$  etc.) Mostre que, se resolvermos as equações representativas (16.16) para as derivadas da corrente e integrarmos o resultado, teremos

$$i_1(t) = \frac{L_2}{\Delta} \int_0^t v_1 dt - \frac{M}{\Delta} \int_0^t v_2 dt + i_1(0)$$

$$i_2(t) = -\frac{M}{\Delta} \int_0^t v_1 dt + \frac{L_1}{\Delta} \int_0^t v_2 dt + i_2(0)$$

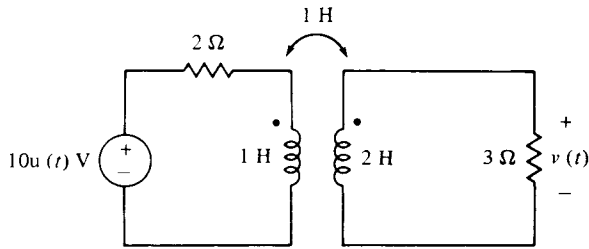
onde  $\Delta$  é o determinante

$$\Delta = L_1 L_2 - M^2$$

Este resultado nos possibilita resolver circuitos acoplados com análise nodal.

16.19 Resolva o Prob. 16.6 usando análise nodal, como descrito no Prob. 16.18.

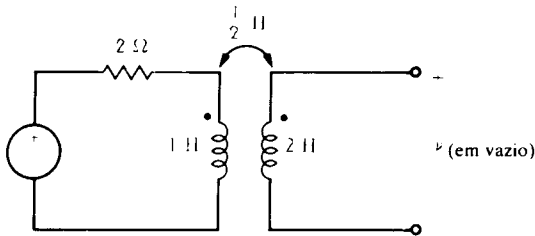
16.20 Calcule  $v(t)$ , para  $t > 0$ , usando (a) análise de laço e (b) análise nodal.



PROBLEMA 16.20

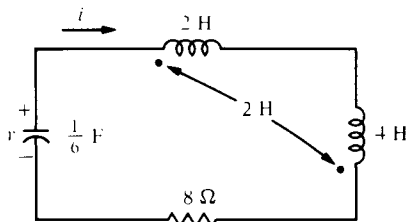
16.21 Mostre, de (16.8), que um transformador real ( $0 \leq M \leq \sqrt{L_1 L_2}$ ) satisfaz a condição de passividade  $w(t) \geq 0$ .

16.22 (a) Calcule  $v$  para  $t > 0$ , se  $v_g = 4u(t)$  V, e (b) calcule o valor em regime permanente de  $v$ , se  $v_g = 4 \cos 8t$  V e os terminais de saída então com uma carga resistiva de  $8 \Omega$ .



PROBLEMA 16.22

16.23 Calcule  $i$  para  $t > 0$ , se  $i(0) = 0$  e  $v(0) = 4$  V.

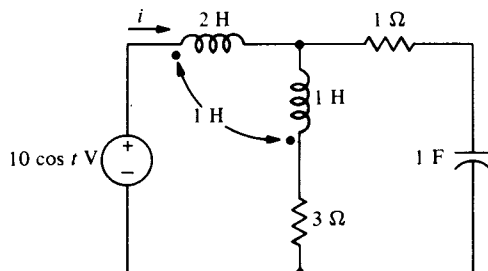


PROBLEMA 16.23

16.24 Calcule a corrente em regime permanente  $i_1$  no Prob. 16.8, usando a impedância refletida.

16.25 Calcule a corrente em regime permanente  $i_2$  no Prob. 16.8 trocando tudo no circuito fasorial correspondente à esquerda dos terminais  $a-b$  pelo seu circuito equivalente de Thévenin.

16.26 Calcule a corrente em regime permanente  $i$ .

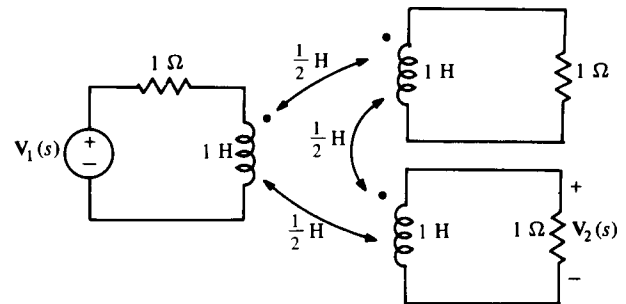


PROBLEMA 16.26

16.27 Calcule a corrente em regime permanente  $i_1$  no Prob. 16.12, usando a impedância refletida.

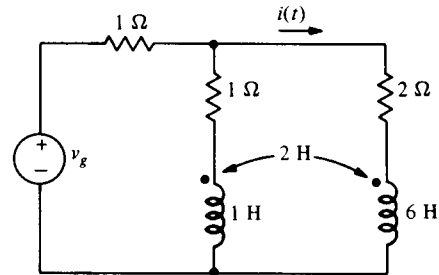
16.28 Calcule a corrente em regime permanente  $i_2$  no Prob. 16.12, trocando tudo à esquerda dos terminais  $a-b$  pelo seu circuito equivalente de Thévenin.

16.29 Calcule a função de rede,  $H(s) = V_2(s)/V_1(s)$ .



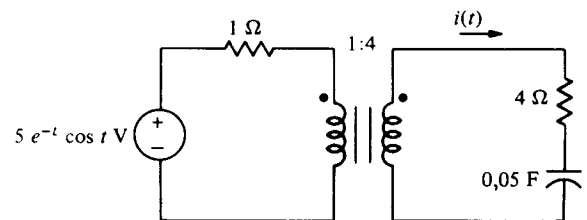
PROBLEMA 16.29

16.30 Calcule as frequências naturais presentes em  $i(t)$ .



PROBLEMA 16.30

16.31 Calcule  $i(t)$ , para  $t > 0$ , se  $i(0^+) = 0$ .



PROBLEMA 16.31

16.32 Calcule a potência entregue à carga de  $(300 - j500)\text{-}\Omega$ , usando a impedância refletida.

16.33 Calcule a potência média entregue ao resistor de  $4\text{-}\Omega$ .

16.34 Calcule a potência entregue ao resistor de  $2\text{-}\Omega$ .

16.35 O autotransformador abaixador tem o terminal 2 do secundário em um "tap" do enrolamento primário, no nó 2, como indicado. (a) Se o enrolamento secundário tem  $N_2$  espiras e o enrolamento primário tem  $N_1$  espiras, calcule as relações de tensão e de corrente. (b) Calcule  $I_2$  e  $V_2$ , se  $V_1 = 100 \angle 0^\circ$  V,  $I_1 = 4/30^\circ$  A,  $N_1 = 1.000$  espiras e  $N_2 = 400$  espiras.

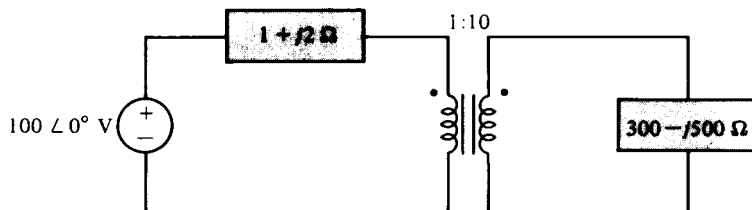
16.36 Calcule a relação de número de espiras  $n$ , de forma que a potência máxima seja entregue ao resistor de  $20\text{-k}\Omega$ .

16.37 Calcule os parâmetros  $z$ - e  $y$ - do transformador da Fig. 16.20(a), em termos de  $s$ .

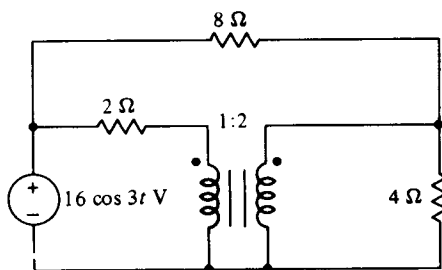
16.38 Resolva o Prob. 16.31 usando o circuito equivalente de (a) Fig. 16.21(b) e (b) Fig. 16.21(c).

- 16.39 Resolva o Prob. 16.32 usando o circuito equivalente de (a) Fig. 16.21(b) e (b) Fig. 16.21(c).  
 16.40 Calcule a tensão em regime permanente  $v$  usando o circuito T

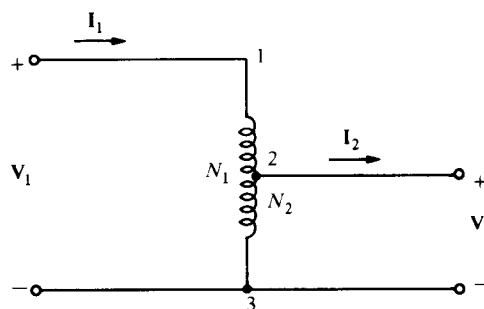
- equivalente para o transformador.  
 16.41 Resolva o Prob. 16.8 usando o circuito T equivalente para o transformador.



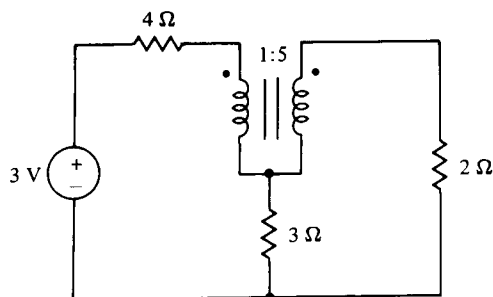
PROBLEMA 16.32



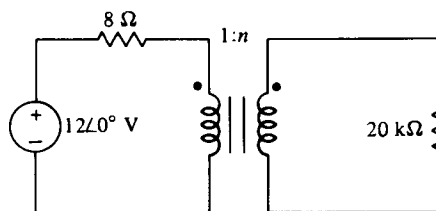
PROBLEMA 16.33



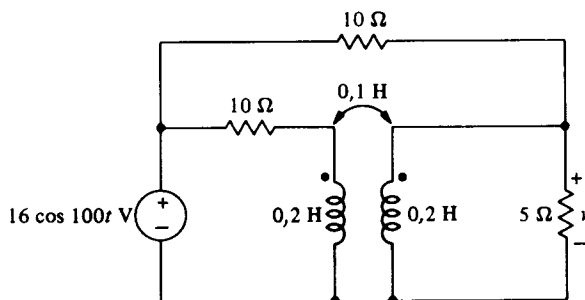
PROBLEMA 16.35



PROBLEMA 16.34



PROBLEMA 16.36



PROBLEMA 16.40

## PROBLEMAS DE APLICAÇÃO DE COMPUTADOR

- 16.42 Usando SPICE, plote  $i$ , para  $0 < t < 5$  s, no circuito do Prob. 16.23.  
 16.43 Usando SPICE, calcule  $V_2$  no Prob. 16.29, se  $V_1 = 120 \angle 0^\circ$  V e  $f = 60$  Hz.  
 16.44 Usando o circuito equivalente da Fig. 16.21(b) com SPICE, calcule

a tensão no resistor de 8-ohm do Prob. 16.33.

- 16.45 No circuito do Prob. 16.40, troque o resistor de 10-ohms ligado em ponte sobre o transformador por um capacitor de 0,1-F. Use o SPICE para plotar a resposta em frequência do circuito resultante, no intervalo  $1 < f < 50$  Hz.



## Métodos de Fourier

---

*Um grande poema matemático.*

*Lord Kelvin, sobre as Séries de Fourier*

---

Em 1822, um trabalho pioneiro de grande influência sobre a teoria matemática de condução de calor foi publicado pelo grande matemático, egiptologista e administrador francês Jean Baptiste Joseph Fourier. Foi uma obra-prima, não somente por causa do novo campo da condução de calor que estudou, mas também por causa da série infinita de senóides que desenvolveu; esta última tornou-se famosa com a série de Fourier. Com a série de Fourier, não estamos mais restritos, nos métodos fasoriais simplificados, a circuitos cujas entradas são senóides.

Fourier nasceu em Auxerre, França, filho de um alfaiate. Frequentou um colégio militar local dirigido por monges Beneditinos e mostrou tanta habilidade em matemática que tornou-se, mais tarde, professor de matemática no colégio. Como a maioria dos franceses de sua época, foi arrebatado pela política da Revolução Francesa e suas conseqüências e, por mais de uma vez, esteve perto de perder a vida. Foi um dos primeiros professores na recém-fundada Ecole Polytechnique, onde veio a lecionar análise matemática. Aos 30 anos, Fourier foi designado por Napoleão, conselheiro científico em uma expedição ao Egito e, por quatro anos, foi secretário do Institute d'Egypte, cujo trabalho consagrou a egiptologia como uma disciplina individual. Foi prefeito do departamento de Isere de 1801 a 1814, quando escreveu seu famoso tratado sobre condução de calor. Completou um livro de equações algébricas pouco antes de sua morte, em 1830. ■



Até aqui, com poucas exceções, estudamos excitações que foram exponenciais, senóides ou senóides amortecidas, e o leitor pode ter ficado impressionado pela relativa facilidade com que podemos manusear tais funções. Em particular, o conceito de fasores e de impedância nos permitiu tratar circuitos com estas excitações como se fossem circuitos resistivos, e calcular tanto sua resposta forçada como sua resposta natural.

Existem muitas funções de entrada, contudo, que são importantes em engenharia, que não são exponenciais ou senóides, e para as quais os métodos fasoriais não se aplicam diretamente. Alguns exemplos são ondas quadradas, ondas dente de serra e pulsos triangulares. Com efeito, uma função pode ser representada por um conjunto de pontos e não ter representação analítica. Neste capítulo, vamos estudar estas funções adicionais e mostrar como podemos representá-las em termos das familiares funções senoidais e, desta forma, usar fasores, como antes. As técnicas que usaremos foram criadas em 1822 pelo grande matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph Fourier, que viveu de 1768 a 1830.

## 17.1

### A Série Trigonométrica de Fourier

As limitações do método fasorial tornam-se dramaticamente visíveis considerando-se as funções da Fig. 17.1, que são entradas de circuitos extremamente usadas, mas nenhuma das quais é senoidal ou exponencial. A onda dente de serra da Fig. 17.1(a) é o sinal de varredura que controla o feixe de elétrons de um osciloscópio de raios catódicos e faz com que a imagem na tela se reproduza rapidamente a cada  $T$  segundos, dando a ilusão de uma imagem estacionária. As funções das Figs. 17.1(b) e (c) são, respectivamente, uma onda senoidal *retificada em onda completa* e uma onda senoidal *retificada em meia onda*, usadas para converter ca em cc pulsante. Uma onda senoidal retificada em onda completa é uma senóide que tem seus valores negativos trocados para positivos e a onda senoidal retificada em meia onda é uma onda senoidal com seus valores negativos igualados a zero. O sinal da Fig. 17.1(d) é uma *onda quadrada*, que pode ser usada como um *relógio* para estimular um circuito periodicamente por pequenos intervalos, quando seu valor é positivo. Todos estes sinais são muito comuns, mas visto que eles não são exponenciais ou senoidais, o método fasorial não pode ser aplicado diretamente aos circuitos para os quais eles são as entradas.

As formas de ondas da Fig. 17.1 têm uma coisa em comum, contudo: todas elas são funções  $f(t)$ , com período  $T$ . Ou seja,

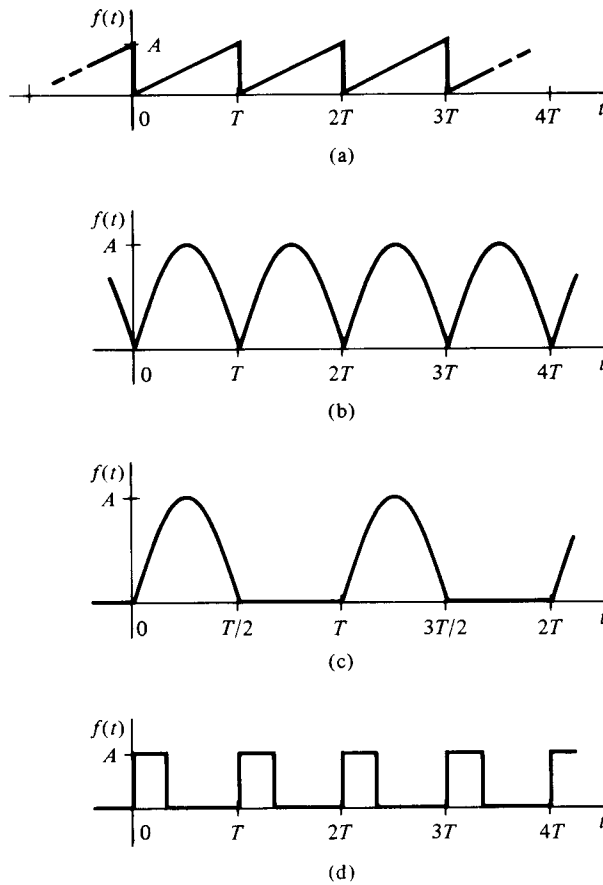
$$f(t) = f(t + T)$$

Como Fourier mostrou, se tal função  $f(t)$  satisfaz um conjunto de condições gerais, pode ser representada por uma série infinita de senóides

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots \\ + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots$$

ou, de forma mais compacta,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (17.1)$$



**FIGURA 17.1** (a) Onda dente de serra (b) onda senoidal retificada em onda completa (c) onda senoidal retificada em meia onda (d) onda quadrada

onde  $\omega_0 = 2\pi/T$ . Essa série é chamada *série trigonométrica de Fourier*, ou simplesmente *série de Fourier*, de  $f(t)$ . Os  $a$ 's e  $b$ 's são chamados *coeficientes de Fourier* e dependem, evidentemente, de  $f(t)$ .

Vemos, portanto, que uma onda não-senoidal, que não tem representação fasorial, pode ser representada por uma série de senóides, cada uma das quais tem uma representação fasorial. Também vemos de (17.1) que uma função não-senoidal pode conter não apenas uma frequência, como uma onda senoidal, mas um número infinito de frequências,  $0, \omega_0, 2\omega_0, \dots$

Os coeficientes de Fourier podem ser determinados facilmente com o uso da Tabela 12.1 ou das fórmulas de integração na parte interna da capa deste livro. Vamos começar calculando  $a_0$ , o que pode ser feito integrando-se os dois lados de (17.1) por um período completo; ou seja,

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^T \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) dt$$

Visto que  $T = 2\pi/\omega_0$ , cada termo no somatório é zero, de acordo com a linha 2 da Tabela 12.1 ( $\alpha = 0$ ), e, portanto, temos

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (17.2)$$

A seguir, vamos multiplicar (17.1) por  $\cos m\omega_0 t$ , onde  $m$  é um inteiro, e integrar. Obteremos

$$\int_0^T f(t) \cos m\omega_0 t dt = \int_0^T \frac{a_0}{2} \cos m\omega_0 t dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^T \cos m\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt$$

Das linhas 2, 4 e 5 da Tabela 12.1 (para  $\alpha = \beta = 0$ ), cada termo no lado direito é zero, exceto o termo onde  $n = m$  no primeiro somatório. Esse termo é dado por

$$a_m \int_0^T \cos^2 m\omega_0 t \, dt = \frac{\pi}{\omega_0} a_m = \frac{T}{2} a_m$$

de forma que

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos m\omega_0 t \, dt, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (17.3)$$

Finalmente, multiplicando (17.1) por  $\sin m\omega_0 t$ , integrando e aplicando a Tabela 12.1, temos

$$b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin m\omega_0 t \, dt, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (17.4)$$

Notamos que (17.2) é o caso especial,  $m = 0$ , de (17.3) (motivo pelo qual usamos  $a_0/2$  ao invés de  $a_0$  para o termo constante). Também, visto que  $f(t)$  e  $\cos n\omega_0 t$  são periódicas de período  $T$ , seu produto também é periódico de período  $T$ . De modo similar, o produto de  $f(t)$  por  $\sin n\omega_0 t$ , é periódico de período  $T$ . Desta forma, podemos integrar sobre qualquer intervalo de comprimento  $T$ , tal como  $t_0$  a  $t_0 + T$ , para um  $t_0$  arbitrário, e o resultado será o mesmo. Portanto, podemos resumir, dando os coeficientes de Fourier na forma

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt, & n &= 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt, & n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (17.5)$$

Trocamos o índice  $m$  por  $n$ , para ficar de acordo com a notação de (17.1).

O termo  $a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$  em (17.1) é, às vezes, chamado de *enésima harmônica*, por analogia com a teoria musical. O caso  $n = 1$  é a primeira harmônica, ou *fundamental*, com frequência fundamental  $\omega_0$ . O caso  $n = 2$  é a segunda harmônica, com frequência  $2\omega_0$ , e assim por diante. O termo  $a_0/2$  é a componente constante ou cc, e, de (17.2), podemos ver que é também o valor médio de  $f(t)$ , sobre um período. Pode ser frequentemente obtido por inspeção do gráfico de  $f(t)$ .

As condições sob as quais (17.1) é a série de Fourier representando  $f(t)$ , onde os coeficientes de Fourier são dados por (17.5), são, como já foi dito, bastantes gerais e se verificam para quase todas as funções que encontramos na engenharia. Para informação do leitor, elas são chamadas de condições de *Dirichlet* e são como se segue:

Em qualquer intervalo finito,  $f(t)$  tem, no máximo, um número finito de descontinuidades finitas, um número finito de máximos e mínimos, e

$$\int_0^T |f(t)| \, dt < \infty \quad (17.6)$$

A série converge para  $1/2 [f(t^-) + f(t^+)]$  que é  $f(t)$  nos pontos onde  $f(t)$  é contínua.

## EXEMPLO 17.1

Como um exemplo, vamos calcular a série de Fourier para a onda dente de serra da Fig. 17.2, dada por

$$\begin{aligned} f(t) &= t, & -\pi < t < \pi \\ f(t + 2\pi) &= f(t) \end{aligned} \quad (17.7)$$

Visto que  $T = 2\pi$ , temos  $\omega_0 = 2\pi/T = 1$ . Se escolhermos  $t_0 = -\pi$ , então a primeira equação de (17.5), para  $n = 0$ , dá

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = 0$$

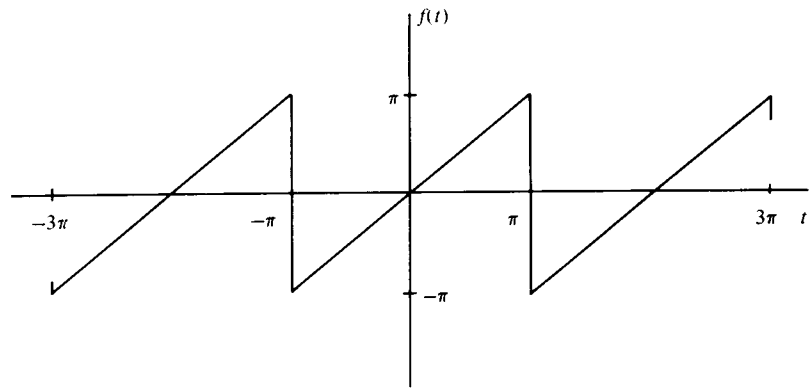


FIGURA 17.2 Onda dente de serra

Para  $n = 1, 2, 3, \dots$  temos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos nt \, dt \\ &= \frac{1}{n^2 \pi} (\cos nt + nt \operatorname{sen} nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \operatorname{sen} nt \, dt \\ &= \frac{1}{n^2 \pi} (\operatorname{sen} nt - nt \cos nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{2 \cos n\pi}{n} \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

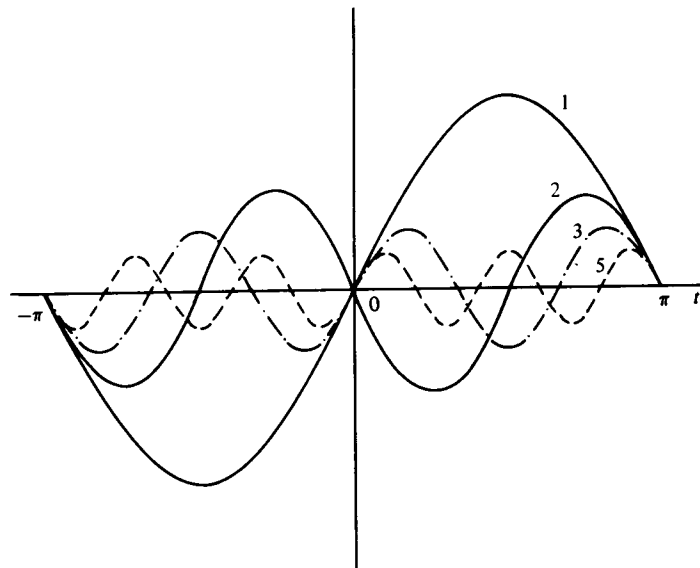


FIGURA 17.3 Quatro harmônicas de (17.8)

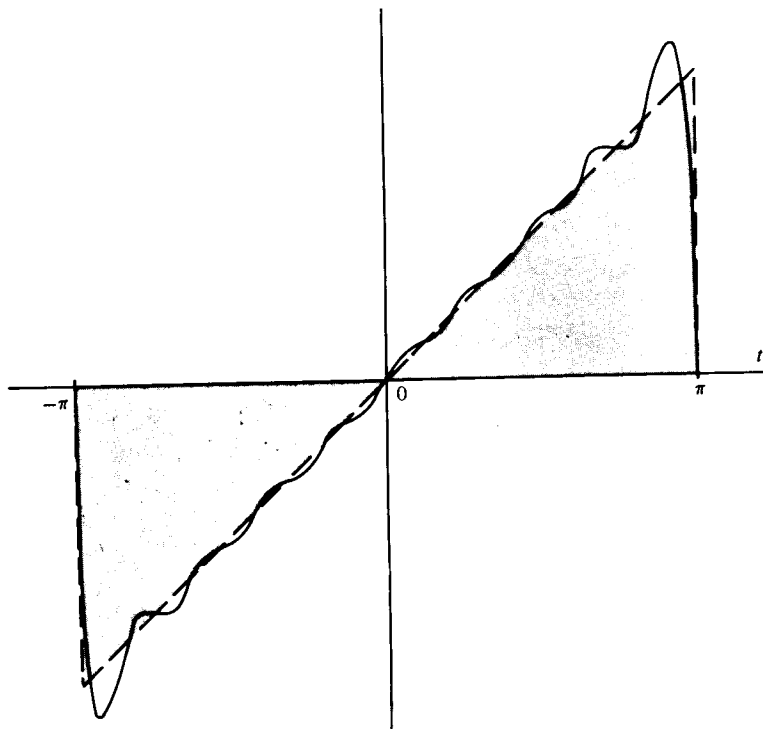


FIGURA 17.4 Soma das 10 primeiras harmônicas de (17.8)

O caso  $n = 0$  teve que ser considerado separadamente, por causa do aparecimento do termo  $n^2$  no denominador, no caso geral. Também, visto que  $a_0/2$  é o valor médio de uma onda dente de serra num período, por inspeção da Fig. 17.2 vemos que  $a_0 = 0$ .

A partir dos nossos resultados, a série de Fourier para a dente de serra é

$$f(t) = 2 \left( \frac{\text{sen } t}{1} - \frac{\text{sen } 2t}{2} + \frac{\text{sen } 3t}{3} - \dots \right) \quad (17.8)$$

A fundamental e as segunda, terceira e quinta harmônicas estão esboçadas, para um período, na Fig. 17.3. Se um número suficiente de termos em (17.8) for tomado, a série pode se aproximar bastante de  $f(t)$ . Por exemplo, as 10 primeiras harmônicas foram somadas e o resultado esboçado na Fig. 17.4.

### EXEMPLO 17.2

Como outro exemplo, suponha que temos

$$\begin{aligned} f(t) &= 0, & -2 < t < -1 \\ &= 6, & -1 < t < 1 \\ &= 0, & 1 < t < 2 \\ f(t + 4) &= f(t) \end{aligned}$$

um período do qual está indicado na Fig. 17.5. Evidentemente,  $T = 4$  e  $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/2$ . Se tomarmos  $t_0 = 0$  em (17.5), devemos dividir cada integral em três partes, visto que, no intervalo de 0 a 4,  $f(t)$

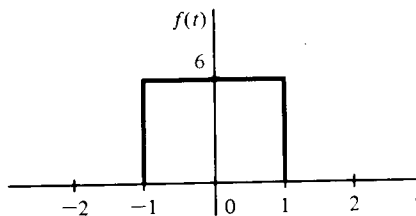


FIGURA 17.5 Um período ( $-2 < t < 2$ ) de uma função periódica

tem valor 0, 6 e 0. Se  $t_0 = -1$ , temos somente que dividir a integral em duas partes, visto que  $f(t) = 6$  de  $-1$  a  $1$  e  $f(t) = 0$  de  $1$  a  $3$ . Portanto, vamos escolher esse valor de  $t_0$  e obter

$$a_0 = \frac{2}{4} \int_{-1}^1 6 dt + \frac{2}{4} \int_1^3 0 dt = 6$$

Temos também

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{4} \int_{-1}^1 6 \cos \frac{n\pi t}{2} dt + \frac{2}{4} \int_1^3 0 \cos \frac{n\pi t}{2} dt \\ &= \frac{12}{n\pi} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{2} \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{4} \int_{-1}^1 6 \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2} dt + \frac{2}{4} \int_1^3 0 \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2} dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Desta forma, a série de Fourier é

$$f(t) = 3 + \frac{12}{\pi} \left( \cos \frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi t}{2} - \dots \right)$$

Visto que não existem harmônicas pares, podemos escrever o resultado na forma mais compacta

$$f(t) = 3 + \frac{12}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos \{(2n-1)\pi t/2\}}{2n-1}$$

Qualquer um que duvide da importância de selecionar um bom valor para  $t_0$  em (17.5) pode tomar  $t_0 = 0$ . Os resultados serão os mesmos, mas não os esforços.

## EXERCÍCIOS

17.1.1 Calcule a representação em série de Fourier para a onda quadrada

$$\begin{aligned} f(t) &= 4, & 0 < t < 1 \\ &= -4, & 1 < t < 2 \\ f(t+2) &= f(t) \end{aligned}$$

Resposta:  $\frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi t}{2n-1}$

17.1.2 Calcule os coeficientes de Fourier para

$$\begin{aligned} f(t) &= 3, & 0 < t < 1 \\ &= -1, & 1 < t < 4 \\ f(t+4) &= f(t) \end{aligned}$$

Resposta:  $a_0 = 0$ ,  $a_n = \frac{4}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$ ,  $b_n = \frac{4}{n\pi} \left( 1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

17.1.3 Calcule a série de Fourier para

$$\begin{aligned}
 f(t) &= 2, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\
 &= 0, & \frac{\pi}{2} < t < \pi \\
 f(t + \pi) &= f(t)
 \end{aligned}$$

Resposta:  $1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } 2(2n-1)t}{2n-1}$

17.1.4 Calcule a série de Fourier para

$$\begin{aligned}
 f(t) &= 0, & -1 < t < -\frac{1}{2} \\
 &= 4, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\
 &= 0, & \frac{1}{2} < t < 1
 \end{aligned}$$

$$f(t + 2) = f(t)$$

Resposta:  $2 + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos (2n-1)\pi t}{2n-1}$

## 17.2

### Propriedades de Simetria

Se uma função tem simetria em relação ao eixo vertical ou à origem, então o cálculo dos coeficientes de Fourier pode ser grandemente facilitado. Uma função  $f(t)$  que é simétrica em relação ao eixo vertical, é dita uma função *par* e goza da propriedade para todo  $t$ . Ou seja, podemos substituir  $t$  por  $-t$  sem

$$f(t) = f(-t) \tag{17.9}$$

provocar nenhuma modificação na função. Exemplos de funções pares são  $t^2$  e  $\cos t$ , e uma função par típica está indicada na Fig. 17.6(a). Evidentemente, poderíamos dobrar a figura sobre o eixo vertical e as duas partes do gráfico iriam coincidir.

Uma função *ímpar*  $f(t)$  tem a propriedade

$$f(t) = -f(-t) \tag{17.10}$$

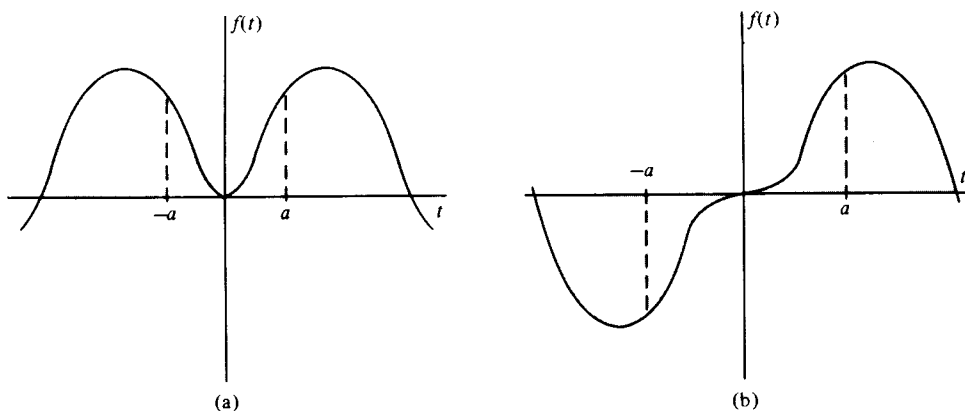


FIGURA 17.6 Função (a) par e (b) ímpar

Em outras palavras, substituindo  $t$  por  $-t$ , trocamos apenas o sinal da função. Uma função ímpar típica é indicada na Fig. 17.6(b), e outros exemplos são  $t$  e  $\text{sen } t$ . Evidentemente, podemos dobrar a metade à direita de uma função ímpar e então rodá-la em relação ao eixo  $t$ , de forma que ela irá coincidir com a metade à esquerda. Também, se uma linha é traçada de um ponto  $[t, f(t)]$  através da origem, ela vai interceptar a curva em  $[-t, -f(t)]$ . Por esta razão, uma função ímpar é dita como sendo simétrica em relação à origem.

Agora vamos examinar como as propriedades de simetria podem nos ajudar a determinar os coeficientes de Fourier. Na Fig. 17.6(a), vemos que, para  $f(t)$  par,

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt \quad (17.11)$$

Isso é verdadeiro porque a área de  $-a$  até 0 é idêntica à de 0 a  $a$ . Este resultado pode ser também estabelecido analiticamente escrevendo-se

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(t) dt &= \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt \\ &= -\int_a^0 f(-\tau) d\tau + \int_0^a f(t) dt \\ &= \int_0^a f(\tau) d\tau + \int_0^a f(t) dt \\ &= 2 \int_0^a f(t) dt \end{aligned}$$

No caso de  $f(t)$  ímpar, fica claro da Fig. 17.6(b) que

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0 \quad (17.12)$$

Isso é verdadeiro porque a integral de  $-a$  a 0 é exatamente o negativo da de 0 a  $a$ . Este resultado pode também ser obtido analiticamente, como foi feito para as funções pares.

Produtos de duas funções pares ou de duas funções ímpares são pares, ao passo que os produtos de uma função par por uma ímpar, são ímpares. Por exemplo, suponha que  $G(t)$  e  $H(t)$  são ímpares e que

$$F(t) = G(t)H(t)$$

Então, teremos

$$\begin{aligned} F(-t) &= G(-t)H(-t) \\ &= -G(t)[-H(t)] \\ &= G(t)H(t) \\ &= F(t) \end{aligned}$$

e, desta forma,  $F(t)$  é par. A outra afirmativa pode ser demonstrada de forma similar.

No caso dos coeficientes de Fourier, precisamos integrar as funções

$$g(t) = f(t) \cos n\omega_0 t \quad (17.13)$$

e

$$h(t) = f(t) \text{sen } n\omega_0 t \quad (17.14)$$

Se  $f(t)$  é par, então, visto que  $\cos n\omega_0 t$  é par e  $\text{sen } n\omega_0 t$  é ímpar,  $g(t)$  é par e  $h(t)$  é ímpar. Portanto, tomando  $t_0 = -T/2$  em (17.5), temos, para  $f(t)$  par,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt, & n &= 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= 0, & n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (17.15)$$



e, para  $f(t)$  ímpar,

$$\begin{aligned} a_n &= 0, & n &= 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt & n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (17.16)$$

Nos dois casos, um conjunto completo de coeficientes é nulo, e o outro conjunto é obtido tomando-se o dobro da integral sobre a metade do período, como descrito por (17.15) e (17.16).

Em resumo, uma função par não tem termos em seno e uma função ímpar não tem termos constantes e em cosseno na sua série de Fourier. Como exemplos, as funções dadas anteriormente em (17.7) e no Ex. 17.1.1 são funções ímpares e suas séries de Fourier têm apenas termos em seno. A função do Ex. 17.1.4 é par, logo sua série contém apenas termos em cosseno (incluindo o caso cc,  $n = 0$ ). A função do Ex. 17.1.2 não é nem par nem ímpar e, conseqüentemente, os dois tipos de termos estão presentes.

### EXEMPLO 17.3

Para ilustrar o uso da simetria, vamos calcular os coeficientes de Fourier da onda quadrada,

$$\begin{aligned} f(t) &= 4, & 0 < t < 1 \\ &= -4, & 1 < t < 2 \\ f(t + 2) &= f(t) \end{aligned}$$

que foi dada anteriormente no Ex. 17.1.1. Evidentemente,  $T = 2$  e, desta forma,  $\omega_0 = \pi$ . A função é ímpar, e, portanto, de (17.16), temos

$$\begin{aligned} a_n &= 0, & n &= 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{4}{2} \int_0^1 4 \operatorname{sen} n\pi t \, dt \\ &= \frac{8}{n\pi} [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} b_n &= 0, & n &\text{ par} \\ &= \frac{16}{n\pi}, & n &\text{ ímpar} \end{aligned}$$

que confirma o Ex. 17.1.1.

## EXERCÍCIOS

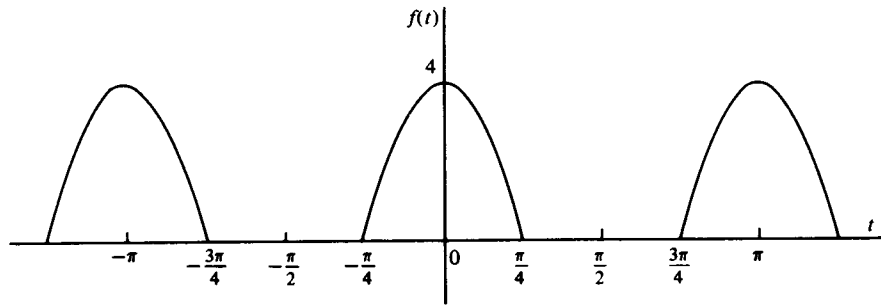
**17.2.1** Calcule a série de Fourier para a onda dente de serra de (17.7), usando as propriedades de simetria.

**17.2.2** Calcule a série de Fourier para a senóide retificada de meia onda

$$\begin{aligned} f(t) &= 0, & -\frac{\pi}{2} < t < -\frac{\pi}{4} \\ &= 4 \cos 2t, & -\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4} \\ &= 0, & \frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{2} \\ f(t + \pi) &= f(t) \end{aligned}$$

indicada na figura a seguir.

$$\text{Resposta: } a_0 = \frac{8}{\pi}; \quad a_1 = 2; \quad a_n = \frac{8}{\pi(1-n^2)} \cos \frac{n\pi}{2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots; \quad b_n = 0, \\ n = 1, 2, 3, \dots$$



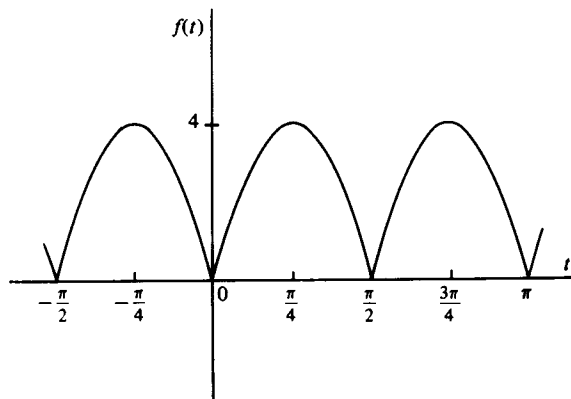
EXERCÍCIO 17.2.2

17.2.3 Calcule a série de Fourier para a senóide retificada de onda completa

$$f(t) = |4 \text{ sen } 2t|$$

indicada na figura a seguir.

$$\text{Resposta: } \frac{16}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} \cos 4nt \right)$$



EXERCÍCIO 17.2.3

## 17.3

### Resposta a Excitações Periódicas

Estamos agora em condições de calcular a resposta forçada de um circuito a qualquer excitação periódica que tenha uma série de Fourier. A excitação é expressa como uma série de Fourier e a resposta a cada termo da série é calculada pelo método fasorial. Então, a resposta total é, por superposição, a soma das respostas individuais.

#### EXEMPLO 17.4

Para ilustrar, vamos calcular a resposta forçada  $i(t)$  de um circuito  $RL$  em série, com  $R = 6 \Omega$  e  $L = 2 \text{ H}$ , excitado pela fonte,

$$\begin{aligned}
 v(t) &= 4 \text{ V}, & 0 < t < 1 \text{ s} \\
 &= -4 \text{ V}, & 1 < t < 2 \text{ s} \\
 v(t+2) &= v(t)
 \end{aligned}$$

Esta excitação é uma onda quadrada, e sua série de Fourier já foi calculada no Ex. 17.1.1. como sendo

$$v(t) = \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2n-1)\pi t}{2n-1} \text{ V}$$

Portanto, podemos escrever

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

onde

$$\begin{aligned}
 v_n &= \frac{16}{(2n-1)\pi} \text{sen}(2n-1)\pi t \\
 &= \frac{16}{(2n-1)\pi} \cos[(2n-1)\pi t - 90^\circ]
 \end{aligned}$$

é a harmônica de ordem  $(2n-1)$  de  $v(t)$ , com frequência  $\omega_n = (2n-1)\pi$  rad/s. A tensão fasorial é

$$\mathbf{V}_n = \frac{16}{(2n-1)\pi} \angle -90^\circ$$

e a impedância vista nos terminais da fonte, na frequência  $\omega_n$ , é

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z}(j\omega_n) &= 6 + j2(2n-1)\pi \\
 &= 2\sqrt{9 + \pi^2(2n-1)^2} \angle \tan^{-1} \frac{(2n-1)\pi}{3}
 \end{aligned}$$

A corrente fasorial é, portanto,

$$\mathbf{I}_n = |\mathbf{I}_n| \angle -90^\circ - \theta_n$$

onde

$$|\mathbf{I}_n| = \frac{8}{(2n-1)\pi\sqrt{9 + \pi^2(2n-1)^2}} \quad (17.17)$$

e

$$\theta_n = \tan^{-1} \frac{(2n-1)\pi}{3} \quad (17.18)$$

A corrente no domínio do tempo é dada por

$$\begin{aligned}
 i_n(t) &= |\mathbf{I}_n| \cos(\omega_n t - 90^\circ - \theta_n) \\
 &= |\mathbf{I}_n| \text{sen}(\omega_n t - \theta_n)
 \end{aligned} \quad (17.19)$$

Portanto, por superposição, a componente forçada da corrente é

$$i_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{I}_n| \text{sen}(\omega_n t - \theta_n) \quad (17.20)$$

Notamos que poderíamos ter simplificado o procedimento baseando o fasor na função seno em lugar da função cosseno, caso em que o ângulo de fase de  $-90^\circ$  não precisaria ser adicionado no início e subtraído no final, para se obter a segunda expressão de (17.19).

Podemos obter a resposta natural e, desta forma, a resposta completa, como fizemos anteriormente. Uma dificuldade com o procedimento é a necessidade de calcular a constante arbitrária na resposta natural pela soma de uma série infinita. Isso, certamente, também representa dificuldade para se calcular  $i(t)$  para um dado  $t$ . Neste exemplo, como vemos de (17.17), a amplitude da corrente diminui quando  $n$  aumenta e tende a zero quando  $n$  torna-se infinito. Isso é verdadeiro, em geral, para os coeficientes de Fourier, visto que, como sabemos, a série converge. Portanto, a série pode ser truncada com relativamente poucos termos e ainda ser uma boa aproximação.

Para minimizar o trabalho envolvido no caso geral, necessitamos de uma forma alternativa para a série de Fourier, usando apenas termos em cosseno. Para se obter tal forma, precisamos apenas escrever a  $n$ -ésima harmônica ( $n \neq 0$ ) como uma senóide única

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (17.21)$$

onde, por (10.9) e (10.10), a amplitude é

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (17.22)$$

e a fase é

$$\phi_n = -\tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} \quad (17.23)$$

A série trigonométrica de Fourier é, então, dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (17.24)$$

Como no caso fasorial, é necessária atenção para se determinar o quadrante de  $\phi_n$ . O lado extremo do ângulo  $\tan^{-1}(b_n/a_n)$  está no quadrante no qual o ponto  $(a_n, b_n)$  está localizado, o que é definido pelos sinais de  $a_n$  e  $b_n$ .

Se a  $n$ -ésima harmônica é uma tensão  $v_n$ , então a sua representação fasorial é a tensão

$$\mathbf{V}_n = A_n \angle \phi_n.$$

e a frequência é  $\omega = n\omega_0$ . A representação fasorial da componente cc

$$v_0 = \frac{a_0}{2}$$

será designada

$$\mathbf{V}_0 = A_0 \angle \phi_0$$

onde

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| \quad (17.25)$$

e

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 0, & a_0 &> 0 \\ &= 180^\circ, & a_0 &< 0 \end{aligned} \quad (17.26)$$

Se a impedância vista pela tensão  $\mathbf{V}_n$  é  $\mathbf{Z}(jn\omega_0)$ , que designaremos

$$\mathbf{Z}(jn\omega_0) = \mathbf{Z}_n = |\mathbf{Z}_n| \angle \theta_n$$

então a corrente fasorial é

$$\mathbf{I}_n = \frac{\mathbf{V}_n}{\mathbf{Z}_n} = \frac{A_n}{|\mathbf{Z}_n|} \angle \phi_n - \theta_n$$

da qual podemos calcular a corrente  $i_n$  no domínio do tempo, como antes, usando fasores.

A resposta  $i_0$  à tensão cc  $v_0$  é calculada como antes, onde capacitores são circuitos abertos e indutores são curtos-circuitos. Se  $\mathbf{Z}(0)$  é a resistência do circuito neste caso, então o fasor de  $i_0$  é

$$\mathbf{I}_0 = \frac{\mathbf{V}_0}{\mathbf{Z}(0)}$$

que determina  $i_0$ .

Se a tensão terminal  $v$  é não-senoidal, mas é periódica, com uma série de Fourier

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \quad (17.27)$$

então, por superposição, a corrente terminal é

$$i = \sum_{n=0}^{\infty} i_n = \frac{a_0}{2\mathbf{Z}(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{|\mathbf{Z}_n|} \cos(n\omega_0 t + \phi_n - \theta_n) \quad (17.28)$$

## EXERCÍCIOS

- 17.3.1** Calcule a componente forçada da tensão através do indutor no circuito do Exemplo 17.4.

Resposta:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\sqrt{9 + \omega_n^2}} \cos\left(\omega_n t - \tan^{-1} \frac{\omega_n}{3}\right)$ , onde  $\omega_n = (2n - 1)\pi$

- 17.3.2** Calcule a componente forçada de  $v$  no circuito do Prob. 11.22, se  $v_g$  for a tensão dada por

$$\begin{aligned} v_g &= 4 \text{ V}, & 0 < t < 1 \text{ s} \\ &= 0, & 1 < t < 4 \text{ s} \\ v_g(t + 4) &= v_g(t) \end{aligned}$$

Resposta:  $-1 - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left| \sin \frac{n\pi}{4} \right| \cos\left(\frac{n\pi t}{2} - 2 \tan^{-1} \frac{n\pi}{4} - \frac{n\pi}{4}\right)$

## 17.4

### A Série Exponencial de Fourier

Podemos ainda obter uma outra forma da série de Fourier, substituindo as funções seno e cosseno pelas suas formas exponenciais equivalentes, usando a fórmula de Euler. Essa forma é chamada a *série exponencial de Fourier* e é extremamente útil, especialmente no estudo das respostas em frequência, uma das mais importantes aplicações da série de Fourier. Nesta seção, vamos estudar a série exponencial de Fourier e, na próxima seção, iremos estudar as respostas em frequência ou espectro de frequências.

Substituindo os termos senoidais na série trigonométrica de Fourier por seus equivalentes exponenciais,

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t})$$

e

$$\operatorname{sen} n\omega_0 t = \frac{1}{j2} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})$$

(ver Apêndice D), e simplificando, temos

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_n - jb_n}{2} \right) e^{jn\omega_0 t} + \left( \frac{a_n + jb_n}{2} \right) e^{-jn\omega_0 t} \right] \quad (17.29)$$

Se definimos um novo coeficiente,  $c_n$ , por

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad (17.30)$$

e substituindo  $a_n$  e  $b_n$  de (17.5), com  $t_0 = -T/2$ , temos

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) (\cos n\omega_0 t - j \operatorname{sen} n\omega_0 t) dt$$

ou, pela fórmula de Euler,

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (17.31)$$

Observamos também que  $c_n^*$  (o conjugado de  $c_n$ ) é dado por

$$\begin{aligned} c_n^* &= \frac{a_n + jb_n}{2} \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) (\cos n\omega_0 t + j \operatorname{sen} n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

que é evidentemente  $c_{-n}$  ( $c_n$ , com  $n$  substituído por  $-n$ ). Ou seja,

$$c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \quad (17.32)$$

Finalmente, observamos que

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

que, por (17.31), é

$$\frac{a_0}{2} = c_0 \quad (17.33)$$

Somando (17.30), (17.32) e (17.33), podemos escrever (17.29) na forma

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

Associamos  $c_0$  com o primeiro somatório e substituímos o índice fictício do somatório  $n$  por  $-n$ , no segundo somatório. O resultado é escrito de forma mais compacta como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (17.34)$$

onde  $c_n$  é dado por (17.31). Essa versão da série de Fourier é, evidentemente, chamada série exponencial de Fourier.

### EXEMPLO 17.5

Como um exemplo, vamos calcular a série exponencial para a onda retangular do Ex. 17.1.1, dada por

$$\begin{aligned} f(t) &= 4, & 0 < t < 1 \\ &= -4, & 1 < t < 2 \end{aligned}$$

com  $T = 2$ . Temos  $\omega_0 = 2\pi/T = \pi$ , e, então, por (17.31)

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-jn\pi t} dt$$

Para  $n \neq 0$ , temos

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (-4) e^{-jn\pi t} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 4 e^{-jn\pi t} dt \\ &= \frac{4}{jn\pi} [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 4 dt + \frac{1}{2} \int_0^1 4 dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Visto que  $c_n = 0$  para  $n$  par e  $c_n = 8/jn\pi$  para  $n$  ímpar, podemos escrever a série exponencial na forma

$$f(t) = \frac{8}{j\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{j(2n-1)\pi t} \quad (17.35)$$

O leitor pode verificar que esse resultado é equivalente ao obtido no Ex. 17.1.1.

## EXERCÍCIOS

17.4.1 Calcule a série exponencial de Fourier para

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 & -1 < t < 1 \\ &= 0, & 1 < |t| < 2 \\ f(t+4) &= f(t) \end{aligned}$$

Resposta:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi/2)}{n} e^{jn\pi/2}$

17.4.2 A função

$$\text{Sa}(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$$

chamada *função de amostragem*, ocorre frequentemente em teoria de comunicações. [Uma função intimamente relacionada é a *função sinc*, definida por  $\text{sinc } x = (\text{sen } \pi x)/\pi x = \text{Sa}(\pi x)$ .] Mostre que, se definimos

$$c_0 = \lim_{n \rightarrow 0} c_n$$

então o resultado do Ex. 17.4.1 pode ser dado por

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{jn\pi t/2}$$

- 17.4.3** Generalize os resultados do Ex. 17.4.2, calculando a série exponencial de um trem de pulsos com extensão  $\delta < T$ , descrito por

$$f(t) = 1, \quad -\frac{\delta}{2} < t < \frac{\delta}{2}$$

$$= 0, \quad \frac{\delta}{2} < |t| < \frac{T}{2}$$

$$f(t + T) = f(t)$$

Resposta:  $\frac{\delta}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\delta}{T}\right) e^{j2n\pi t/T}$

- 17.4.4** Mostre que, se  $f(t)$  é par, os coeficientes exponenciais de Fourier são

$$c_n = \frac{a_n}{2} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

e, se  $f(t)$  é ímpar, são

$$c_n = \frac{b_n}{2j} = \frac{2}{jT} \int_0^{T/2} f(t) \text{sen } n\omega_0 t dt$$

Use os resultados para obter (17.35).

## 17.5

### Espectro de Freqüência

As entradas e saídas periódicas não-senoidais deste capítulo contêm não apenas uma freqüência, como foi o caso das funções senoidais, mas um número infinito de freqüências, como vemos de sua representação em série de Fourier. Visto que a série de Fourier indica a amplitude, assim como a fase, correspondente a cada freqüência, é simples dizer quais freqüências têm um papel importante no formato da saída e quais não têm. Essa, certamente, é uma das importantes aplicações da série de Fourier e será estudada com maiores detalhes nesta seção.

Uma função de saída  $f(t)$ , representada no domínio do tempo pela série de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

pode também ser determinada a partir de informações no domínio da freqüência. Ou seja, se conhecemos as grandezas fasoriais  $A_n$  e  $\phi_n$  para cada componente, podemos construir a função. A componente cc sai do caso em que  $n = 0$ . Se desejamos saber se a  $n$ -ésima harmônica é dominante ou não, precisamos apenas examinar  $A_n$ . Essa informação é rapidamente obtida de um gráfico de  $A_n$  versus freqüência. Visto que as freqüências são valores discretos, como 0,  $\omega_0$ ,  $2\omega_0$ , etc, o gráfico será um conjunto de linhas cujos comprimentos são proporcionais a  $A_n$ .

Se usarmos a fórmula de Euler para escrever

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

vemos que as duas freqüências complexas  $j\omega$  e  $-j\omega$  estão presentes. Conseqüentemente,  $f(t)$  contém todas as freqüências  $\pm jn\omega_0$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Isso nos leva a considerar a série exponencial de Fourier



$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

onde, como vimos anteriormente,

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

ou, em forma polar,

$$c_n = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} \angle -\tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$$

Em função de  $A_n$  e  $\phi_n$ , temos

$$c_n = \frac{A_n}{2} \angle \phi_n \quad (17.36)$$

$$c_{-n} = \frac{A_n}{2} \angle -\phi_n$$

Temos também  $c_0 = a_0/2$ , de forma que

$$c_0 = A_0 \angle \phi_0 \quad (17.37)$$

Visto que, de (17.36) e (17.37) temos

$$|c_n| = |c_{-n}| = \frac{A_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$|c_0| = A_0$$

o gráfico de  $|C_n|$  versus frequência contém a mesma informação que o de  $A_n$  versus frequência e o gráfico de  $|c_n|$  inclui valores negativos e positivos de  $n$ . Esse último gráfico é chamado um *espectro de amplitude discreto* ou *espectro de linhas* e é análogo à resposta em amplitude considerada no Capítulo 15 para o caso contínuo. Um gráfico similar de  $\phi_n$  é um *espectro de fase discreto* e é análogo à resposta em fase no caso contínuo. Os espectros de amplitude e de fase contêm toda a informação necessária para se construir a série de Fourier.

## EXEMPLO 17.6

Como um exemplo, o pulso retangular do Ex. 17.4.1 tem coeficientes de Fourier dados por

$$c_0 = \frac{1}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Também, do Ex. 17.4.2, podemos escrever este resultado em termos da função de amostragem como

$$\begin{aligned} A_n &= 2|c_n| = \left| \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n\pi/2} \right| \\ &= \left| \operatorname{Sa} \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right| \end{aligned}$$

Evidentemente,  $A_n = 0$ , para  $n$  par, e  $|2/n\pi|$ , para  $n$  ímpar, enquanto  $\phi_n = 0$ , para  $n = 1, 5, 9, \dots$ , e  $\phi_n = \pm 180^\circ$ , para  $n = 3, 7, 11, \dots$ . O espectro de amplitudes é indicado na Fig. 17.7 por meio de linhas verticais cheias. A curva tracejada é o valor absoluto da função de amostragem, que é também a *envoltória* do espectro.

Da Fig. 17.7, vemos que o espectro de amplitude é simétrico em relação ao eixo vertical, o que indica ser uma função par. Isso se verifica em geral, como vemos de (17.36), onde, substituindo-se  $n$

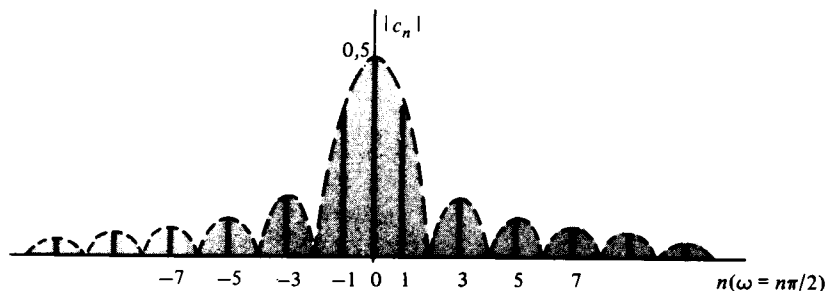


FIGURA 17.7 Espectro de amplitude

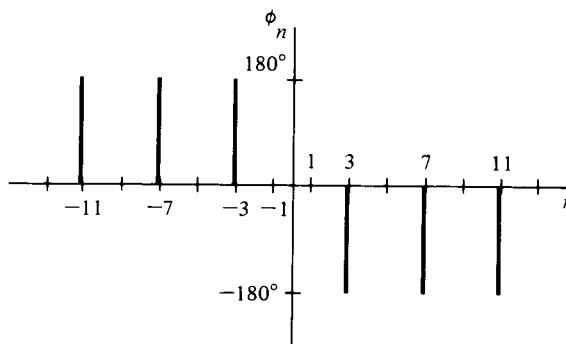


FIGURA 17.8 Espectro de fase

por  $-n$ , resulta na mesma amplitude  $A_n$ . De forma análoga, o espectro de fase é ímpar, visto que, em (17.36), substituindo-se  $n$  por  $-n$ , altera-se  $\phi_n$  para  $-\phi_n$ . Esse último fato pode ser usado para facilitar o esboço do espectro de fase, indicado na Fig. 17.8. Escolhemos  $-180^\circ$  como a fase para  $n$  positivo e, para preservar a simetria ímpar,  $180^\circ$  para  $n$  negativo.

## EXERCÍCIOS

17.5.1 Calcule os espectros de amplitude e fase  $|c_n|$  e  $\phi_n$  da onda dente de serra de (17.7).

Resposta:  $|c_n| = |1/n|$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ,  $c_0 = 0$

$$\phi_n = -90^\circ, n = 1, 3, 5, \dots, -2, -4, -6, \dots$$

$$= 90^\circ, n = 2, 4, 6, \dots, -1, -3, -5, \dots$$

17.5.2 Calcule o espectro de amplitude de

$$f(t) = 1, \quad -a < t < a$$

$$= 0, \quad a < |t| < T/2$$

$$f(t + T) = f(t)$$

onde  $T/2 > a$ . Note que essa função é uma generalização da do Ex. 17.4.1 e que a envoltória do seu espectro atinge zero em  $1/a, 2/a, 3/a, \dots$ , que são independentes de  $T$ . Ou seja, a "largura" da envoltória é independente do período do pulso.

Resposta:  $|c_n| = (2a/T) |\text{Sa}(2\pi an/T)|$

## A Transformada de Fourier

A série de Fourier nos possibilita passar do domínio do tempo para o domínio da frequência calculando-se os coeficientes de Fourier para funções periódicas no domínio do tempo. Os coeficientes de Fourier são funções de múltiplos inteiros  $n\omega_0$ , da frequência fundamental  $\omega_0$ , e são, portanto, grandezas discretas, correspondendo ao inteiro  $n$ . Se a função em estudo não for periódica, não podemos determinar sua série de Fourier. Neste caso, como veremos nesta seção, podemos calcular a *transformada de Fourier*, uma função da frequência contínua  $\omega$  que corresponde à função no domínio do tempo. A transformada de Fourier estende o conceito fasorial a funções não-periódicas, que são mais gerais que as senóides e cujos espectros de amplitude e fase são contínuos e não discretos. Estes espectros de frequência são extremamente úteis para o cálculo de faixas dominantes de frequências, exatamente do mesmo modo que as respostas em frequência das funções de transferência do Capítulo 15. No caso da transformada de Fourier, contudo, não estamos limitados a senóides.

O espectro de amplitude contínuo da Fig. 17.9 nos dará motivação para estudar a transformada de Fourier. É a resposta em amplitude de um filtro passa-baixas, como visto na tela de um osciloscópio. O eixo horizontal é a frequência, que começa em zero e cresce para a direita, e o eixo vertical indica a amplitude. Evidentemente, as frequências dominantes são as mais baixas, correspondendo a grandes amplitudes, e as frequências mais altas são suprimidas ou filtradas, correspondendo a amplitudes muito pequenas.

Vamos começar o estudo das transformadas de Fourier considerando uma função  $f(t)$ , definida em um intervalo infinito, mas que não é periódica e, portanto, não pode ser representada por uma série de Fourier. É possível, contudo, considerar-se a função como periódica, com um período *infinito*, e estender nossos resultados anteriores para incluir este caso. O desenvolvimento que faremos não é rigoroso, mas os resultados podem ser obtidos rigorosamente, se  $f(t)$  satisfaz as condições de Dirichlet da Seção 17.1, com (17.6) substituída por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (17.38)$$

Nossa estratégia é definir uma função  $f_T(t)$  como sendo  $f(t)$  no intervalo  $-T/2 < t < T/2$  e periódica, de período  $T$ . Isto é,

$$f_T(t) = f(t), \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

$$f_T(t + T) = f(t)$$

Desta forma, se  $f(t)$  é a função não-periódica mostrada na Fig. 17.10(a), então  $f_T(t)$  é idêntica a  $f(t)$  em  $(-T/2, T/2)$  e é periódica, de período  $T$ , como indicado na Fig. 17.10(b). [Tal função  $f_T(t)$  é dita como sendo a *extensão periódica* de  $f(t)$ .] A série exponencial de Fourier para  $f_T(t)$  é

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n t/T} \quad (17.39)$$

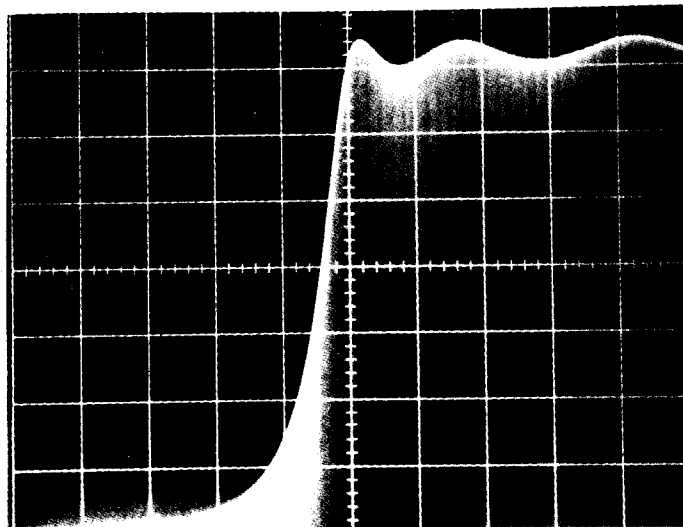


FIGURA 17.9 Resposta em amplitude de um filtro passa-baixas

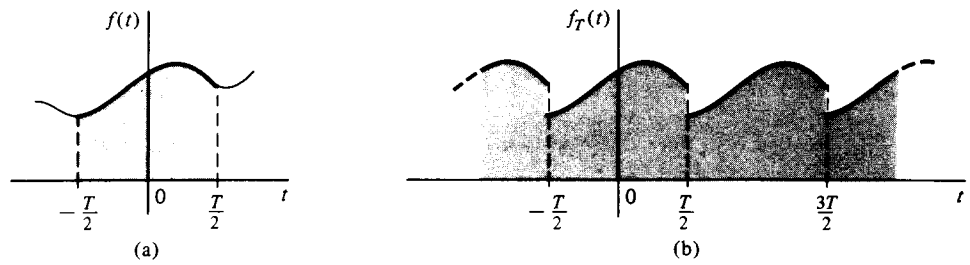


FIGURA 17.10 (a) Uma função  $f(t)$ ; (b) sua extensão periódica  $f_T(t)$

onde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(x) e^{-j2\pi nx/T} dx \quad (17.40)$$

Trocamos  $\omega_0$  por  $2\pi/T$  e estamos usando a variável fictícia  $x$  ao invés de  $t$  na expressão do coeficiente. Nossa intenção é fazer  $T \rightarrow \infty$ , quando  $f_T(t) \rightarrow f(t)$ . Teremos então estendido o conceito de série de Fourier a funções não-periódicas  $f(t)$ , considerando-as como periódicas de período infinito.

Visto que o processo de limite requer que  $\omega_0 = 2\pi/T \rightarrow 0$ , para enfatizar, vamos substituir  $2\pi/T$  por  $\Delta\omega$ . Portanto, substituindo (17.40) em (17.39), temos

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(x) e^{-jxn\Delta\omega} dx \right] e^{jn\Delta\omega} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(x) e^{-j(x-t)n\Delta\omega} dx \right] \Delta\omega \end{aligned} \quad (17.41)$$

Se definimos a função

$$g(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(x) e^{-j\omega(x-t)} dx \quad (17.42)$$

então, evidentemente, o limite de (17.41) é dado por

$$f(t) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ (\Delta\omega \rightarrow 0)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\Delta\omega, t) \Delta\omega \quad (17.43)$$

Pelo teorema fundamental do cálculo integral, este último resultado pode ser escrito

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega, t) d\omega \quad (17.44)$$

Mas, no limite,  $f_T \rightarrow f$  e  $T \rightarrow \infty$  em (17.42), de forma que o que parece ser  $g(\omega, t)$  em (17.44), na realidade é seu limite, que, por (17.42), é

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega(x-t)} dx$$

Portanto, (17.43) é, realmente

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega(x-t)} dx \right] d\omega \quad (17.45)$$

Podemos escrever este resultado na forma

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \right] e^{j\omega t} d\omega \quad (17.46)$$

Definindo a expressão entre colchetes como a função

$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (17.47)$$

onde trocamos a variável de integração de  $x$  para  $t$ , temos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (17.48)$$

A função  $\mathbf{F}(j\omega)$  é chamada de *transformada de Fourier* de  $f(t)$ , e  $f(t)$  é chamada a *antitransformada de Fourier*  $\mathbf{F}(j\omega)$ . Estes fatos são freqüentemente representados simbolicamente por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(j\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] \\ f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{F}(j\omega)] \end{aligned} \quad (17.49)$$

onde  $\mathcal{F}$  identifica a operação de executar a transformada de Fourier. Também, (17.47) e (17.48) são chamadas de *par da transformada de Fourier*, simbolizado por

$$f(t) \longleftrightarrow \mathbf{F}(j\omega) \quad (17.50)$$

A transformada de Fourier, como visto em (17.47), é uma *transformação* da função  $f(t)$  do domínio do tempo para o domínio da freqüência. A Equação (17.48), a antitransformada, é uma analogia direta com a série de Fourier. A transformada de Fourier (17.47) corresponde aos coeficientes de Fourier da Seção. 17.1. Outra forma para estas duas analogias é dizer que a transformada de Fourier é uma representação *contínua* ( $\omega$  sendo uma variável contínua), enquanto que o coeficiente de Fourier é uma representação *discreta* ( $n\omega_0$ , para  $n$  inteiro, sendo uma variável discreta).

### EXEMPLO 17.7

Como um exemplo, vamos calcular a transformada de

$$f(t) = e^{-at}u(t)$$

onde  $a > 0$ . Pela definição (17.47), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{-at}u(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \end{aligned}$$

ou

$$\mathcal{F}[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{-(a+j\omega)} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty}$$

Porque  $a > 0$ , o limite superior é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at}(\cos \omega t - j \sin \omega t) = 0$$

visto que a expressão entre parênteses oscila, enquanto a exponencial tende a zero. Desta forma, temos

$$\mathcal{F}[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{a+j\omega} \quad (17.51)$$

ou

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0$$

### EXEMPLO 17.8

Como outro exemplo, vamos calcular a transformada de um único pulso retangular

$$\begin{aligned} f(t) &= A, & -\frac{\delta}{2} < t < \frac{\delta}{2} \\ &= 0, & |t| > \frac{\delta}{2} \end{aligned} \quad (17.52)$$

que está indicado na Fig. 17.11. Por definição, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} Ae^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{2A}{\omega} \left( \frac{e^{j\omega\delta/2} - e^{-j\omega\delta/2}}{j2} \right) \end{aligned}$$

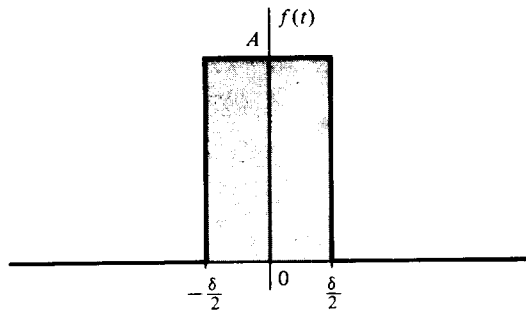


FIGURA 17.11 Pulso finito de largura  $\delta$

ou

$$\mathbf{F}(j\omega) = \frac{2A}{\omega} \operatorname{sen} \frac{\omega\delta}{2} \quad (17.53)$$

De forma alternativa, podemos escrever

$$\mathbf{F}(j\omega) = A\delta \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega\delta}{2}\right)$$

onde  $\operatorname{Sa}(\omega\delta/2)$  é a função de amostragem definida no Ex. 17.4.2.

## EXERCÍCIOS

17.6.1 Calcule  $\mathcal{F}[e^{-a|t|}]$ , onde  $a > 0$ .  
Resposta:  $2a/(\omega^2 + a^2)$

17.6.2 Calcule  $\mathbf{F}(j\omega)$ , se

$$\begin{aligned} f(t) &= t + 1, & -1 < t < 0 \\ &= -t + 1, & 0 < t < 1 \\ &= 0, & \text{em qualquer outra parte} \end{aligned}$$

Resposta:  $[2(1 - \cos \omega)]/\omega^2 = \text{Sa}^2(\omega/2)$ .

**17.6.3** Calcule  $f(t)$ , se

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(j\omega) &= 1, & -1 < \omega < 1 \\ &= 0, & |\omega| > 1 \end{aligned}$$

Resposta:  $(1/\pi) \text{Sa}(t)$

## 17.7

### Operações com a Transformada de Fourier

Existem algumas operações que podem ser geralmente efetuadas com as transformadas de Fourier, e que são muito úteis. Vamos estudar um número destas operações e tabelá-las no final desta seção. Uma das propriedades mais empregadas é a da linearidade, que é uma consequência do fato de que a transformada de Fourier é uma transformada de integral, e, então, é uma operação *linear*. Ou seja, a transformada da associação

$$v(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$$

é a associação das transformadas

$$\mathbf{V}(j\omega) = c_1 \mathbf{F}_1(j\omega) + c_2 \mathbf{F}_2(j\omega)$$

onde  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$  são, respectivamente, as transformadas de Fourier de  $v$ ,  $f_1$  e  $f_2$ , e  $c_1$  e  $c_2$  são constantes. Este conceito de linearidade nos possibilita calcular rapidamente as transformadas de funções relativamente complicadas, a partir de transformadas de funções mais simples.

#### EXEMPLO 17.9

Por exemplo, a transformada da função

$$f(t) = 2(e^{-2t} - e^{-3t})u(t) \quad (17.54)$$

é, por linearidade e (17.51),

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(j\omega) &= \frac{2}{2 + j\omega} - \frac{2}{3 + j\omega} \\ &= \frac{2}{(2 + j\omega)(3 + j\omega)} \end{aligned} \quad (17.55)$$

Outra operação, envolvendo as transformadas de Fourier, que é também muito útil, é a da diferenciação no tempo. Suponha que desejamos calcular a transformada de Fourier da derivada da função  $f(t)$ . Por definição, se

$$f(t) \longleftrightarrow \mathbf{F}(j\omega)$$

então

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (17.56)$$

da qual obtemos

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} [\mathbf{F}(j\omega) e^{j\omega t}] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [j\omega \mathbf{F}(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\frac{df(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega F(j\omega) \quad (17.57)$$

Ou seja, a transformada da derivada de  $f$  se calcula multiplicando simplesmente a transformada de  $f$  por  $j\omega$ . Esse resultado pode ser estendido imediatamente para o caso geral

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \longleftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega) \quad (17.58)$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Estamos assumindo que as derivadas envolvidas existem e que a intercambialidade das operações de diferenciação e integração é válida. As condições nas quais nossa hipótese está correta são bastantes gerais e válidas para praticamente qualquer função que encontraremos.

### EXEMPLO 17.10

Como outro exemplo, vamos calcular a transformada de  $f(t - \tau)$ , onde  $\tau$  é uma constante. Substituindo  $t$  por  $t - \tau$  em (17.56), temos

$$\begin{aligned} f(t - \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F(j\omega) e^{-j\omega\tau}] e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

de onde concluímos, por (17.56), que

$$f(t - \tau) \longleftrightarrow F(j\omega) e^{-j\omega\tau} \quad (17.59)$$

O significado físico deste resultado é que um *atraso* no domínio do tempo [a função  $f(t - \tau)$  é  $f(t)$  atrasada de  $\tau$  segundos] corresponde a uma mudança de fase (um acréscimo de  $-\omega\tau$  na fase), no domínio da frequência.

A semelhança entre as integrais de  $f(t)$  e suas transformadas em (17.48) e (17.47) sugere que a troca de  $t$  e  $\omega$  de alguma forma vai levar a um novo conjunto de transformadas. De fato, se em (17.48), trocarmos  $\omega$  por  $x$  e  $t$  por  $-\omega$ , e multiplicarmos os dois lados da equação por  $2\pi$ , teremos

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(jx) e^{-jx\omega} dx$$

O membro à direita, como podemos ver de (17.47), é a transformada de Fourier de  $F(jt)$ . Desta forma, temos

$$F(jt) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad (17.60)$$

### EXEMPLO 17.11

Como exemplos, se aplicarmos (17.60) a (17.51) e (17.53), respectivamente, teremos

$$\frac{1}{a + jt} \longleftrightarrow 2\pi e^{a\omega} u(-\omega), \quad a > 0$$

e

$$\begin{aligned} \frac{2A}{t} \operatorname{sen} \frac{t\delta}{2} &\longleftrightarrow 2\pi A, & |\omega| < \frac{\delta}{2} \\ &\longleftrightarrow 0, & |\omega| > \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

Tabelamos as operações com as transformadas de Fourier derivadas nesta seção e algumas outras, na Tabela 17.1. O leitor é solicitado a demonstrar estas outras nos exercícios.



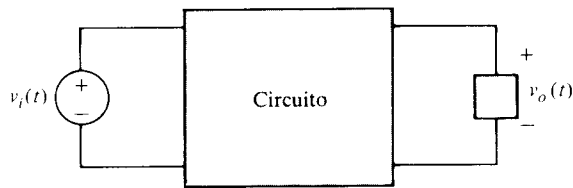
**TABELA 17.1** Operações com as transformadas de Fourier

$f(t)$	$\mathbf{F}(j\omega)$
1. $c_1 f(t) + c_2 f(t)$	$c_1 \mathbf{F}_1(j\omega) + c_2 \mathbf{F}_2(j\omega)$
2. $f(t/a)$	$a \mathbf{F}(ja\omega)$
3. $f(t - \tau)$	$e^{-j\omega\tau} \mathbf{F}(j\omega)$
4. $e^{j\omega_0 t} f(t)$	$\mathbf{F}(j\omega - j\omega_0)$
5. $\mathbf{F}(j\omega)$	$2\pi f(-t)$
6. $f(-t)$	$\mathbf{F}^*(j\omega)$
7. $\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$(j\omega)^n \mathbf{F}(j\omega), n = 0, 1, 2, \dots$
8. $t^n f(t)$	$j^{-n} \frac{d^n}{d(j\omega)^n} \mathbf{F}(j\omega), n = 0, 1, 2, \dots$

Podemos também usar as transformadas de Fourier para estender o conceito de função de rede, estudado no Capítulo 14, a circuitos com excitações não-senoidais. Como veremos, as funções de rede são exatamente as mesmas do caso de circuitos com excitações senoidais. Portanto, todas as propriedades de funções de transferência que estudamos são válidas neste caso mais geral. A única diferença é que aqui as entradas e saídas são transformadas de Fourier ao invés de fasores.

Vamos começar estudando o circuito geral da Fig. 17.12, onde, especificamente, tomamos a entrada e a saída como as tensões  $v_i(t)$  e  $v_o(t)$ , respectivamente. Poderíamos também ter tomado uma ou ambas como correntes. A equação representativa do circuito será considerada como (14.22), reproduzida como

$$\begin{aligned}
 a_n \frac{d^n v_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v_o}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dv_o}{dt} + a_0 v_o \\
 = b_m \frac{d^m v_i}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} v_i}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dv_i}{dt} + b_0 v_i
 \end{aligned}$$



**FIGURA 17.12** Circuito geral

Tomando a transformada de Fourier nos dois lados da equação, usando (17.58) e linearidade, temos

$$\begin{aligned}
 [a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0] \mathbf{V}_o(j\omega) \\
 = [b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0] \mathbf{V}_i(j\omega)
 \end{aligned}$$

As funções  $\mathbf{V}_i$  e  $\mathbf{V}_o$  são as transformadas de Fourier das funções de entrada e saída,  $v_i$  e  $v_o$ . Deste resultado, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathbf{V}_o(j\omega)}{\mathbf{V}_i(j\omega)} &= \mathbf{H}(j\omega) \\
 &= \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0}
 \end{aligned} \tag{17.61}$$

onde  $\mathbf{H}(j\omega)$  é idêntica a função de rede do Capítulo 14, calculada em  $s = j\omega$ .

Este desenvolvimento mostra que a função de rede, definida previamente como a relação entre os fasores de entrada e saída, é exatamente a mesma que a relação entre as transformadas de entrada e saída, e, nesse último caso, as funções envolvidas não têm que ser senoidais. Esta generalização pode ser também usada para calcular respostas no domínio do tempo.

**EXEMPLO 17.12** Por exemplo, suponha que a entrada  $v_i(t)$  é dada por

$$v_i(t) = e^{-3t}u(t) \quad (17.62)$$

e está relacionada à saída  $v_o(t)$  pela equação

$$\frac{dv_o}{dt} + 2v_o = 2v_i$$

Transformando a equação, temos

$$(j\omega + 2)V_o(j\omega) = 2V_i(j\omega)$$

da qual a função de transferência é

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{2}{j\omega + 2} \quad (17.63)$$

Também, por (17.51), temos

$$V_i(j\omega) = \frac{1}{3 + j\omega} \quad (17.64)$$

de forma que a transformada da saída é

$$\begin{aligned} V_o(j\omega) &= \mathbf{H}(j\omega)V_i(j\omega) \\ &= \frac{2}{(2 + j\omega)(3 + j\omega)} \end{aligned} \quad (17.65)$$

Por (17.55), temos

$$V_o(j\omega) = 2\frac{1}{(2 + j\omega)} - 2\frac{1}{(3 + j\omega)}$$

de forma que, por linearidade ou por (17.54), temos

$$v_o(t) = 2(e^{-2t} - e^{-3t})u(t) \quad (17.66)$$

Visto que o conceito de função de rede implica haver apenas uma entrada, as respostas no domínio do tempo obtidas deste modo são respostas para circuitos inicialmente em *repouso*. (Nenhuma energia inicial está armazenada.) Poderíamos desenvolver métodos gerais para usar as transformadas de Fourier para calcular soluções no domínio do tempo, tal como (17.66), mas as transformadas de Fourier se adaptam melhor a outras aplicações. Preferimos, portanto, estudar outra transformada, a *transformada de Laplace*, que, ao contrário da transformada de Fourier, leva em consideração condições iniciais diferentes de zero. Vamos discutir as transformadas de Laplace em detalhe no próximo capítulo.

Visto que as funções de transferência deste capítulo são idênticas às estudadas anteriormente, não vamos entrar em detalhes da sua resposta em frequência, pólos e zeros, frequências naturais, etc. Estes aspectos foram todos estudados nos Capítulos 14 e 15.

## EXERCÍCIOS

**17.7.1** Demonstre as operações 2, 4, 6 e 8 da Tabela 17.1.

**17.7.2** Usando o resultado do Ex. 17.6.1 e a linha 3 da Tabela 17.1, calcule a transformada inversa de  $2e^{-j\omega}/(\omega^2 + 1)$ .

Resposta:  $e^{-|t-1|}$

**17.7.3** Use o resultado do Ex. 17.6.1 e a linha 5 da Tabela 17.1 para calcular a transformada de  $1/(t^2 + 1)$ .

Resposta:  $\pi e^{-|\omega|}$

**17.7.4** Se  $x(t)$  é a entrada e  $y(t)$  a saída, calcule a função de rede, usando transformada de Fourier, onde

$$y'' + 4y' + 3y = 4x$$

Resposta:  $4/(3 - \omega^2 + j4\omega)$

17.7.5 Se, no Ex. 17.7.4

$$x = e^{-2t}u(t)$$

calcule  $\mathcal{F}[y(t)]$ .

Resposta:  $4/[(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)]$

17.7.6 Verifique no Ex. 17.7.5 que

$$\mathcal{F}[y(t)] = \frac{2}{j\omega + 1} - \frac{4}{j\omega + 2} + \frac{2}{j\omega + 3}$$

e calcule  $y(t)$  para o caso em que  $y(0) = y'(0) = 0$ .

Resposta:  $(2e^{-t} - 4e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t)$

## 17.8

### Série de Fourier e SPICE

Os coeficientes de Fourier podem ser calculados usando-se o SPICE, para uma série trigonométrica da forma

$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(n\omega_0 t + \psi_n) \quad (17.67)$$

Comparando (17.67) e (17.24), vemos que

$$d_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$D_n = A_n$$

$$\psi_n = \phi_n - \frac{\pi}{2}$$

A decomposição de Fourier é feita em conjunto com uma análise de transitórios, usando os comandos .TRAN e .FOUR, anteriormente descritos (veja o Apêndice E). Os componentes de Fourier de (17.67) podem ser obtidos por uma definição conveniente do intervalo transitório usado no comando .TRAN. Em geral, podemos assumir que a duração da resposta transitória inicia-se em  $t = 0$  s e vai até o fim do intervalo de resposta desejado como sendo o período da frequência fundamental.

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Isso dá a representação em série de uma função periódica de período  $T$ , cuja forma de onda é aquela da resposta transitória.

### EXEMPLO 17.13

Como exemplo, vamos calcular os coeficientes de Fourier da forma de onda da Fig. 17.2. Para fazer uma análise transitória, devemos definir um circuito para o qual a decomposição de Fourier possa ser aplicada à resposta. Suponha que usaremos um circuito simples, formado por uma fonte de corrente com uma saída, fluindo do nó de referência ao nó 1, igual à da Fig. 17.2, conectado a um resistor de 1-ohm. Os coeficientes de Fourier para esta tensão podem então ser calculados usando o comando .FOUR. O arquivo de circuito que irá produzir este resultado usando o "PWL" (especificação de transitório para forma de onda de composição linear em I) é

```
EXEMPLO PARA A SÉRIE DE FOURIER DA FIG. 17.2
*DECLARAÇÕES DE DADOS
I 0 1 PWL (0 0A 3. 1416 3. 1416A 3. 1417 -3.1416A 6.2832 0A)
R 1 0 1
.TRAN 0.1 6.2832
FOUR 0.159 V(1)
END
```

Neste programa, o período da forma de onda é definido no intervalo de 0 a 6,2832 s, o intervalo da resposta transitória. Portanto, uma frequência fundamental de 0,159 é usada no comando .FOUR. A solução resultante para a decomposição é

FOURIER COMPONENTS OF TRANSIENT RESPONSE V(1)

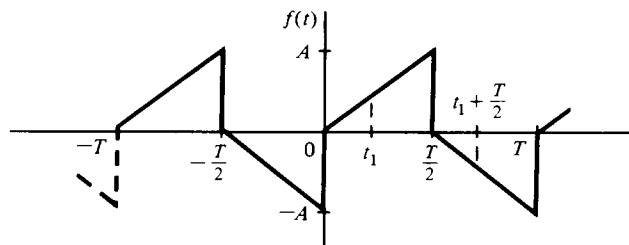
DC COMPONENT = -2.497780E-05

HARMONIC NO	FREQUENCY (HZ)	FOURIER COMPONENT	NORMALIZED COMPONENT	PHASE (DEG)	NORMALIZED PHASE (DEG)
1	1.590E-01	2.000E+00	1.000E+00	5.805E-04	0.000E+00
2	3.180E-01	1.001E+00	5.002E-01	-1.800E+02	-1.800E+02
3	4.770E-01	6.676E-01	3.338E-01	1.936E-04	-3.869E-04
4	6.360E-01	5.013E-01	2.506E-01	1.800E+02	1.800E+02
5	7.950E-01	4.016E-01	2.008E-01	1.156E-04	-4.649E-04
6	9.540E-01	3.353E-01	1.676E-01	1.800E+02	1.800E+02
7	1.113E+00	2.880E-01	1.440E-01	8.192E-05	-4.986E-04
8	1.272E+00	2.526E-01	1.263E-01	-1.800E+02	-1.800E+02
9	1.431E+00	2.252E-01	1.126E-01	6.606E-05	-5.144E-04

Uma vez que os coeficientes de Fourier são determinados, a série pode ser escrita, usando (17.67), para descrever a função original. A resposta de uma rede a uma função periódica, como discutido na Seção 17.3, pode agora ser calculada, aplicando-se o comando .DC para a componente cc  $d_0$  do circuito e o comando .AC para cada componente harmônica (amplitude  $D_n$ , frequência  $nf_0$  e fase  $\psi_n$ ). A solução, por superposição, é, então, a soma das componentes individuais no domínio do tempo.

## EXERCÍCIOS

- 17.8.1 Usando o SPICE, calcule os coeficientes de Fourier para a forma de onda do Ex. 17.1.1.
- 17.8.2 Repita o Exercício 17.8.1, para forma de onda indicada, se  $T = 10 \mu\text{s}$  e  $A = 1$ .



EXERCÍCIO 17.8.2

## PROBLEMAS

17.1 Calcule as séries trigonométricas de Fourier para as funções

(a)  $f(t) = 1, 0 < t < \pi$   
 $= 2, \pi < t < 2\pi$

$f(t + 2\pi) = f(t).$

(b)  $f(t) = e^t, -\pi < t < \pi$   
 $f(t + 2\pi) = f(t)$

(c)  $f(t) = t^2, -1 < t < 1$   
 $f(t + 2) = f(t).$

17.2 Calcule as séries trigonométricas de Fourier para as funções

(a)  $f(t) = t + 1, 0 < t < \pi$   
 $= t - 1, -\pi < t < 0$   
 $f(t + 2\pi) = f(t).$

(b)  $f(t) = |t|, -1 < t < 1$   
 $f(t + 2) = f(t).$

(c)  $f(t) = \frac{A}{T}t, 0 < t < T$

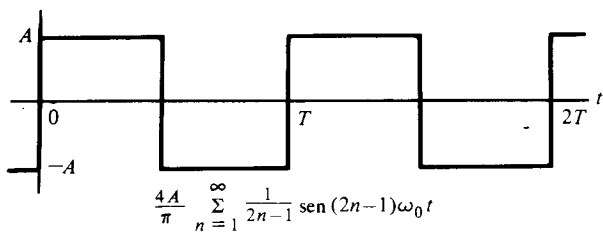
$f(t + T) = f(t)$

(d)  $f(t) = 1 - |t|, -1 < t < 1$   
 $f(t + 2) = f(t).$

17.3 Mostre que as séries trigonométricas de Fourier para as funções dadas são como indicado. (Em todos os casos,  $\omega_0 = 2\pi/T$ .)

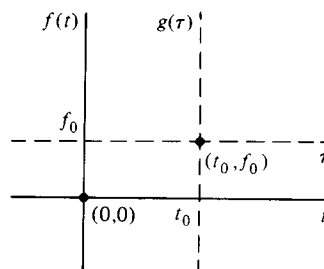
17.4 Calcule a série trigonométrica de Fourier para a função  $f(t)$ , um período da qual está indicado.

17.5 Se os eixos  $t, f(t)$  forem trasladados para um novo eixo  $\tau, g(\tau)$ , indicado na figura, de forma que a origem do novo eixo é o ponto



$$\frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\omega_0 t$$

(a) Onda quadrada

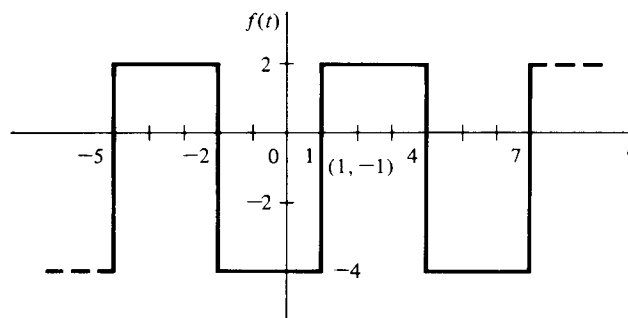


PROBLEMA 17.5

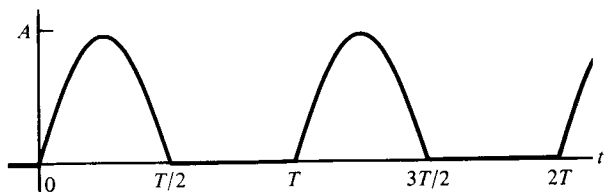
$(t_0, f_0)$ , as relações entre as variáveis são  $g = f - f_0$  e  $\tau = t - t_0$ . Mostre que

$$f(t) = f_0 + g(t - t_0)$$

- 17.6 Calcule a série trigonométrica de Fourier para a função  $f(t)$  indicada, transladando inicialmente os eixos de forma a colocar a origem no ponto  $(1, -1)$ , e explorando a simetria que resultará. [Nota: use os resultados dos Prob. 17.5 e 17.3(a).]

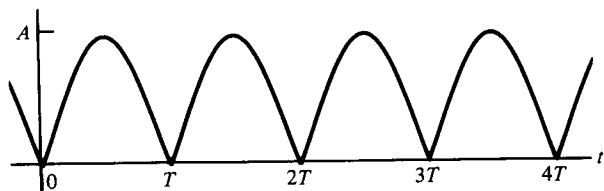


PROBLEMA 17.6



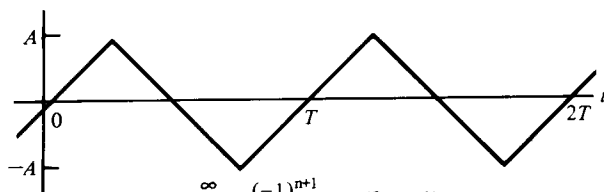
$$\frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin \omega_0 t - \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos 2n\omega_0 t$$

(b) Seno retificado de meia onda



$$\frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos n\omega_0 t$$

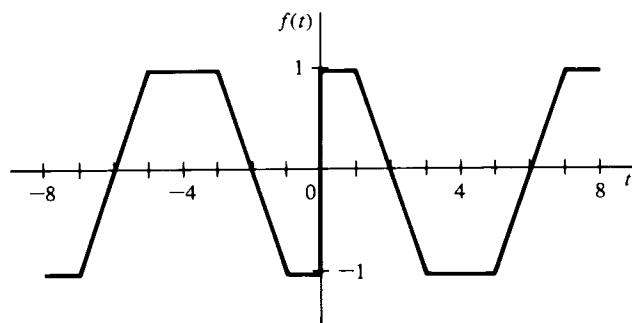
(c) Seno retificado de onda completa



$$\frac{8A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)\omega_0 t$$

(d) Onda triangular

PROBLEMA 17.3



PROBLEMA 17.4

- 17.7 Calcule a série trigonométrica de Fourier na forma de (17.24) para a função

$$f(t) = 4 |\cos 2t|$$

transladando inicialmente o eixo vertical para um ponto onde os resultados do Prob. 17.3(c) possam ser usados.

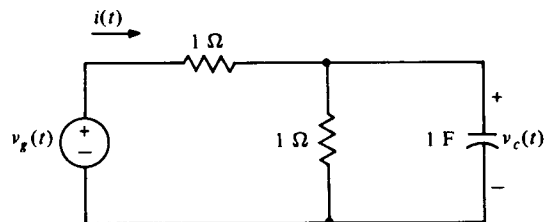
- 17.8 Obtenha as séries trigonométricas para  $f(t)$  definida por

$$f(t) = 1, \quad -1 < t < 1 \\ = 0, \quad 1 < |t| < 2$$

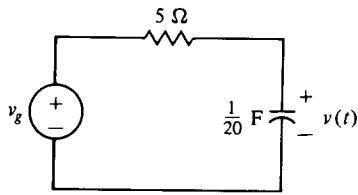
$$f(t + 4) = f(t)$$

- 17.9 Calcule os três primeiros termos da resposta forçada  $i(t)$ , se  $v_g(t)$  for a função do Prob. 17.8.

- 17.10 Calcule a resposta forçada  $v(t)$ , se  $v_g$  é a função do Ex. 17.2.3.



PROBLEMA 17.9



**PROBLEMA 17.10**

- 17.11 Calcule a resposta forçada  $i(t)$  no Prob. 17.9, se  $v_g(t)$  é a função do Prob. 17.1(c).
- 17.12 Calcule a resposta forçada  $v_2$  no circuito da Fig. 15.4, se  $v_1$  é a função do Prob. 17.2(c), com  $A = 4$  e  $T = 2$ .
- 17.13 Repita o Prob. 17.12, se  $v_1$  é a função do Ex. 17.2.3.
- 17.14 Dada a função

$$f(t) = e^t, \quad -\pi < t < \pi$$

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

mostre que sua série de Fourier é

$$f(t) = \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} (\cos nt - n \operatorname{sen} nt) \right]$$

- 17.15 Use o resultado do Prob. 17.14 para obter a soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{\pi \coth \pi - 1}{2}$$

*Sugestão:* Faça  $t = \pi$  e lembre-se que a série converge para  $1/2 [f(\pi^+) + f(\pi^-)]$ .

- 17.16 Calcule a série de Fourier de

$$f(t) = t^2, \quad -1 < t < 1$$

$$f(t + 2) = f(t)$$

e use os resultados em  $t = 0$  e  $t = 1$  para obter, respectivamente, as fórmulas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- 17.17 Multiplique as duas séries

$$f = A_{cc} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

e

$$g = B_{cc} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos(m\omega_0 t + \theta_m)$$

entre si e tome o valor médio do resultado, num período  $T$ , para obter

$$\frac{1}{T} \int_0^T fg \, dt = A_{cc} B_{cc} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n B_n}{2} \cos(\phi_n - \theta_n)$$

(Note que se  $f$  e  $g$  são  $v$  e  $i$ , respectivamente, de um elemento,

o termo à esquerda é a potência média entregue ao elemento.) Agora, faça  $g = f$  para obter a equação de Parseval.

$$F_{\text{(eficaz)}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) \, dt = A_{cc}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2}$$

que, se  $f$  é  $v$  ou  $i$  para um resistor de  $1-\Omega$ , é a potência entregue ao resistor.

- 17.18 Use a equação de Parseval (veja Prob. 17.17) para a série do Prob. 17.16, para estabelecer a fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

- 17.19 Calcule as respostas forçadas  $i(t)$  e  $v_c(t)$  e a potência entregue a cada um dos resistores de  $1-\Omega$  no circuito do Prob. 17.9, se  $v_g$  é a função do Ex. 17.1.1.
- 17.20 Calcule as séries exponenciais de Fourier para as funções

- (a)  $f(t) = e^{-t}, -1 < t < 1$   
 $f(t + 2) = f(t)$
- (b)  $f(t) = t, -1 < t < 1$   
 $= 2 - t, 1 < t < 3$   
 $f(t + 4) = f(t)$
- (c)  $f(t) = t, 0 < t < 1$   
 $f(t + 1) = f(t)$

- 17.21 Obtenha a série exponencial para a senóide retificada de onda completa do Ex. 17.2.3, a partir de sua série trigonométrica.

- 17.22 Obtenha a série trigonométrica de  $f(t)$  no Prob. 17.8, a partir da série exponencial dada no Ex. 17.4.1.

- 17.23 Calcule o espectro discreto de amplitude e fase da função do Prob. 17.1(a).

- 17.24 Calcule o espectro discreto de amplitude e fase da função de (a) Ex. 17.1.1, (b) Ex. 17.1.2, (c) Ex. 17.1.3 e (d) Ex. 17.1.4.

- 17.25 Se a série exponencial (17.34) de  $f(t)$  é a tensão sobre um resistor de  $1-\Omega$  ou a corrente que o percorre, então a potência instantânea é  $f^2(t)$ , e a potência média é

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) \, dt$$

Mostre que a potência média é também dada por

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

onde  $c_n$  é o coeficiente de Fourier exponencial. Este resultado é conhecido como equação de Parseval para a série exponencial. [*Sugestão:* escreva  $f^2(t)$  na forma

$$f^2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n c_m e^{jn\omega_0 t} e^{jm\omega_0 t}$$

e integre, observando que

$$\int_0^T e^{jn\omega_0 t} e^{jm\omega_0 t} \, dt = 0, \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

excluindo  $m = -n$ .]

- 17.26 Do Prob. 17.25, a grandeza  $|c_n|^2$  é a potência média associada com a frequência  $n\omega_0$ . O esboço de  $|c_n|^2$  versus frequência é um espectro de linha conhecido como espectro de potência discreto de  $f(t)$ . Plote esta função, nos casos do Prob. 17.20.

- 17.27 Calcule as transformadas de Fourier das seguintes funções:

- (a)  $f(t) = u(t) - u(t - 1)$ .
- (b)  $f(t) = e^{-at} \cos bt \, u(t), a > 0$ .
- (c)  $f(t) = e^{-at} [u(t) - u(t - 1)]$ .

**17.28** Calcule as transformadas de Fourier das seguintes funções:

- (a)  $f(t) = e^{at}u(-t)$ ,  $a > 0$ .  
 (b)  $f(t) = e^{-at} \sin bt u(t)$ ,  $a > 0$ .  
 (c)  $f(t) = e^{at} \sin bt u(-t)$ ,  $a > 0$ .  
 (d)  $f(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)$ ,  $a > 0$ .

**17.29** Use a propriedade da linearidade, (17.51), e o resultado do Prob. 17.28(a) para resolver o Prob. 17.28(d).

**17.30** Use as operações da Tabela 17.1 para calcular a transformada de Fourier das seguintes funções:

- (a)  $te^{-2t}u(t)$ , (b)  $te^{-2t} \cos t u(t)$ ,  
 (c)  $t^2e^{-2t}u(t)$ , (d)  $te^{2t}u(-t)$ ,  
 (e)  $e^{2t} \sin t u(-t)$ , (f)  $t^n e^{-2|t|}$ , para  $n = 1, 2$ .

**17.31** Use as operações 1 e 4 da Tabela 17.1 para calcular as transformadas de

- (a)  $e^{-2t} \sin 3t u(t)$ , e (b)  $e^{-2t} \cos 3t u(t)$ .

**17.32** Calcule a transformada de Fourier de (a)  $e^{-t}u(t-1)$  e (b)  $e^{-2t} \cos(\pi t/4)u(t-2)$ , usando a operação 3 da Tabela 17.1.

**17.33** Use as operações 1 e 3 da Tabela 17.1 para calcular a transformada de Fourier de

$$f(t) = 2, \quad -4 < t < -2 \quad \text{e} \quad 1 < t < 3$$

$$= 0, \quad \text{em qualquer outra parte}$$

**17.34** Calcule as transformadas de Fourier de

- (a)  $f(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$ .  
 (b)  $f(t) = \frac{1}{a + jt}$ ,  $a > 0$ .

$$(c) f(t) = \text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}$$

$$(d) f(t) = [\text{Sa}(t)]^2$$

**17.35** Calcule as transformadas inversas de (a)  $\mathbf{F}(j\omega)$ , (b)  $j\omega\mathbf{F}(j\omega)$ , e (c)  $e^{-2j\omega}\mathbf{F}(j\omega)$ , onde  $\mathbf{F}(j\omega) = e^{-a|\omega|}$ ,  $a > 0$ .

**17.36** Uma função  $f(t)$  tem transformada de Fourier dada por

$$\mathbf{F}(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{6 - \omega^2 + 5j\omega} = \frac{2}{j\omega + 3} - \frac{1}{j\omega + 2}$$

Sem determinar  $f(t)$ , obtenha as transformadas de (a)  $f(t-2)$ , (b)  $e^{-t}f(t)$ , (c)  $f(2t)$  e (d)  $f(-t)$ . Verifique os resultados determinando  $f(t)$  e computando as diversas transformadas.

**17.37** Calcule a antitransformada de (a)  $1/(j\omega - 1)$  e (b)  $1/(j\omega - 1)^2$ .

**17.38** Se a saída é  $i(t)$  e a entrada é  $v_g(t)$  no circuito do Prob. 17.9, calcule a função de rede.

**17.39** Se, no circuito do Prob. 17.9, a saída é  $v_o(t)$  e a entrada é  $v_g(t)$ , calcule (a) a função de rede  $\mathbf{H}(j\omega)$  e (b)  $v_o(t)$ , se  $v_o(0) = 0$  e  $v_g(t) = e^{-t}u(t)$  V. *Sugestão:* Observe que

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

**17.40** Calcule a resposta em amplitude e em fase de uma rede que tem entrada  $x(t)$  e saída  $y(t)$  relacionadas por

$$y'' + 5y' + 4y = 2x'$$

**17.41** Se um circuito inicialmente em repouso tem uma entrada  $x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$  e uma saída  $y = te^{-t}u(t)$ , calcule a função de rede  $\mathbf{H}(j\omega)$  e a equação diferencial representativa.

## PROBLEMAS DE APLICAÇÃO DE COMPUTADOR

**17.42** Usando SPICE, repita o Prob. 17.3, para as nove primeiras harmônicas, com  $T = 1$  s.

**17.43** Usando SPICE, repita o Prob. 17.4, para as nove primeiras harmônicas.

**17.44** Para a função  $f(t) = 10e^{-t}$ ,  $0 < t < 1$  s, use SPICE para calcular a série de Fourier para os nove primeiros harmônicos ( $T = 1$  s).

**17.45** Usando SPICE, repita o Prob. 17.9, se  $v_g(t)$  é a função do Prob. 17.44.



Pierre Simon Laplace  
1749-1827

## Transformadas de Laplace

---

*Não havia necessidade de Deus em minha hipótese [a Napoleão, que havia perguntado].*

*Pierre Simon Laplace*

---

Pierre Simon, marquês de Laplace, o famoso astrônomo e matemático francês, tem o crédito da transformada que leva seu nome e nos permite generalizar em maior profundidade o método fasorial, para analisar circuitos com entradas não-senoidais. Laplace ficou mais conhecido, contudo, pela *Celestial Mechanics*, sua obra máxima, que sumarizou os conhecimentos de astronomia desde o tempo de Newton.

Laplace nasceu em Beaumont-en-Auge, na Normandia, França. Pouco se sabe de sua infância, exceto que era filho de um fazendeiro, porque o pretencioso Laplace, após se tornar famoso, não gostava de mencionar sua origem humilde. Vizinhos ricos, ao que consta, reconheceram seu talento e financiaram sua educação, primeiramente em Caen e, mais tarde, na escola militar em Beaumont. Através dos esforços do famoso físico d'Alembert, que ficou impressionado com sua habilidade e audácia, Laplace tornou-se professor de matemática em Paris, com vinte anos de idade. Foi um oportunista, mudando sua lealdade política quando necessário, de forma que sua bem-sucedida carreira abrangeu três regimes na França revolucionária — a República, o Império de Napoleão e a Restauração dos Bourbons. Napoleão o fez conde e Luiz XVIII o fez marquês. Sua aptidão para a matemática, contudo, era genuína, inspirando o grande matemático Simeon Poisson a chamá-lo de o Isaac Newton da França. ■



Como vimos no capítulo anterior, a transformada de Fourier pode ser empregada para ampliar o conceito de funções de rede para casos onde a excitação não é senoidal. Pode também ser usada, em algumas aplicações, para calcular a resposta forçada de uma função de entrada que possui uma transformada de Fourier. Com a entrada das transformadas de Fourier em nosso arsenal, podemos acrescentar redes com certas excitações não-senoidais, não-periódicas, ao nosso conjunto de circuitos solucionáveis. Fizemos, desta forma, um considerável progresso, desde que resolvemos circuitos resistivos com excitações cc, no Capítulo 2. Ao longo do caminho, desenvolvemos técnicas com equações diferenciais para circuitos contendo elementos armazenadores de energia, técnicas fasoriais para excitações senoidais, fasores generalizados, para senóides amortecidas, métodos de séries trigonométricas e exponenciais de Fourier para excitações periódicas e transformadas de Fourier para certas excitações não-periódicas.

Restou o estudo, que será feito neste capítulo, de um procedimento extremamente elegante, o método da *transformada de Laplace*, que pode ser aplicado a uma gama maior de funções de excitação que o método da transformada de Fourier e que fornece de uma única vez tanto a resposta natural como a resposta forçada, para um dado conjunto de condições iniciais. Neste processo, vamos definir uma função especial e muito útil, conhecida como *função impulso*, e usar suas propriedades para obter soluções genéricas no domínio do tempo para alguns circuitos lineares cujas excitações possuem transformada de Laplace.

## 18.1

### Definição

A *transformada de Laplace*, assim chamada em honra ao astrônomo e matemático francês Pierre Simon, marquês de Laplace (1749-1827), é definida por

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathbf{F}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (18.1)$$

A função  $\mathbf{F}(s)$  é a transformada de Laplace de  $f(t)$  e é uma função da frequência generalizada,  $s = \sigma + j\omega$ , considerada anteriormente no Capítulo 14. Notamos que nossa definição é algumas vezes chamada transformada *unilateral*, para distingui-la da transformada *bilateral*. Esta última é definida por (18.1), com o limite inferior 0 trocado por  $-\infty$ . Contudo, não precisaremos desta generalização, visto que para os circuitos que estudamos, a função  $f(t)$  só tem interesse para  $t \geq 0$ . O comportamento do circuito para  $t < 0$  pertence ao passado, e é levado em consideração pelas condições iniciais.

Se  $f(t)$  tem uma descontinuidade infinita em  $t = 0$ , fica subentendido que o limite da integral da transformada de Laplace é  $0^-$ . Isso porque é desejável incluir os efeitos das funções de *impulso*, que têm descontinuidade infinita na origem, como iremos ver.

Comparando (18.1) com a definição de transformada de Fourier do capítulo anterior, vemos que

$$\mathcal{F}[e^{-\sigma t} f(t)u(t)] = \mathcal{L}[f(t)]$$

A presença dos fatores  $e^{-\sigma t}$  e  $u(t)$  responde pela grande versatilidade da transformada de Laplace. Por exemplo, a transformada de Fourier de uma função  $f(t)$  pode não existir porque a condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (18.2)$$

não se verifica. É possível, contudo, que para a mesma função  $f(t)$ , um valor de  $\sigma$  possa ser encontrado de forma que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\sigma t} f(t) u(t)| dt = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} |f(t)| dt < \infty \quad (18.3)$$

Como uma regra geral, se  $f(t) = 0$  para  $t < 0$  e  $\mathcal{F}[f(t)]$  existe, então o fator  $u(t)$  em (18.3) é redundante, e o fator  $e^{-\sigma t}$  não é necessário para a existência da integral. Neste caso, a transformada de Laplace, com  $s = j\omega$ , é a transformada de Fourier.

As funções típicas  $f(t)$  encontradas na teoria dos circuitos terão transformadas de Laplace, o que é o mesmo que dizer que a integral de (18.1) existirá. As condições matemáticas suficientes para sua existência são que  $f(t)$  seja *seccionalmente contínua* em cada intervalo finito de  $t \geq 0$  e que  $f(t)$  seja de *ordem exponencial*  $e^{\alpha t}$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . A primeira condição significa que cada intervalo de  $t \geq 0$  pode ser subdividido em um número finito de partes, em cada uma das quais  $f(t)$  é contínua com limites finitos, quando  $t$  tende a qualquer ponto extremo, partindo do interior. A segunda requer que constantes  $M$  e  $\alpha$  existam, tais que, para todo  $t$  suficientemente grande,

$$|f(t)| < M e^{\alpha t} \quad (18.4)$$

onde  $\text{Re } s = \sigma > \alpha$  assegura que (18.3) se verifica. Não vamos trabalhar mais estas duas condições, visto que a primeira é suficiente para que as integrais usuais existam, e a segunda é uma condição adicional para que a integral imprópria da transformada de Laplace seja convergente. Para que estas condições falhem, é necessário uma função não-usual, como  $e^{t^2}$ , pouco provável de ocorrer em análise de circuitos.

### EXEMPLO 18.1

Para ilustrar o cálculo de uma transformada de Laplace, vamos considerar

$$f(t) = e^{-at} u(t)$$

Por (18.1), a transformada é

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty} \end{aligned}$$

Se  $\text{Re } s = \sigma > -a$ , então o valor no limite superior é zero, e temos

$$\mathcal{L}[e^{-at} u(t)] = \frac{1}{s+a} \quad (18.5)$$

Em geral, definimos  $f(t)$  em (18.1) como a *antitransformada* (ou transformada inversa) de Laplace de  $\mathbf{F}(s)$ , simbolizada por

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{F}(s)] \quad (18.6)$$

A antitransformada pode ser expressa explicitamente como uma integral, como foi verdadeiro para a transformada de Fourier. Contudo, para nossos propósitos, preferimos obter a antitransformada por um procedimento mais simples, que iremos apresentar na Sec. 18.4.

### EXEMPLO 18.2

Como um exemplo, (18.5) pode ser escrita na forma

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at} u(t) \quad (18.7)$$

### EXEMPLO 18.3

Como outro exemplo, mais simples, porém muito útil, a transformada de Laplace da função degrau  $u(t)$  é dada por

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad (18.8)$$

com a condição de que  $\text{Re } s > 0$ . Uma declaração alternativa é, evidentemente,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = u(t)$$

Essa função ilustra mais ainda a versatilidade da transformada de Laplace. A função degrau não tem uma transformada de Fourier, visto que, para essa função, (18.2) não se verifica. (Ou seja, não há transformada de Fourier no sentido *convencional*. É possível, pelo uso de funções generalizadas, obter uma transformada de Fourier para a função degrau, expressa em termos de uma função *impulso*, a ser definida na Seç. 18.3. Contudo, não iremos estudar transformadas deste tipo aqui.)

Como mencionado anteriormente, a transformada de Laplace pode ser usada para levar em consideração as condições iniciais existentes no circuito. Para se obter algum conhecimento sobre como isso é obtido, vamos estudar a transformada da derivada  $f'(t)$ , dada, por (18.1) como

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt$$

Integrando por partes, temos

$$\mathcal{L}[f'(t)] = f(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Se  $f(t)$  e  $s$  são tais que a parte integrada desaparece no limite superior, como será normalmente o caso, então, em vista de (18.1), este resultado torna-se

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s\mathbf{F}(s) - f(0) \quad (18.9)$$

[Estamos considerando que  $f(t)$  seja uma função contínua no intervalo  $0 \leq t \leq \infty$ .] Desta forma, a condição inicial  $f(0)$  está automaticamente incluída na transformada da derivada. Esse não foi o caso para a transformada de Fourier.

## EXERCÍCIOS

- 18.1.1** Calcule a transformada de Laplace de (a)  $\text{sen } kt u(t)$ , (b)  $\text{cos } kt u(t)$  e (c)  $(1 + 3e^{-2t}) u(t)$ .

Resposta: (a)  $\frac{k}{s^2 + k^2}$ ; (b)  $\frac{s}{s^2 + k^2}$ ; (c)  $\frac{1}{s} + \frac{3}{s + 2}$

- 18.1.2** Calcule  $\mathcal{L}[\text{sen } t u(t)]$  usando (18.9) e o resultado do Ex. 18.1.1(b).

Resposta:  $\frac{1}{s^2 + 1}$

- 18.1.3** Use o método do Ex. 18.1.2 para calcular a transformada de Laplace da função rampa  $t u(t)$ .

Resposta:  $\frac{1}{s^2}$

## 18.2

### Alguns Resultados Especiais

Como no caso da transformada de Fourier, a transformada de Laplace é uma integral e é, portanto, uma operação linear. Desta forma, podemos dizer que

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathbf{F}_1(s) + c_2 \mathbf{F}_2(s) \quad (18.10)$$

onde  $F_1$  e  $F_2$  são as transformadas de Laplace de  $f_1$  e  $f_2$  e  $c_1$  e  $c_2$  são constantes. Desta forma, podemos obter uma série de transformadas a partir de duas conhecidas. Por exemplo, a função do Ex. 18.1.1.(c) pode ter sua transformada facilmente obtida escrevendo-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u(t) + 3e^{-2t}u(t)] &= \mathcal{L}[u(t)] + 3\mathcal{L}[e^{-2t}u(t)] \\ &= \frac{1}{s} + \frac{3}{s+2}\end{aligned}$$

#### EXEMPLO 18.4

Como outro exemplo, visto que temos

$$\mathcal{L}[e^{jkt}u(t)] = \frac{1}{s - jk}$$

e

$$\mathcal{L}[e^{-jkt}u(t)] = \frac{1}{s + jk}$$

podemos escrever, usando (18.10)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos kt u(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{jkt} + e^{-jkt}}{2} u(t)\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{jkt}u(t)] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-jkt}u(t)] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - jk} + \frac{1}{s + jk}\right] \\ &= \frac{s}{s^2 + k^2}\end{aligned}\tag{18.11}$$

De forma similar, podemos mostrar que

$$\mathcal{L}[\text{sen } kt u(t)] = \frac{k}{s^2 + k^2}\tag{18.12}$$

Estes dois resultados foram obtidos anteriormente no Ex. 18.1.1.

A antitransformada é também uma operação linear, o que pode ser visto escrevendo-se (18.10) na forma

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)]$$

(Em outras palavras, tomamos a antitransformada dos dois lados da equação.) Visto que  $f_1$  e  $f_2$  são antitransformadas de  $F_1$  e  $F_2$ , esse resultado pode ser escrito

$$\mathcal{L}^{-1}[c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)] = c_1 \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + c_2 \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]\tag{18.13}$$

que é uma operação linear.

#### EXEMPLO 18.5

A linearidade da antitransformada nos permite inverter uma série de transformadas. Por exemplo, suponha que desejamos calcular  $f(t)$ , se

$$F(s) = \frac{4}{s} - \frac{3}{s+2}\tag{18.14}$$

Podemos escrever, por (18.13),

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s} + \frac{-3}{s+2}\right]$$

$$= 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

De (18.8) e (18.7), com  $a = 2$ , temos

$$f(t) = (4 - 3e^{-2t})u(t) \quad (18.15)$$

O resultado pode ser resumido como

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+8}{s(s+2)}\right] = (4 - 3e^{-2t})u(t) \quad (18.16)$$

onde obtivemos um denominador comum em (18.14).

O exemplo precedente sugere um método geral de se calcular antitransformadas. Transformadas como (18.16) são expandidas em *frações parciais*, tais como em (18.14), cada fração é invertida e a antitransformada é a soma das frações invertidas. Vamos estudar o método das frações parciais na Seq. 18.4.

## Translação em Frequência

A seguir, vamos estudar dois resultados muito úteis de translação. No primeiro,  $s$  é substituído por  $s + a$  (translação em frequência) e no segundo,  $t$  é substituído por  $t - \tau$  (translação no tempo). Para se obter a primeira, vamos considerar a transformada

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-at}f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-at}f(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+at)} dt \end{aligned}$$

Comparando este resultado com (18.1), vemos que

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \mathbf{F}(s + a) \quad (18.17)$$

onde  $\mathbf{F}(s)$  é a transformada de  $f(t)$ .

### EXEMPLO 18.6

Como exemplo, vamos calcular a transformada de  $te^{-3t}u(t)$ . Fazemos  $f(t) = tu(t)$  de forma que  $\mathbf{F}(s) = 1/s^2$ , e, de (18.7), com  $a = 3$ , temos

$$\mathcal{L}[te^{-3t}u(t)] = \mathbf{F}(s + 3) = \frac{1}{(s + 3)^2}$$

Outros dois exemplos úteis são as transformadas das senóides amortecidas

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos bt u(t)] = \frac{s + a}{(s + a)^2 + b^2} \quad (18.18)$$

e

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sen bt u(t)] = \frac{b}{(s + a)^2 + b^2} \quad (18.19)$$

como o leitor pode verificar, usando (18.11) e (18.12). Deve ser notado que, visto que  $a$  e  $b$  são reais, os denominadores destas expressões são funções quadráticas irredutíveis.

### EXEMPLO 18.7

Para ilustrar estes dois últimos resultados, suponha que seja necessário calcular  $f(t)$ , dado que sua transformada é

$$\mathbf{F}(s) = \frac{6s}{s^2 + 2s + 5}$$

Podemos completar o quadrado do denominador, obtendo

$$\mathbf{F}(s) = \frac{6s}{(s+1)^2 + 2^2}$$

que pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \frac{6(s+1) - 6}{(s+1)^2 + 2^2} \\ &= 6 \left[ \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} \right] - 3 \left[ \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} \right] \end{aligned}$$

Finalmente, por (18.18) e (18.19), temos

$$f(t) = (6e^{-t} \cos 2t - 3e^{-t} \operatorname{sen} 2t)u(t) \quad (18.20)$$

## Translação no Tempo

Para obter o teorema da translação no tempo, vamos considerar a função  $f(t - \tau)u(t - \tau)$ , que é a função  $f(t)$  igualada a zero para  $t < 0$  e atrasada de  $\tau$  unidades, como indicado na Fig. 18.1. A transformada desta função é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t - \tau)u(t - \tau)] &= \int_0^\infty f(t - \tau)u(t - \tau)e^{-st} dt \\ &= \int_\tau^\infty f(t - \tau)e^{-st} dt \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável  $t = \tau + x$ , obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t - \tau)u(t - \tau)] &= \int_0^\infty f(x)e^{-s(\tau+x)} dx \\ &= e^{-s\tau} \int_0^\infty f(x)e^{-sx} dx \end{aligned}$$

ou o teorema da translação no tempo,

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)u(t - \tau)] = e^{-s\tau} \mathbf{F}(s) \quad (18.21)$$

onde, novamente,  $\mathbf{F}(s)$  é a transformada de  $f(t)$ . Comparando este resultado com o teorema da translação em frequência (18.17), vemos que, no último caso, translação no domínio da frequência (trocando  $s$  por  $s + a$ ) corresponde à multiplicação por uma exponencial no domínio do tempo, ao passo que, em (18.21), translação no domínio do tempo corresponde à multiplicação por uma exponencial no domínio da frequência.

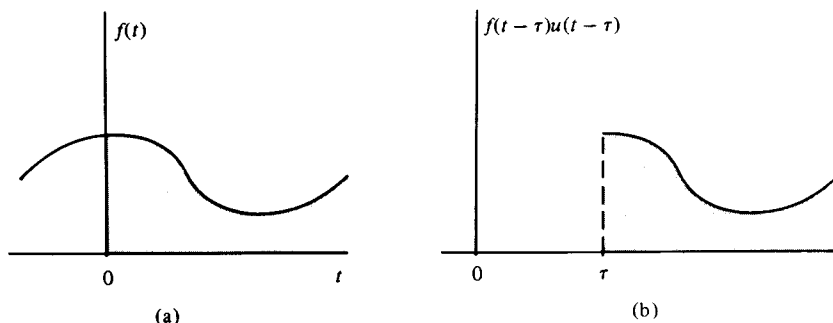


FIGURA 18.1 (a) Função  $f(t)$ ; (b)  $f(t)$  igualada a zero para  $t < 0$  e translada  $\tau$  unidades para a direita

**EXEMPLO 18.8**

Para ilustrar o resultado da translação no tempo, vamos calcular a transformada de  $f(t) = e^{-3t}u(t - 2)$ , que escrevemos na forma

$$\begin{aligned} e^{-3t}u(t - 2) &= e^{-3(t-2)-6}u(t - 2) \\ &= e^{-6}e^{-3(t-2)}u(t - 2) \end{aligned}$$

Visto que  $\mathcal{L}[e^{3t}u(t)] = \mathbf{F}(s) = 1/(s + 3)$ , temos, por (18.21),

$$\mathcal{L}[e^{-3t}u(t - 2)] = e^{-6} \left( \frac{e^{-2s}}{s + 3} \right)$$

**Convolução**

Devido à linearidade, a transformada de uma soma é a soma das transformadas. Outra combinação que ocorre freqüentemente na teoria dos circuitos, assim como na teoria de sistemas gerais, é o produto de duas transformadas

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{F}(s)\mathbf{G}(s)$$

e é extremamente importante dispor-se de um método geral de se obter a antitransformada

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{F}(s)\mathbf{G}(s)]$$

em termos de  $f(t)$  e  $g(t)$ , as antitransformadas de  $\mathbf{F}(s)$  e  $\mathbf{G}(s)$ . Isso pode ser feito genericamente, como será estudado nesta seção, e o valor resultante,  $y(t)$ , é chamado de *convolução* de  $f(t)$  e  $g(t)$ .

Começamos com a definição

$$\mathbf{F}(s) = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau$$

que, quando multiplicada por  $\mathbf{G}(s)$ , resulta em

$$\mathbf{F}(s)\mathbf{G}(s) = \int_0^{\infty} f(\tau)[\mathbf{G}(s)e^{-s\tau}] d\tau$$

Por (18.21), resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s)\mathbf{G}(s) &= \int_0^{\infty} f(\tau)\mathcal{L}[g(t - \tau)u(t - \tau)] d\tau \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau) \left[ \int_0^{\infty} g(t - \tau)u(t - \tau)e^{-st} dt \right] d\tau \end{aligned}$$

Trocando a ordem de integração e observando que  $u(t - \tau) = 0$ , para  $\tau > t$ , temos

$$\mathbf{F}(s)\mathbf{G}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[ \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \right] dt$$

Mas, pela definição de transformada, isso é

$$\mathbf{F}(s)\mathbf{G}(s) = \mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \right]$$

Desta forma, a função  $y(t)$  é dada por

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{F}(s)\mathbf{G}(s)] = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \quad (18.22)$$

Este resultado é conhecido como o *teorema da convolução*, e a integral envolvida é a convolução de  $f$  e  $g$ , simbolizada por

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \quad (18.23)$$

A ordem das funções  $f$  e  $g$  não é importante, como o leitor é solicitado a demonstrar no Prob. 18.12.

### EXEMPLO 18.9

Como exemplo, vamos calcular a convolução de  $e^{-t}$  e  $e^{-2t}$ . Por (18.23), temos

$$\begin{aligned} e^{-t} * e^{-2t} &= \int_0^t e^{-\tau} e^{-2(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{-2t} \int_0^t e^{\tau} d\tau \\ &= e^{-t} - e^{-2t} \end{aligned}$$

### EXEMPLO 18.10

Como outro exemplo, façamos  $g(t) = u(t)$  em (18.22). Então  $G(s) = 1/s$  e, no intervalo  $0 < \tau < t$ ,  $g(t - \tau) = 1$ , de forma que (18.22) torna-se

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\mathbf{F}(s)}{s} \right] = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

ou

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{\mathbf{F}(s)}{s} \quad (18.24)$$

Desta forma, a transformada de uma integral desse tipo é a transformada do seu integrando, dividida por  $s$ . Isto contrasta com a transformada de uma derivada, que, recordamos, envolve a transformada da função multiplicada por  $s$ .

### EXEMPLO 18.11

Como último exemplo, vamos usar transformadas de Laplace para calcular a corrente  $i(t)$ , para  $t > 0$ , na Fig. 18.2, se  $v(0) = 2$  V. A equação de laço é

$$4i(t) + 8 \int_0^t i(\tau) d\tau + 2 = 14$$

ou

$$i(t) + 2 \int_0^t i(\tau) d\tau = 3$$

Transformando, temos

$$\mathbf{I}(s) + \frac{2}{s} \mathbf{I}(s) = \frac{3}{s}$$

onde  $\mathbf{I}(s)$  é a transformada de  $i(t)$ . [Chamamos a atenção que estamos tratando 3 como  $3u(t)$ , visto que  $t > 0$ .] Resolvendo a transformada, temos

$$\mathbf{I}(s) = \frac{3/s}{1 + (2/s)} = \frac{3}{s + 2}$$

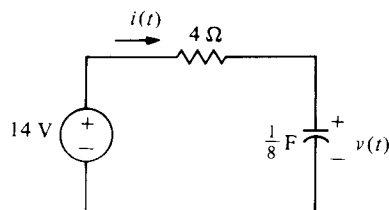


FIGURA 18.2 Circuito RC



que dá, para  $t > 0$ ,

$$i(t) = 3e^{-2t} \quad A$$

## EXERCÍCIOS

**18.2.1** Calcule a transformada de Laplace de (a)  $(2 + 3e^{-t})u(t)$ , (b)  $(3t - 5e^{6t})u(t)$ , e (c)  $\cosh kt u(t)$ .

Resposta: (a)  $\frac{2}{s} + \frac{3}{s+1}$ ; (b)  $\frac{3}{s^2} - \frac{5}{s-6}$ ; (c)  $\frac{s}{s^2 - k^2}$

**18.2.2** Calcule a antitransformada de (a)  $\frac{6}{s^2} - \frac{5s}{s^2 + 4}$ , (b)  $\frac{3s + 4}{s^2 + 16}$ , e (c)  $\frac{s + 4}{s(s + 2)} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s + 2}$ .

Resposta: (a)  $(6t - 5 \cos 2t)u(t)$ ; (b)  $(3 \cos 4t + \sin 4t)u(t)$ ; (c)  $(2 - e^{-2t})u(t)$

**18.2.3** Calcule a transformada de Laplace de (a)  $te^{-2t}u(t)$ , (b)  $u(t - 3)$ , e (c)  $f(t) = 1, 0 < t < 2$ , e  $f(t) = 0$ , em qualquer outra parte.

Resposta: (a)  $\frac{1}{(s + 2)^2}$ ; (b)  $\frac{e^{-3s}}{s}$ ; (c)  $\frac{1}{s}(1 - e^{-2s})$

**18.2.4** Calcule a antitransformada de (a)  $\frac{e^{-2s}}{s + 3}$ , (b)  $\frac{s + 1}{s^2} e^{-s}$ , e (c)  $\frac{2s}{s^2 + 2s + 5}$ .

Resposta: (a)  $e^{-3(t-2)}u(t - 2)$ ; (b)  $tu(t - 1)$ ; (c)  $(2 \cos 2t - \sin 2t)e^{-t}u(t)$

**18.2.5** Calcule  $\mathcal{L}^{-1} [1/(s^2 + 1)^2]$ . [Sugestão: Use a integral de convolução, onde  $\mathbf{F}(s) = \mathbf{G}(s) = 1/(s^2 + 1)$ .]

Resposta:  $\frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)u(t)$

**18.2.6** Resolva  $y(t)$ , para  $t > 0$ :

$$y(t) = 1 + \int_0^t 2y(t - \tau)e^{-2\tau} d\tau$$

[Sugestão: A integral é a convolução de  $2y(t)$  e  $e^{-2t}$ .]

Resposta:  $1 + 2t$

## 18.3

### A Função Impulso

Até este ponto, obtivemos um conjunto de transformadas de Laplace, variando em complexidade de  $1/s$ , a transformada de um degrau unitário, a algumas funções bastante complexas, que resultam dos teoremas de translação e de convolução. O leitor pode ter notado, contudo, que uma transformada extremamente simples,  $\mathbf{F}(s) = 1$ , ficou faltando. Nesta seção, vamos calcular essa transformada, e vamos ver a seguir que sua função correspondente no domínio do tempo é uma das mais usuais funções em teoria dos circuitos e de sistemas.

A função cuja transformada é 1 é chamada de *função impulso* e é representada por  $\delta(t)$ . Ou seja,

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (18.25)$$

A função impulso não é uma função no sentido convencional e, na verdade, foi denominada originalmente de “função imprópria” pelo grande físico inglês Paul A. M. Dirac (1902- ), que é conhecido por sua previsão da existência do elétron positivo, ou pósitron, mas que foi também um pioneiro no desenvolvimento da função impulso. A função impulso pode ser definida e suas propriedades estabelecidas rigorosamente pelo emprego da teoria das funções generalizadas ou distribuídas. Daremos um argumento plausível para sua existência e vamos usá-la com bom êxito, como uma função comum.

**EXEMPLO 18.12**

Vamos começar considerando o pulso finito da Fig. 18.3, centrado com relação à origem, de largura  $a$  e altura  $1/a$ , definido por

$$f(t) = \frac{1}{a}, \quad -\frac{a}{2} < t < \frac{a}{2}$$

$$= 0 \quad \text{em qualquer outra parte}$$

A área sob o pulso é 1 e permanece fixa, independentemente do valor de  $a$ . Se  $a$  é reduzido, então a base do pulso se reduz e sua altura aumenta, mantendo a área constante e igual a 1. No limite, quando  $a$  tende a zero, o pulso tende a um pulso infinito, ocorrendo num tempo nulo mas ainda associado a uma área unitária. Essa é a função impulso, algumas vezes chamada de função impulso *unitário*, para indicar sua relação com a área unitária. Graficamente, é representada por uma seta em  $t = 0$ , como indicado na Fig. 18.4(a). Uma função mais genérica é  $\delta(t - \tau)$ , que é um impulso ocorrendo em  $t = \tau$ , como indicado na Fig. 18.4(b).

Na Fig. 18.4, as funções impulso são de *intensidade* 1 por causa de sua associação com a área de 1, na Fig. 18.3. Um impulso de intensidade  $k$  é representado por  $k\delta(t)$  e é representado por uma seta, como indicado na Fig. 18.4(a), marcada com  $(k)$ .

Matematicamente, a função impulso é definida por

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

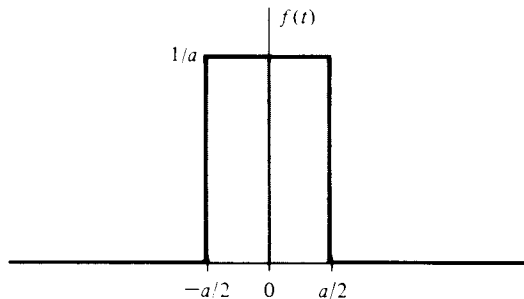
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (18.26)$$

ou, de forma mais geral, por

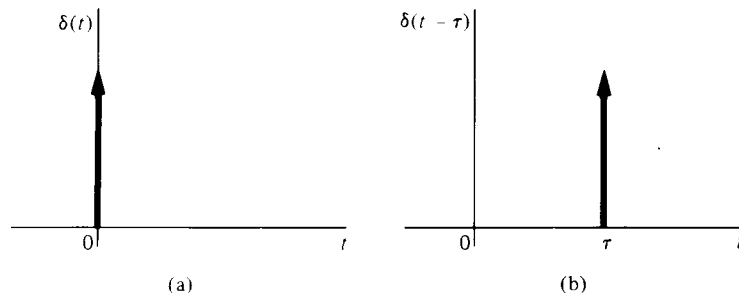
$$\delta(t - \tau) = 0, \quad t \neq \tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1 \quad (18.27)$$

Desta forma, o impulso é zero em qualquer parte, exceto no seu ponto de descontinuidade, onde ele tem uma área concentrada de 1. Fisicamente, o impulso descreve muito bem uma força de grande intensidade



**FIGURA 18.3** Pulso finito



**FIGURA 18.4** Impulsos (a)  $\delta(t)$  e (b)  $\delta(t - \tau)$

exercida num tempo extremamente curto, como a de um martelo que bate numa massa presa a uma mola, colocando-a em movimento.

Uma propriedade importante associada com a função impulso é a propriedade da *amostragem*, ou *separação*, descrita por

$$\int_a^b f(t)\delta(t - \tau) dt = f(\tau) \quad (18.28)$$

onde  $a < \tau < b$ , e  $f(t)$  é contínua em  $t = \tau$ . Essa propriedade pode ser tornada plausível notando-se que, visto que  $\delta(t - \tau)$  é zero, exceto em  $t = \tau$ , podemos escrever

$$\int_a^b f(t)\delta(t - \tau) dt = \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} f(t)\delta(t - \tau) dt$$

Desta forma, se  $\epsilon$  é suficientemente pequeno, visto que  $f(t)$  é contínua em  $\tau$ , então  $f(t)$  é aproximadamente  $f(\tau)$  entre  $\tau - \epsilon$  e  $\tau + \epsilon$ . Desta forma, podemos retirar o fator  $f(\tau)$  para fora da integral e, pela natureza da função impulso, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\delta(t - \tau) dt &= f(\tau) \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \delta(t - \tau) dt \\ &= f(\tau) \end{aligned}$$

A propriedade da amostragem é muito útil para cálculo da transformada de Laplace da função impulso, dada por

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \delta(t) dt$$

(Lembrar que no caso de uma descontinuidade infinita no integrando em 0, estamos usando  $0^-$  como limite inferior.) Pela propriedade de amostragem, com  $\tau = 0$ , temos

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1 \quad (18.29)$$

que é (18.25). O impulso fora da origem tem a transformada mais geral,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta(t - \tau)] &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \delta(t - \tau) dt \\ &= e^{-s\tau} \end{aligned}$$

que se reduz a 1 para  $\tau = 0$

**EXEMPLO 18.13** Para ilustrar como uma função impulso pode surgir, vamos inverter a transformada

$$\mathbf{F}(s) = \frac{s}{s + 2}$$

Essa é uma fração imprópria (o numerador é de mesma ordem que o denominador), que não foi ainda estudada. Contudo, por divisão, essa fração pode ser escrita como

$$\mathbf{F}(s) = 1 - \frac{2}{s + 2}$$

e, por linearidade, sua inversa é

$$f(t) = \delta(t) - 2e^{-2t}u(t)$$

Neste ponto, vamos relacionar a função impulso a outra função bem conhecida, lembrando a expressão da transformada de uma derivada,

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathbf{F}(s) - f(0^-) \quad (18.30)$$

onde 0 foi substituído por  $0^-$ , no caso de descontinuidade em  $t = 0$ . Se fizermos  $f(t) = u(t)$ , essa relação torna-se

$$\mathcal{L}[u'(t)] = s\left(\frac{1}{s}\right) - 0 = 1$$

Desta forma, podemos concluir que

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \quad (18.31)$$

visto que eles têm a mesma transformada. Infelizmente, esse não é um resultado rigorosamente matemático, considerando  $u(t)$  e  $\delta(t)$  como funções convencionais. Contudo, (18.31) pode ser deduzido com o uso da teoria de funções distribuídas e é uma boa e prática ferramenta usada intensamente em teoria de sistemas e de circuitos. Um argumento plausível para sua validade é dado no Ex. 18.3.2.

Outro resultado útil, no que diz respeito à função impulso, é

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \quad (18.32)$$

onde  $f(t)$  é contínua em  $t = 0$ . Isso é plausível, visto que  $\delta(t) = 0$ , para  $t \neq 0$ . Aparece, por exemplo, quando diferenciamos funções que contêm  $u(t)$  como um fator, usando a regra de diferenciação de um produto.

## EXERCÍCIOS

**18.3.1** Calcule a integral

$$\int_a^3 (t^2 + 3 \cos 2t)\delta(t) dt$$

onde (a)  $a = -1$  e (b)  $a = 1$ .

Resposta: (a) 3; (b) 0

**18.3.2** Mostre que o pulso da Fig. 18.3 é dado por

$$f(t) = \frac{u[t + (a/2)] - u[t - (a/2)]}{a}$$

de forma que

$$\lim_{a \rightarrow 0} f(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Esse é um argumento plausível para calcular-se

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

**18.3.3** Use o resultado do Ex. 18.3.2 para obter formalmente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[f(t)u(t)] &= f'(t)u(t) + f(t)\delta(t) \\ &= f'(t)u(t) + f(0)\delta(t) \end{aligned}$$

[Se  $f(0) = 0$ , esse resultado torna-se

$$\frac{d}{dt}f(t)u(t) = f'(t)u(t)]$$

**18.3.4** Use o resultado do Ex. 18.3.3 e (18.9), que, por causa da descontinuidade, escrevemos como

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0^-)$$

para deduzir  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ , onde  $f(t) = e^{-at} u(t)$ .

## 18.4

### A Antitransformada

Das primeiras seções deste capítulo fica claro que podemos compilar uma grande tabela de funções e suas transformadas de Laplace aplicando-se repetidamente a definição de transformada e os teoremas. Podemos então obter uma grande variedade de antitransformadas olhando inversamente na tabela. Isso será nosso objetivo nesta seção, e, com esse propósito, usaremos a Tabela 18.1, que contém a maioria das funções usuais  $f(t)$  e suas transformadas  $F(s)$ , que deduzimos anteriormente. (A linha 10 será deduzida mais tarde, no Prob. 18.6.) Para referência rápida, uma tabela mais completa de transformadas está dada nas últimas folhas do livro.

Visto que estamos interessados apenas em funções definidas para  $t > 0$ , vamos omitir o fator  $u(t)$ , exceto onde for necessário, como na fórmula de translação no tempo (18.21). Mantivemos  $u(t)$  na linha 2 da Tabela 18.1, que, para  $t > 0$ , será usada como

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

Omitimos o fator  $u(t)$  nas demais linhas da tabela.

**TABELA 18.1** Pequena Tabela de Transformadas de Laplace

$f(t)$	$F(s)$
1. $\delta(t)$	1
2. $u(t)$	$\frac{1}{s}$
3. $e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
4. $\text{sen } kt$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$
5. $\text{cos } kt$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$
6. $e^{-at} \text{sen } bt$	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$
7. $e^{-at} \text{cos } bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$
8. $t$	$\frac{1}{s^2}$
9. $te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
10. $\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s+a)^n}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$

**EXEMPLO 18.14** Para ilustrar o uso da tabela, suponhamos que nos é solicitado calcular a antitransformada

$$F(s) = \frac{6}{s+4} + \frac{2}{s^2+9} - \frac{3}{s}$$

Visto que a antitransformada é uma operação linear, temos

$$f(t) = 6\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right] + \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+3^2}\right] - 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$$

que, pelas linhas 3, 4 e 2 da tabela, resulta

$$f(t) = 6e^{-4t} + \frac{2}{3}\sin 3t - 3$$

**EXEMPLO 18.15** Como outro exemplo, vamos calcular a antitransformada de

$$\mathbf{F}(s) = \frac{2(s+10)}{(s+1)(s+4)}$$

Não existe entrada direta na Tabela 18.1 que possa ser usada para obter  $f(t)$  neste caso; contudo, podemos aplicar o *método das frações parciais* a  $\mathbf{F}(s)$  e aplicar a tabela a cada termo da expansão.

Obter uma expansão em frações parciais é a operação oposta de se obter um denominador comum. Ou seja, nos perguntamos que frações simples se somam para dar  $\mathbf{F}(s)$ . Visto que nesse caso a transformada é uma fração própria (o numerador é de menor grau que o denominador), as frações parciais serão frações próprias e devem, portanto, ser da forma

$$\mathbf{F}(s) = \frac{2(s+10)}{(s+1)(s+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+4}$$

As constantes  $A$  e  $B$  são determinadas de forma a fazer do segundo e do terceiro membros uma identidade em  $s$ .

O modo mais simples de se obter  $A$  e  $B$  é observar que

$$(s+1)\mathbf{F}(s) = \frac{2(s+10)}{s+4} = A + \frac{B(s+1)}{s+4}$$

e

$$(s+4)\mathbf{F}(s) = \frac{2(s+10)}{s+1} = \frac{A(s+4)}{s+1} + B$$

Visto que estas expressões devem ser identidades para todos os valores de  $s$ , vamos avaliar o primeiro em  $s = -1$ , que elimina  $B$ , e o segundo em  $s = -4$ , que elimina  $A$ . Os resultados são

$$A = (s+1)\mathbf{F}(s) \Big|_{s=-1} = \frac{2(9)}{3} = 6$$

$$B = (s+4)\mathbf{F}(s) \Big|_{s=-4} = \frac{2(6)}{-3} = -4$$

Portanto, temos

$$\mathbf{F}(s) = \frac{6}{s+1} - \frac{4}{s+4}$$

e, pela Tabela 18.1,

$$f(t) = 6e^{-t} - 4e^{-4t}$$

O exemplo precedente, como o leitor pode se lembrar do método das frações parciais em cálculo, é o caso relativamente simples de fatores lineares distintos, como  $s - p$  no denominador de  $\mathbf{F}(s)$ . O pólo  $s = p$  é, neste caso, um pólo *simples*, ou um pólo de primeira *ordem*, e, em geral, para cada um de tais pólos, a expansão em frações parciais contém um termo  $A/(s - p)$ . No caso de um fator no denominador  $(s - p)^n$ , onde  $n = 2, 3, 4, \dots$ , o pólo  $s = p$  é um pólo *múltiplo*, ou um pólo de ordem  $n$ . Os fatores contendo  $(s - p)^n$  são, então, não-distintos e a expansão em frações parciais, evidentemente, deve ser modificada. Vamos estudar os pólos múltiplos mais tarde.

Pólos complexos ocorrem em pares conjugados e seus coeficientes correspondentes na expansão são conjugados complexos. Por exemplo, se  $\mathbf{F}(s)$  tem pólos simples,  $s = \alpha \pm j\beta$ , e uma expansão

$$F(s) = \frac{A}{s - \alpha - j\beta} + \frac{B}{s - \alpha + j\beta}$$

então

$$A = (s - \alpha - j\beta)F(s) \Big|_{s=\alpha+j\beta}$$

e

$$B = (s - \alpha + j\beta)F(s) \Big|_{s=\alpha-j\beta}$$

Desta expressão, vemos que  $B = A^*$ , porque  $F(s)$  é uma divisão de polinomiais em  $s$  com coeficientes reais. A antitransformada é

$$f(t) = Ae^{(\alpha+j\beta)t} + A^*e^{(\alpha-j\beta)t}$$

que é a soma de um número complexo e seu conjugado. Portanto,

$$f(t) = 2 \operatorname{Re}[Ae^{(\alpha-j\beta)t}]$$

Se  $A = |A| e^{j\theta}$ , então temos

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \operatorname{Re}[|A| e^{\alpha t} e^{j(\beta t + \theta)}] \\ &= 2|A| e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta) \end{aligned}$$

**EXEMPLO 18.16** Como um exemplo, a transformada

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+2s+2)} \quad (18.33)$$

tem expansão em frações parciais

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s}{(s+1)(s+1-j1)(s+1+j1)} \\ &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+1-j1} + \frac{B^*}{s+1+j1} \end{aligned}$$

onde

$$A = \frac{s}{s^2+2s+2} \Big|_{s=-1} = -1$$

e

$$B = \frac{s}{(s+1)(s+1+j1)} \Big|_{s=-1+j1} = \frac{1-j1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ$$

Desta forma, temos

$$\begin{aligned} f(t) &= Ae^{-t} + 2 \operatorname{Re}[Be^{(-1+j1)t}] \\ &= -e^{-t} + 2 \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \angle 1t - 45^\circ\right] \\ &= -e^{-t} + \sqrt{2} e^{-t} \cos(t - 45^\circ) \end{aligned}$$

Uma forma alternativa é

$$\begin{aligned} f(t) &= -e^{-t} + \sqrt{2} e^{-t} (\cos t \cos 45^\circ + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 45^\circ) \\ &= -e^{-t} + e^{-t} (\cos t + \operatorname{sen} t) \end{aligned} \quad (18.34)$$

**EXEMPLO 18.17** Se é desejável manter o fator quadrático intacto, a expansão de (18.33) é

$$\mathbf{F}(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+2} \quad (18.35)$$

onde  $Cs + D$  é o numerador mais geral para o termo quadrático. Como antes,  $A = -1$  e, para calcular  $C$  e  $D$ , eliminamos as frações de (18.35), obtendo

$$s = -(s^2 + 2s + 2) + (Cs + D)(s + 1)$$

que é uma identidade em  $s$ . Igualando os coeficientes em  $s^2$ , temos

$$0 = -1 + C$$

donde  $C = 1$ . Igualando os coeficientes em  $s^0$ , temos

$$0 = -2 + D$$

ou  $D = 2$ . A transformada é, portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \frac{-1}{s+1} + \frac{s+2}{s^2+2s+2} \\ &= \frac{-1}{s+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1} \end{aligned}$$

A antitransformada é a função de (18.34).

Pólos múltiplos de fatores no denominador  $(s+a)^n$  necessitam uma expansão em frações parciais

$$\mathbf{F}(s) = \frac{A_n}{(s+a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(s+a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_k}{(s+a)^k} + \cdots + \frac{A_1}{s+a} + \mathbf{F}_1(s) \quad (18.36)$$

onde  $\mathbf{F}_1(s)$  corresponde aos demais pólos de  $\mathbf{F}(s)$ .

**EXEMPLO 18.18** Por exemplo,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \frac{4}{(s+1)^2(s+2)} \\ &= \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} \end{aligned} \quad (18.37)$$

Os coeficientes  $A$  e  $C$  podem ser obtidos facilmente, como

$$A = (s+1)^2 \mathbf{F}(s) \Big|_{s=-1} = \frac{4}{s+2} \Big|_{s=-1} = 4$$

e

$$C = (s+2) \mathbf{F}(s) \Big|_{s=-2} = \frac{4}{(s+1)^2} \Big|_{s=-2} = 4$$

Desta forma,  $C$  é obtido como antes, e  $A$ , o coeficiente correspondente ao mais alto grau do fator linear repetido, pode ser calculado de forma idêntica. Para se obter  $B$ , devemos eliminar as frações de (18.37), obtendo

$$4 = 4(s+2) + B(s+1)(s+2) + 4(s+1)^2$$

Igualando os coeficientes em  $s^2$ , obtemos

$$0 = B + 4$$



de forma que  $B = -4$ .

A transformada de (18.37) é, portanto,

$$F(s) = \frac{4}{(s+1)^2} - \frac{4}{s+1} + \frac{4}{s+2}$$

de forma que

$$f(t) = 4te^{-t} - 4e^{-t} + 4e^{-2t}$$

O primeiro termo à direita é obtido usando a linha 9 da Tabela 18.1.

### EXEMPLO 18.19

Como último exemplo, vamos calcular a antitransformada de

$$F(s) = \frac{9s^3}{(s+1)(s^2+2s+10)}$$

Notamos que o grau do numerador é o mesmo do denominador, de forma que é necessário primeiro fazer sua divisão. Não é necessário efetuar realmente a divisão, visto que é evidente que vamos obter 9 mais uma fração própria. Portanto, vamos escrever

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{9s^3}{(s+1)(s^2+2s+10)} \\ &= 9 + \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+10} \end{aligned}$$

Calculamos  $A$  como antes, de

$$A = (s+1)F(s) \Big|_{s=-1} = \frac{-9}{1-2+10} = -1$$

$B$  e  $C$  são obtidos na forma usual e a transformada resulta sendo

$$F(s) = 9 - \frac{1}{s+1} - \frac{26s+80}{s^2+2s+10}$$

que pode ser reescrita como

$$F(s) = 9 - \frac{1}{s+1} - 26 \left[ \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} \right] - 18 \left[ \frac{3}{(s+1)^2+3^2} \right]$$

Portanto, por meio da Tabela 18.1, temos

$$f(t) = 9\delta(t) - e^{-t}(1 + 26 \cos 3t + 18 \operatorname{sen} 3t)$$

## EXERCÍCIOS

18.4.1 Calcule a antitransformada de

(a)  $\frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ ,

(b)  $\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}$ ,

(c)  $\frac{s^4 + 5s^3 + 21s^2 + 47s + 78}{(s^2+9)(s^2+2s+5)}$ , e

(d)  $\frac{2s^3 + 2s^2 - 4s + 8}{s^2(s^2+4)}$ .

Resposta: (a)  $e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t}$ ; (b)  $\frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$ ;  
 (c)  $\delta(t) + \cos 3t + \sin 3t + 2e^{-t} \cos 2t$ ;  
 (d)  $2t - 1 + 3 \cos 2t$

18.4.2 Dada a transformada

$$F(s) = \frac{3s^2 + 8s + 8}{(s + 1)^2(s + 2)}$$

calcule  $f(t)$ .

Resposta:  $3te^{-t} - e^{-t} + 4e^{-2t}$

18.4.3 Calcule a antitransformada de

$$F(s) = \frac{2s^2 + s + 2}{s(s^2 + 1)^2}$$

[Sugestão: Escreva  $s^2 + 1 = (s + j)(s - j)$ .]

Resposta:  $2 - 2 \cos t + 1/2 (\sin t - t \cos t)$

## 18.5

### Aplicações a Equações com Integrais e Derivadas

A transformada de Laplace, como a transformada de Fourier, pode ser usada para resolver equações diferenciais. Contudo, o método da transformada de Laplace tem a vantagem de dar a solução completa, com as condições iniciais consideradas automaticamente, como veremos nesta seção. Esse uso da transformada de Laplace é uma de suas aplicações mais elegantes.

Na Seção 18.1, deduzimos a transformada de uma derivada, que repetimos como

$$\mathcal{F}[f'(t)] = sF(s) - f(0) \quad (18.38)$$

Se substituirmos formalmente  $f$  por  $f'$ , temos

$$\mathcal{F}[f''(t)] = s\mathcal{F}[f'(t)] - f'(0)$$

ou, por (18.38),

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (18.39)$$

Podemos substituir  $f$  por  $f'$  novamente em (18.39), para obter  $\mathcal{L}[f'''(t)]$ , e assim por diante, com o resultado geral sendo

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (18.40)$$

onde  $f^{(n)}$  é a derivada de ordem  $n$ . As funções  $f, f', \dots, f^{(n-1)}$  são supostas como sendo contínuas em  $(0, \infty)$ , e  $f^{(n)}$  é contínua, exceto por um possível número finito de descontinuidades finitas.

#### EXEMPLO 18.20

Como um exemplo, se em (18.40) fazemos  $f(t) = t^n$ , para  $n$  inteiro não-negativo, então  $f^{(n)}(t) = n!$  e  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ . Portanto, temos

$$\mathcal{L}[n!] = s^n \mathcal{L}[t^n]$$

ou

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{1}{s^n} \mathcal{L}[n!] = \frac{n!}{s^{n+1}}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (18.41)$$

Evidentemente, se transformarmos os dois membros de uma equação diferencial linear com coeficientes constantes, o resultado será uma equação algébrica na variável transformada. Isso pode ser visto da fórmula geral (18.40) para a transformada de derivadas. Essa fórmula também mostra que as condições iniciais

são automaticamente consideradas. Podemos, então, resolver para a transformada da incógnita e invertê-la para obter a resposta no domínio do tempo.

### EXEMPLO 18.21

Como um exemplo, vamos calcular a solução  $x(t)$ , para  $t > 0$ , do sistema de equações

$$\begin{aligned}x'' + 4x' + 3x &= e^{-2t} \\ x(0) &= 1, \quad x'(0) = 2\end{aligned}$$

Transformando, temos

$$s^2 \mathbf{X}(s) - s - 2 + 4[s\mathbf{X}(s) - 1] + 3\mathbf{X}(s) = \frac{1}{s + 2}$$

do qual

$$\mathbf{X}(s) = \frac{s^2 + 8s + 13}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

A expansão em frações parciais é

$$\mathbf{X}(s) = \frac{3}{s + 1} - \frac{1}{s + 2} - \frac{1}{s + 3}$$

de forma que a resposta no domínio do tempo, para  $t > 0$ , é

$$x(t) = 3e^{-t} - e^{-2t} - e^{-3t}$$

Como vimos também, podemos lidar com certas equações com integrais e derivadas diretamente, sem diferenciar para eliminar as integrais. Precisamos apenas transformar as integrais por meio de

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{\mathbf{F}(s)}{s}$$

### EXEMPLO 18.22

Vamos ilustrar uma equação com integrais e derivadas com o circuito da Fig. 18.5, onde vamos calcular a corrente  $i(t)$ , se não há energia inicial armazenada. As equações são

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} + 2i + 5 \int_0^t i dt &= u(t) \\ i(0) &= 0\end{aligned}$$

Transformando, obtemos

$$s\mathbf{I}(s) + 2\mathbf{I}(s) + \frac{5}{s}\mathbf{I}(s) = \frac{1}{s}$$

ou

$$\mathbf{I}(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{(s + 1)^2 + 4} \right]$$

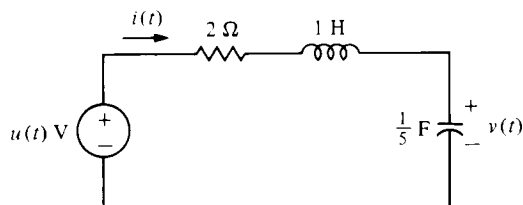


FIGURA 18.5 Circuito RLC

Portanto, a resposta é

$$i(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t \text{ A}$$

### EXEMPLO 18.23

Como outro exemplo, vamos calcular  $i$  para  $t > 0$  no circuito da Fig. 18.6, se  $v(0) = 4 \text{ V}$  e  $i(0) = 2 \text{ A}$ . A equação de nós no nó  $a$  (cujá tensão de nó é  $12 - v$ ) é

$$\frac{dv}{dt} = \frac{12 - v}{1} + i$$

e a equação da malha é

$$\frac{di}{dt} + i = 12 - v$$

Poderíamos eliminar  $v$  entre estas equações e resolver a equação resultante de segunda ordem em  $i$ . Contudo, com o método das transformadas de Laplace, transformamos primeiramente cada equação e então resolvemos as equações algébricas resultantes para a transformada de  $v$ .

Transformando as equações, temos

$$s\mathbf{V}(s) - 4 = \frac{12}{s} - \mathbf{V}(s) + \mathbf{I}(s)$$

$$s\mathbf{I}(s) - 2 + \mathbf{I}(s) = \frac{12}{s} - \mathbf{V}(s)$$

onde  $\mathbf{V}(s)$  e  $\mathbf{I}(s)$  são, respectivamente, as transformadas de  $v$  e  $i$ . Eliminando  $\mathbf{V}(s)$  e simplificando, temos

$$\mathbf{I}(s) = \frac{2(s + 5)}{s^2 + 2s + 2} = \frac{2(s + 1)}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{8}{(s + 1)^2 + 1}$$

Por conseguinte, a corrente é

$$i = e^{-t}(2 \cos t + 8 \sin t) \text{ A}$$

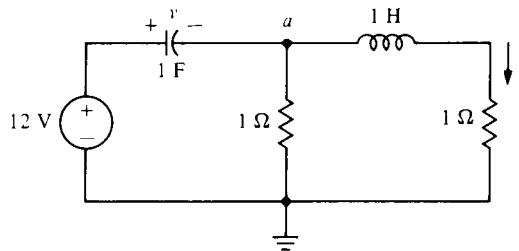


FIGURA 18.6 Circuito de segunda ordem

## EXERCÍCIOS

18.5.1 Calcule  $x(t)$ , para  $t > 0$ , usando transformadas de Laplace:

- (a)  $x'' + 3x' + 2x = \delta(t)$   
 $x(0^-) = x'(0^-) = 0.$   
 (b)  $x'' + 4x' + 3x = 4e^{-t}$   
 $x(0) = x'(0) = 4.$

Resposta: (a)  $(e^{-1} - e^{-2t}) u(t)$ ; (b)  $e^{-t}(2t + 7) - 3e^{-3t}$

18.5.2 Use as transformadas de Laplace para calcular  $x(t)$  e  $y(t)$ :

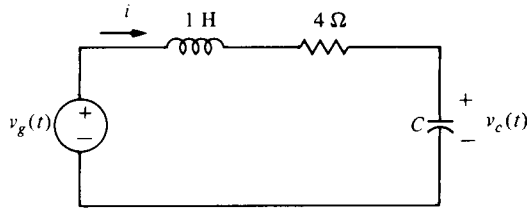
$$\begin{aligned} x' &= x + 2y \\ y' &= 2x + y \end{aligned}$$

onde  $x(0) = 2$ ,  $y(0) = 0$ . [Sugestão: Transforme as duas equações e resolva para as transformadas.]  
 Resposta:  $x = e^{3t} + e^{-t}$ ;  $y = e^{3t} - e^{-t}$

**18.5.3** Mostre que a transformada  $\mathbf{I}(s)$  para o circuito dado é

$$\mathbf{I}(s) = \frac{\mathbf{V}_g(s) + i(0) - v_c(0)/s}{s + 4 + 1/Cs}$$

e determine  $i(t)$ , para  $t > 0$ , se  $C = 1/3$  F,  $v_g(t) = 6$  V,  $i(0) = 1$  A e  $v_c(0) = 1$  V.  
 Resposta:  $2e^{-t} - e^{-3t}$  A



**EXERCÍCIO 18.5.3**

**18.5.4** Calcule  $i(t)$ , para  $t > 0$ , no Ex. 18.5.3, se  $C = 1/13$  F,  $v_g(t) = 6$  V,  $i(0) = 2$  A e  $v_c(0) = 4$  V.

Resposta:  $2e^{-2t}(\cos 3t - 1/3 \sin 3t)$  A

**18.5.5** Calcule  $i(t)$ , para  $t > 0$ , no Ex. 18.5.3, se  $C = 1/4$  F,  $v_g(t) = 6$  V,  $i(0) = 1$  A e  $v_c(0) = 2$  V.

Resposta:  $e^{-2t}(2t + 1)$  A

## 18.6

### O Circuito Transformado

Quando lidamos com fasores, fomos capazes de omitir os passos de escrever as equações diferenciais, indo diretamente para o circuito fasorial. O circuito era analisado por técnicas de circuitos resistivos, a saída fasorial era calculada e, a partir da mesma, a solução no domínio do tempo era obtida. Podemos fazer um tipo de análise similar com as transformadas de Laplace, obtendo primeiramente um circuito *transformado*. O resto do procedimento é similar ao método fasorial, exceto que, com as transformadas de Laplace, estamos aptos a lidar com funções mais gerais e obter a solução completa. Ou seja, as condições iniciais também são atendidas.

Para ver como o circuito transformado é obtido, vamos estudar, por exemplo, a expressão no domínio do tempo da LKT, representada por

$$v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_n(t) = 0 \quad (18.42)$$

Transformando essa equação, obtemos

$$\mathbf{V}_1(s) + \mathbf{V}_2(s) + \dots + \mathbf{V}_n(s) = 0 \quad (18.43)$$

onde  $\mathbf{V}_i(s)$  é a transformada de  $v_i(t)$ . As *tensões transformadas*, desta forma, satisfazem a LKT, como os fasores satisfizeram. Um raciocínio similar mostrará que correntes transformadas vão satisfazer a LKC. Visto que as tensões transformadas são transformadas de tensões em indutores, resistores e capacitores, assim como transformadas de fontes e de termos representando condições iniciais, elas podem ser calculadas para o caso de interesse e substituídas diretamente em (18.43), sem se escrever, de nenhuma forma, as equações no domínio do tempo. De fato, podemos transformar as relações tensão-corrente no domínio do tempo para os vários elementos de circuito e usar o resultado para obter modelos de elementos de circuito no domínio  $s$ . Esses podem então ser substituídos no circuito em lugar dos modelos no domínio do tempo para obter o circuito transformado, que pode então ser usado para escrever diretamente equações como (18.43). Isso é, evidentemente, exatamente o mesmo que foi feito para se obter os circuitos fasoriais.

Vamos primeiramente considerar uma resistência  $R$ , com corrente  $i_R$  e tensão  $v_R$ , para a qual

$$v_R = Ri_R$$

Transformando essa equação, temos

$$\mathbf{V}_R(s) = R\mathbf{I}_R(s) \quad (18.44)$$

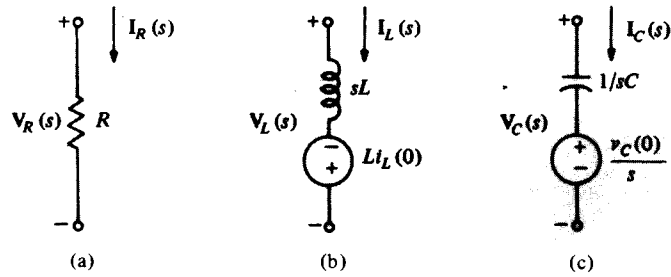


FIGURA 18.7 Elementos de circuito transformados

que é representada pelo elemento resistor transformado da Fig. 18.7(a).

A seguir, vamos considerar um indutor  $L$ , para o qual

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

Transformando, temos

$$\mathbf{V}_L(s) = sL\mathbf{I}_L(s) - Li_L(0) \quad (18.45)$$

que pode ser representado por um indutor com impedância

$$\mathbf{Z}_L(s) = sL$$

em série com uma fonte,  $Li_L(0)$ , com polaridade apropriada, como indicado na Fig. 18.7(b). A fonte de tensão incluída representa a condição inicial  $i_L(0)$ . É uma fonte *impulsiva*, visto que

$$\mathcal{L}[Li_L(0)\delta(t)] = Li_L(0)$$

No caso de um capacitor  $C$ , temos

$$v_C = \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt + v_C(0)$$

Transformando, obtemos

$$\mathbf{V}_C(s) = \frac{1}{sC}\mathbf{I}_C(s) + \frac{1}{s}v_C(0) \quad (18.46)$$

que é representada na Fig. 18.7(c) como um capacitor com impedância

$$\mathbf{Z}_C(s) = \frac{1}{sC}$$

em série com uma fonte,  $v_C(0)/s$ , representando as condições iniciais.

Fontes independentes são simplesmente rotuladas com suas transformadas. Fontes dependentes são transformadas do mesmo modo que elementos passivos. Por exemplo, uma fonte controlada de tensão definida por

$$v_1 = Kv_2$$

é transformada para

$$\mathbf{V}_1(s) = K\mathbf{V}_2(s)$$

que, no circuito transformado, é uma fonte controlada por uma variável transformada.

Em resumo, obtemos o circuito transformado a partir do circuito original substituindo os elementos por seus elementos transformados e as correntes e tensões por suas transformadas. Os elementos transformados de elementos passivos são aqueles mostrados na Fig. 18.7, e as fontes transformadas são aquelas do circuito original rotuladas com as transformadas dos seus valores no domínio do tempo. O circuito transformado é então resolvido, usando-se métodos de circuitos resistivos, para as transformadas das variáveis no domínio do tempo que se desejar.

**EXEMPLO 18.24**

Como um exemplo, suponha que desejamos calcular  $i(t)$ , para  $t > 0$ , na Fig. 18.8(a), dado que  $i(0) = 4$  A e  $v(0) = 8$  V. O circuito transformado está mostrado na Fig. 18.8(b), do qual temos

$$\mathbf{I}(s) = \frac{[2/(s + 3)] + 4 - (8/s)}{3 + s + (2/s)}$$

Isso pode ser escrito

$$\mathbf{I}(s) = -\frac{13}{s + 1} + \frac{20}{s + 2} - \frac{3}{s + 3}$$

de forma que, para  $t > 0$ ,

$$i(t) = -13e^{-t} + 20e^{-2t} - 3e^{-3t}$$

Como uma verificação, as equações no domínio do tempo para a Fig. 18.8(a) são

$$\frac{di}{dt} + 3i + 2 \int_0^t i dt + 8 = 2e^{-3t}$$

$$i(0) = 4$$

Transformando, temos

$$s\mathbf{I}(s) - 4 + 3\mathbf{I}(s) + \frac{2}{s}\mathbf{I}(s) + \frac{8}{s} = \frac{2}{s + 3}$$

que é a equação de laço do circuito da Fig. 18.8(b), e que dá  $\mathbf{I}(s)$ , como antes.

Podemos também resolver (18.44)-(18.46) explicitamente para as correntes. Os resultados são

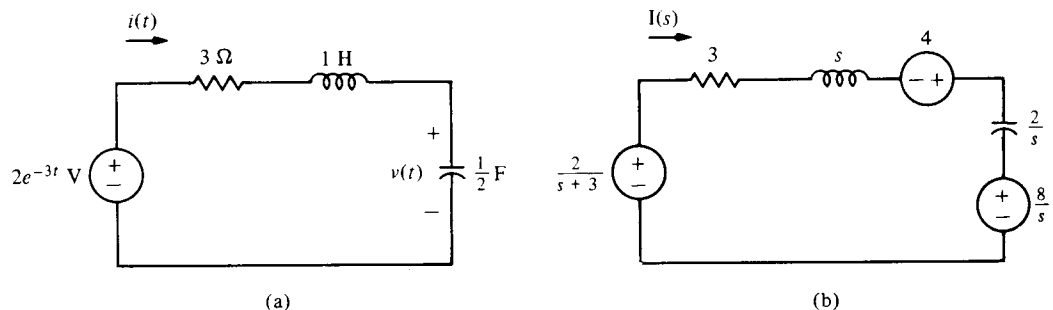
$$\mathbf{I}_R(s) = \frac{\mathbf{V}_R(s)}{R}$$

$$\mathbf{I}_L(s) = \frac{1}{sL}\mathbf{V}_L(s) + \frac{1}{s}i_L(0)$$

$$\mathbf{I}_C(s) = sC\mathbf{V}_C(s) - Cv_C(0)$$

Esses resultados são freqüentemente úteis em análise nodal. Como o leitor poderá verificar, os elementos transformados representados por estas equações são indicados na Fig. 18.9. Os números nos elementos passivos são impedâncias, como na Fig. 18.7.

Todos os teoremas de rede que se aplicam a circuitos resistivos e fasoriais aplicam-se aos circuitos transformados. Uma vantagem adicional neste último caso é que as condições iniciais podem ser incorporadas. Como um exemplo, o leitor pode verificar que os elementos da Fig. 18.9 são os equivalentes de Norton dos elementos da Fig. 18.7, e podem ser obtidos com o emprego de transformações de fontes.



**FIGURA 18.8** (a) Circuito; (b) sua transformada correspondente

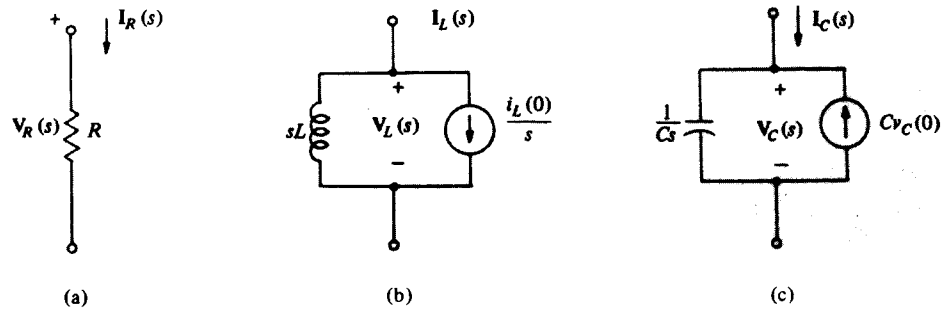


FIGURA 18.9 Elementos transformados, úteis para análises nodais

**EXEMPLO 18.25**

Visto que o procedimento usando circuitos transformados é idêntico ao que usa circuitos fasoriais, podemos obter circuitos transformados de Thévenin e Norton exatamente como obtivemos com circuitos fasoriais. Para ilustrar o processo, vamos substituir tudo à direita do resistor de  $4\text{-}\Omega$  da Fig. 18.10(a) pelo seu equivalente Thévenin e usar o resultado para calcular  $v(t)$ . Se  $i(0) = 1\text{ A}$  e  $v(0) = 4\text{ V}$ , o circuito transformado é o da Fig. 18.10(b).

O circuito transformado à direita do resistor de  $4\text{-}\Omega$  é obtido da Fig. 18.10(b) e está indicado com  $V_{oc}(s)$  entre os terminais abertos da Fig. 18.11(a). (Notamos que, ao contrário dos circuitos fasoriais de Thévenin, os circuitos transformados têm as condições iniciais automaticamente incluídas.) A equação nodal é

$$\frac{V_{oc}(s)}{3s} + \frac{1}{s} + \frac{s}{24} V_{oc}(s) = \frac{1}{6}$$

do qual a tensão transformada com o circuito aberto é

$$V_{oc}(s) = \frac{4(s - 6)}{s^2 + 8}$$

Se colocarmos em curto-circuito os terminais de entrada da Fig. 18.11(a), obtemos a Fig. 18.11(b), visto que o indutor e o capacitor são eliminados. A equação nodal é

$$I_{sc}(s) + \frac{1}{s} = \frac{1}{6}$$

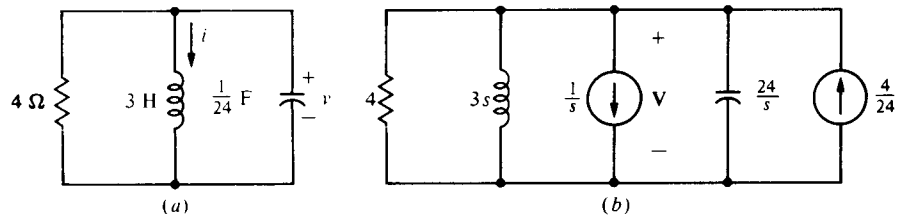


FIGURA 18.10 (a) Circuito paralelo RLC; (b) sua transformada correspondente

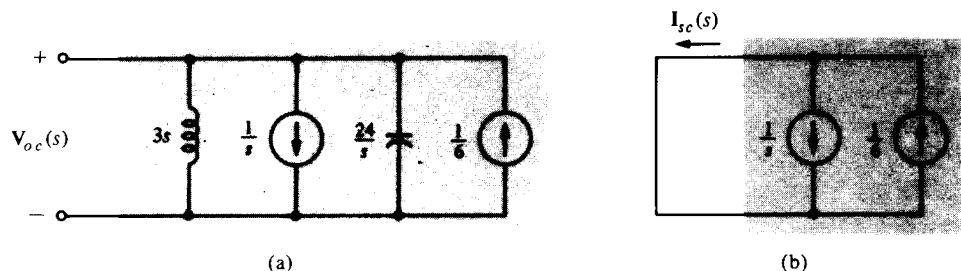


FIGURA 18.11 Circuito para se obter (a)  $V_{oc}(s)$ ; (b)  $I_{sc}(s)$



da qual a corrente transformada de curto-circuito é

$$I_{sc}(s) = \frac{s - 6}{6s}$$

A impedância de Thévenin é, portanto,

$$Z_{th}(s) = \frac{V_{oc}(s)}{I_{sc}(s)} = \frac{\left[ \frac{4(s - 6)}{s^2 + 8} \right]}{\left[ \frac{s - 6}{6s} \right]} = \frac{24s}{s^2 + 8}$$

e o circuito equivalente de Thévenin é o indicado na Fig. 18.12, com o resistor de 4-Ω conectado em seus terminais. A tensão  $V(s)$  é a tensão no resistor, como indicado.

A equação nodal para  $V(s)$  é

$$\frac{V(s)}{4} + \frac{V(s) - \frac{4(s - 6)}{s^2 + 8}}{\frac{24s}{s^2 + 8}} = 0$$

donde, após simplificações, temos

$$V(s) = \frac{4(s - 6)}{(s + 2)(s + 4)} = \frac{-16}{s + 2} + \frac{20}{s + 4}$$

A tensão no domínio do tempo, para  $t > 0$ , é portanto

$$v(t) = -16e^{-2t} + 20e^{-4t} \text{ V}$$

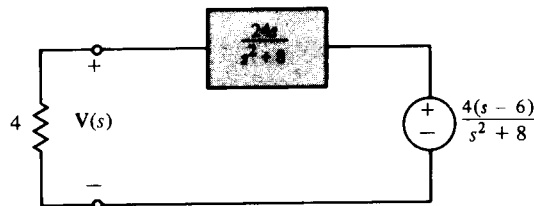
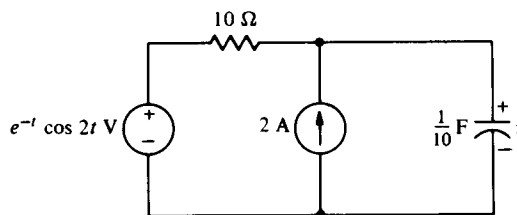


FIGURA 18.12 Circuito equivalente Thévenin terminado em um resistor de 4-Ω

## EXERCÍCIOS

- 18.6.1** Calcule  $v$ , para  $t > 0$ , usando o método do circuito transformado, se  $v(0) = 10$  V.  
Resposta:  $10(2 - e^{-t}) + (1/2)e^{-t} \sin 2t$  V.



EXERCÍCIO 18.6.1

- 18.6.2** Calcule a tensão  $v(t)$ , para  $t > 0$ , nos terminais do circuito RLC paralelo, excitado por uma fonte de corrente  $i_s(t) = e^{-2t}$  A, usando o método do circuito transformado. Os elementos passivos são  $R = 4$  Ω,  $L = 5$  H e  $C = 1/20$  F; a corrente inicial no indutor é  $i_L(0) = 1$  A e  $v(0) = 2$  V. (A corrente

$i_g$  entra no terminal positivo e a corrente  $i_l$  sai do terminal positivo de  $v$ .)

Resposta:  $-14e^{-t} + 20e^{-2t} - 4e^{-4t}$  V

**18.6.3** Calcule  $i$  e  $v$  na Fig. 18.6, usando o circuito transformado.

Resposta:  $v = 12 - e^{-t} (8 \cos t - 2 \sin t)$  V

**18.6.4** Calcule  $i(t)$  para  $t > 0$ , no circuito da Fig. 18.8(a), substituindo tudo, exceto o resistor de  $3\text{-}\Omega$ , no seu circuito transformado pelo seu circuito equivalente Norton.

Resposta:  $\mathbf{I}_c = \frac{4s^2 + 6s - 24}{(s + 3)(s^2 + 2)}$  A;  $Z_{th} = \frac{s^2 + 2}{s}$   $\Omega$ ;

$$i(t) = -13e^{-t} + 20e^{-2t} - 3e^{-3t}$$
 A

## 18.7

### Funções de Rede

Na Seção 14.4 definimos uma função de rede no domínio da frequência como sendo a relação  $\mathbf{H}(s)$  do fasor de saída pelo fasor de entrada, de um circuito tendo uma única excitação e uma única resposta. Nessa seção, vamos definir que a função de rede é a relação entre a transformada de Laplace da saída pela transformada de Laplace da entrada, e vamos ver que as duas definições são exatamente a mesma coisa. Repetindo, estamos assumindo uma única entrada e uma única saída, de forma que todas as condições iniciais do circuito são iguais a zero.

Suponhamos que, no caso geral, a entrada  $v_i$  e a saída  $v_o$  estão relacionadas pela equação diferencial

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n v_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v_o}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dv_o}{dt} + a_0 v_o \\ = b_m \frac{d^m v_i}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} v_i}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dv_i}{dt} + b_0 v_i \end{aligned}$$

e que todas as condições iniciais são zero; ou seja,

$$v_o(0) = \frac{dv_o(0)}{dt} = \dots = \frac{d^{n-1} v_o(0)}{dt^{n-1}} = v_i(0) = \frac{dv_i(0)}{dt} = \dots = \frac{d^{m-1} v_i(0)}{dt^{m-1}} = 0$$

Então, transformando, temos

$$\begin{aligned} (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) \mathbf{V}_o(s) \\ = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) \mathbf{V}_i(s) \end{aligned}$$

donde a função de rede, ou função de transferência, é dada por

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_o(s)}{\mathbf{V}_i(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (18.47)$$

Comparando esse resultado com (17.61), obtido previamente com a transformada de Fourier, vemos que  $\mathbf{H}(s)$  é a mesma função de rede, com  $j\omega$  generalizado para  $s$ . Também,  $\mathbf{H}(s)$ , a relação entre as transformadas de Laplace da saída e da entrada, é exatamente a função de rede que foi originalmente definida para os fasores generalizados em (14.24). Além disso, visto que admitâncias e impedâncias são funções de rede, elas são exatamente as mesmas no domínio da transformada de Laplace como foram no caso dos fasores generalizados. Com transformadas de Laplace, contudo, a situação é mais geral. Podemos ter qualquer função que tenha transformada de Laplace como entrada ou saída, ao invés de estar restrita a senóides amortecidas.

### EXEMPLO 18.26

Na maioria dos casos, o caminho mais simples para se obter a função de rede é a partir do circuito transformado. Para ilustrar, se a entrada de um circuito  $RLC$  série é  $v_g(t)$  e a saída é  $i(t)$ , então, temos

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{I}(s)}{\mathbf{V}_g(s)} = \frac{1}{\mathbf{Z}(s)}$$

$$= \frac{1}{sL + R + (1/sC)}$$

Se  $R = 2 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$  e  $C = 0,2 \text{ F}$ , obtemos

$$\mathbf{H}(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 5} \quad (18.48)$$

Para um circuito inicialmente em repouso (nenhuma energia inicial armazenada), o conhecimento da função de rede é suficiente para se determinar o comportamento externo do circuito para *qualquer* entrada transformável. Em outras palavras, neste caso, dispor-se de  $\mathbf{H}(s)$  é equivalente a se dispor do circuito em si. Para se ver isso, vamos escrever (18.47) na forma

$$\mathbf{V}_o(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{V}_i(s) \quad (18.49)$$

Então, se conhecemos a entrada  $v_i(t)$ , podemos calcular  $\mathbf{V}_i(s)$  e, subseqüentemente,  $\mathbf{V}_o(s)$ , donde tiramos a saída  $v_o(t)$ .

**EXEMPLO 18.27** Como um exemplo, se o circuito com a função de transferência (18.48) tem uma entrada

$$v_g(t) = u(t) \quad \text{V}$$

então

$$\mathbf{V}_g(s) = \frac{1}{s}$$

e temos

$$\mathbf{I}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{V}_g(s) = \frac{\mathbf{H}(s)}{s}$$

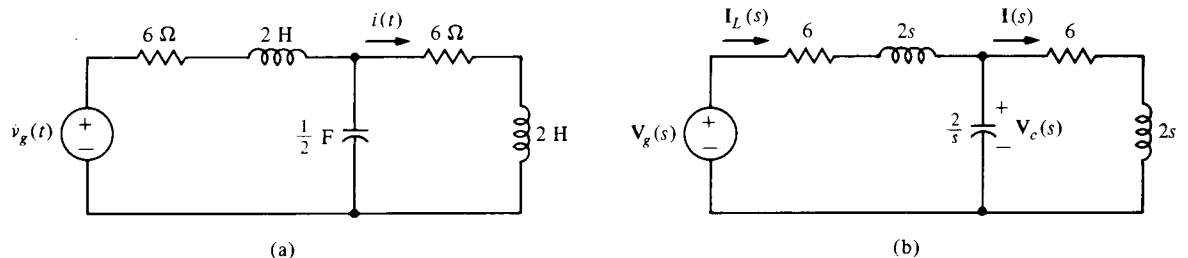
$$= \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$$

Calculando a antitransformada, temos

$$i(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \text{sen } 2t \quad \text{A}$$

**EXEMPLO 18.28** Como outro exemplo, vamos calcular a função de transferência para o circuito da Fig. 18.13(a), se a saída é  $i(t)$  e a entrada é  $v_g(t)$ . O circuito transformado está indicado na Fig. 18.13(b) e, visto que é um circuito escada, vamos usar o método da proporcionalidade. Tomando arbitrariamente

$$\mathbf{I}(s) = 1$$



**FIGURA 18.13** (a) Circuito no domínio do tempo; (b) seu circuito transformado

temos

$$\mathbf{V}_c(s) = (2s + 6)\mathbf{I}(s) = 2s + 6$$

$$\mathbf{I}_L(s) = \frac{\mathbf{V}_c(s)}{(2/s)} + \mathbf{I}(s) = \frac{s}{2}(2s + 6) + 1 = s^2 + 3s + 1$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_g(s) &= (2s + 6)\mathbf{I}_L(s) + \mathbf{V}_c(s) \\ &= (2s + 6)(s^2 + 3s + 1) + 2s + 6 \\ &= (2s + 6)(s^2 + 3s + 2)\end{aligned}$$

A função de transferência é, portanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(s) &= \frac{\mathbf{I}(s)}{\mathbf{V}_g(s)} = \frac{1}{(2s + 6)(s^2 + 3s + 2)} \\ &= \frac{1/2}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}\end{aligned}$$

Se  $\mathbf{Y}(s)$  e  $\mathbf{X}(s)$  são a saída e a entrada transformadas, respectivamente, de um circuito originalmente em repouso, então a função de rede é

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{X}(s)}$$

e a saída é dada por

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{X}(s) \quad (18.50)$$

A resposta ao degrau, que designamos  $r(t)$ , com transformada  $\mathbf{R}(s)$ , foi definida no Capítulo 8 como a resposta de um circuito inicialmente em repouso a uma excitação por um degrau unitário  $u(t)$ .  $\mathbf{R}(s)$  é extremamente simples de obter usando a função de transferência, visto que, por (18.50), temos

$$\mathcal{L}[r(t)] = \mathbf{R}(s) = \mathbf{H}(s)\mathcal{L}[u(t)]$$

ou

$$\mathbf{R}(s) = \frac{\mathbf{H}(s)}{s}$$

**EXEMPLO 18.29** Como exemplo, a função de rede do circuito da Fig. 18.14 é

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{I}(s)}{\mathbf{V}_g(s)} = \frac{s}{s^2 + 2s + 5}$$

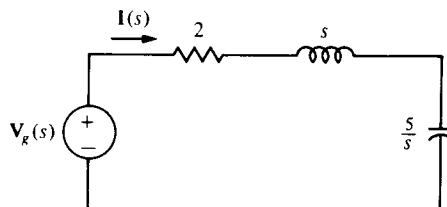


FIGURA 18.14 Circuito RLC transformado

e, desta forma, a resposta ao degrau é

$$\begin{aligned} r(t) = i(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{H(s)}{s} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{-t} \operatorname{sen} 2t \quad A \end{aligned}$$

A *resposta ao impulso* é a resposta de um circuito inicialmente em repouso a uma excitação por um impulso unitário  $\delta(t)$ . Visto que  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ , a resposta ao impulso, por (18.50), é

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{H}(s) \cdot 1] = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{H}(s)]$$

Visto que ela é a antitransformada da função de transferência  $\mathbf{H}(s)$ , é natural se designar a resposta ao impulso por  $h(t)$ . Ou seja,

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{H}(s)]$$

Portanto, se conhecemos a resposta ao impulso, podemos calcular a função de transferência,

$$\mathbf{H}(s) = \mathcal{L}[h(t)]$$

da qual podemos calcular a resposta a *qualquer* excitação. Por essa razão, a resposta ao impulso é uma das mais importantes funções de saída em teoria dos circuitos. Evidentemente, podemos também calcular a função de transferência a partir da resposta ao degrau, mas o processo não é tão elegante e direto, visto que a transformada da resposta ao impulso é a função de transferência.

### EXEMPLO 18.30

Como um exemplo, a resposta ao impulso do circuito da Fig. 18.14 é

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{s^2 + 2s + 5} \right] \\ &= e^{-t} \left( \cos 2t - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \right) u(t) \end{aligned}$$

Outra observação deve ser feita sobre a resposta ao impulso. Visto que, em geral,  $\mathbf{V}_o(s)$  é  $\mathbf{H}(s) \mathbf{V}_i(s)$ , um produto de duas transformadas, podemos escrever imediatamente, por meio do teorema da convolução,

$$v_o(t) = h(t) * v_i(t) = \int_0^t h(\tau) v_i(t - \tau) d\tau$$

Portanto, se conhecemos a resposta ao impulso e a entrada, podemos calcular a saída de um circuito inicialmente em repouso, usando o teorema da convolução.

Em geral, visto que a resposta ao degrau é

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\mathbf{H}(s)}{s} \right]$$

temos

$$r(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau \quad (18.51)$$

que mostra que a resposta ao degrau pode ser obtida diretamente da resposta ao impulso. O oposto também é verdadeiro, visto que, diferenciando (18.51), obtemos

$$h(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

## EXERCÍCIOS

**18.7.1** Dada a equação

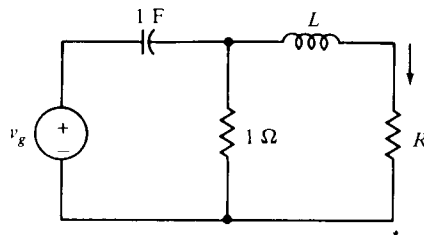
$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 10x(t)$$

onde  $y(t)$  e  $x(t)$  são a saída e a entrada, respectivamente, de um circuito, calcule a função de transferência e a resposta ao degrau.

Resposta:  $\frac{10}{s^2 + 2s + 5}; (2 - 2e^{-t} \cos 2t - e^{-t} \sin 2t)u(t)$

**18.7.2** Se a saída é  $i$  e a entrada é  $v_g$ , calcule  $\mathbf{H}(s)$  para os seguintes casos (a)  $L = 2 \text{ H}$ ,  $R = 5 \Omega$ , (b)  $L = 1 \text{ H}$ ,  $R = 3 \Omega$  e (c)  $L = 1 \text{ H}$ ,  $R = 1 \Omega$ .

Resposta: (a)  $\frac{s}{2s^2 + 7s + 6}$ ; (b)  $\frac{s}{s^2 + 4s + 4}$ ; (c)  $\frac{s}{s^2 + 2s + 2}$



**EXERCÍCIO 18.7.2**

**18.7.3** Calcule a resposta ao degrau nos casos (b) e (c) do Ex. 18.7.2.

Resposta: (b)  $te^{-2t} u(t)$  A; (c)  $e^{-t} \sin t u(t)$  A

**18.7.4** Dada a função de rede

$$\mathbf{H}(s) = \frac{2(s + 2)}{(s + 1)(s + 3)}$$

calcule (a)  $h(t)$ , (b) a resposta ao degrau e (c) a resposta forçada a uma entrada  $e^{-2t}$ . Em (c), tome  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 2$ .

Resposta: (a)  $(e^{-t} + e^{-3t})u(t)$ ; (b)  $\frac{1}{3}(4 - 3e^{-t} - e^{-3t})u(t)$ ;  
(c)  $(e^{-t} - e^{-3t})u(t)$

**18.7.5** Dada a equação

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 6x(t)$$

onde  $x(t)$  é a entrada e  $y(t)$  é a saída, calcule (a) a função de rede, (b) a resposta ao impulso e (c) a resposta ao degrau.

Resposta: (a)  $\frac{6}{s^2 + 4s + 3}$ ; (b)  $3(e^{-t} - e^{-3t})u(t)$ ; (c)  $(2 - 3e^{-t} + e^{-3t})u(t)$ .

**18.7.6** Calcule  $h(t)$ , a partir de  $r(t)$  no Ex. 18.7.4, usando

$$\frac{dr(t)}{dt} = h(t)$$

## PROBLEMAS

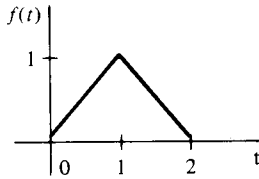
18.1 Calcule as transformadas de Laplace das funções

- (a)  $f(t) = -1, 0 \leq t \leq 3$   
 $= 1, t > 3$   
 (b)  $f(t) = 1, 0 < a < t < b$   
 $= 0, \text{ em caso contrário}$

18.2 Avalie a integral  $\int te^{at} dt$  e use o resultado e a definição de transformada de Laplace para calcular as transformadas das funções

- (a)  $t$ ,  
 (b)  $te^{-at}$ ,  
 (c)  $f(t) = 0, 0 < t < 2$ ,  
 $= t, t > 2$

e (d) como indicado na figura.



PROBLEMA 18.2(d)

18.3 Usando linearidade, calcule as transformadas de Laplace das funções

- (a)  $\sinh kt u(t)$ , (b)  $(1 - e^{-2t}) u(t)$ ,  
 (c)  $\sin^2 3t u(t)$ , (d)  $\cos^2 t u(t)$

[Sugestão: Em (c) e (d) use uma identidade trigonométrica.]

18.4 Calcule a antitransformada de Laplace de

- (a)  $\frac{2}{s+4} + \frac{3}{s^2}$ ,  
 (b)  $\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}$ ,  
 (c)  $\frac{2s+6}{s^2+9}$ ,  
 (d)  $\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}$ .

18.5 Calcule as transformadas de Laplace das funções

- (a)  $e^{-t} \cos 3t u(t)$ , (b)  $e^{-2t} \sin 4t u(t)$ ,  
 (c)  $e^{-3t}(2t+1) u(t)$ , e  
 (d)  $e^{-4t} \sinh t u(t)$ .

18.6 Use o teorema da translação em frequência e a transformada de  $t^n u(t)$  de (18.41) para deduzir a transformada

$$\mathcal{L}[e^{-at} t^n u(t)] = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}};$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

18.7 Calcule a antitransformada de

- (a)  $\frac{6s}{s^2+2s+10}$ ,  
 (b)  $\frac{2s+10}{s^2+4s+13}$ ,  
 (c)  $\frac{1}{(s+2)^2}$ , e  
 (d)  $\frac{2s-6}{s^2+2s+2}$ .

18.8 Calcule a transformada de Laplace de

- (a)  $u(t) - \dot{u}(t-1)$ ,

- (b)  $e^{-2t}[u(t) - u(t-2)]$ ,  
 (c)  $t u(t-2)$ , e (d)  $e^{-t} u(t-2)$ .

18.9 Calcule  $\mathcal{L}[t \sin 2t u(t)]$ . (Sugestão: escreva  $\sin 2t$  em função de exponenciais.)

18.10 Calcule a antitransformada de

- (a)  $\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+4}$ ,  
 (b)  $\frac{e^{-4s} - e^{-7s}}{s^2}$ ,  
 (c)  $\frac{5s+6}{s^2+9} e^{-\pi s}$ , e  
 (d)  $\frac{2(1+e^{-\pi s/2})}{s^2+2s+5}$ .

18.11 Deduza a propriedade de mudança de escala,

$$\mathcal{L}[f(ct)] = \frac{1}{c} \mathbf{F}\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$$

e use o resultado para obter a transformada de  $\cos kt$  a partir de  $\mathcal{L}[\cos t] = s/(s^2+1)$ .

18.12 Mostre que a operação de convolução é comutativa; isto é,

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

[Sugestão: Faça uma mudança de variáveis,  $\tau = t-x$ , em (18.23).]

18.13 Use convolução para calcular a antitransformada

de (a)  $\frac{1}{s^2+5s+6}$  e (b)  $\frac{1}{s(s^2+1)}$ .

18.14 Mostre que  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+k^2)^2}\right] =$

$$\frac{1}{2} \left( t \cos kt + \frac{1}{k} \sin kt \right).$$

Use o resultado e o Exercício 18.2.5 para calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right].$$

18.15 Resolva para  $y(t), t > 0$ :

$$y(t) = \cos t + \int_0^t e^{-(t-\tau)} y(\tau) d\tau$$

18.16 Calcule  $x$ , para  $t > 0$ , se

$$x'(t) + x(t) + \int_0^t x(\tau) e^{\tau-t} d\tau = 0,$$

$$x(0) = 1$$

18.17 Calcule a antitransformada de Laplace de

- (a)  $\frac{s}{(s+a)(s+b)}$ ,  $b \neq a$ .  
 (b)  $\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$ .  
 (c)  $\frac{2(s^2-6)}{s^3+4s^2+3s}$ .  
 (d)  $\frac{5s^3-3s^2+2s-1}{s^4+s^2}$ .

18.18 Calcule a antitransformada de

- (a)  $\frac{3s^2 + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$ .  
 (b)  $\frac{4s^2}{s^4 - 1}$ .  
 (c)  $\frac{s^2 + 5s + 5}{(s + 1)(s + 2)^2}$ .  
 (d)  $\frac{s^3 - 1}{s^3 + s}$ .

18.19 Calcule a antitransformada de

- (a)  $\frac{s^2 + 4s + 7}{(s + 1)(s^2 + 2s + 5)}$ .  
 (b)  $\frac{s + 2}{(s^2 + 2s + 2)(s + 1)^2}$ .  
 (c)  $\frac{4(s^3 - s^2 + 3s - 15)}{(s^2 + 9)(s^2 + 4s + 13)}$ .

18.20 Mostre que, se  $f(t + T) = f(t)$ , então

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

[Sugestão: Escreva a transformada como uma série infinita de integrais em  $(0, T)$ ,  $(T, 2T)$ , ..., e some.] Use o resultado para obter as transformadas das funções

- (a)  $f(t) = 1, \quad 0 < t < 1$   
 $= 0, \quad 1 < t < 2$   
 $f(t + 2) = f(t)$ .  
 (b)  $f(t) = |\text{sen } t|$ .

18.21 Calcule a antitransformada de

- (a)  $\frac{27}{(s + 1)^3(s + 4)}$ .  
 (b)  $\frac{1}{s(s + 1)^4}$ .

18.22 Um circuito série LC, sem energia inicial armazenada, é excitado por uma fonte de tensão  $v_c = 10 \text{ sen } 2t \text{ V}$ . Calcule a corrente que deixa o terminal positivo da fonte, se  $L = 5 \text{ H}$  e  $C = 1/20 \text{ F}$ .

18.23 Usando as transformadas de Laplace, resolva o seguinte, para  $t > 0$ :

- (a)  $x'' + x = 0, x(0) = -1, x'(0) = 1$ .  
 (b)  $x'' + 2x' + 2x = 0, x(0) = 0,$   
 $x'(0) = 1$ .  
 (c)  $x''' - 2x'' + 2x' = 0,$   
 $x(0) = x'(0) = 1, x''(0) = 2$ .  
 (d)  $x'' + 4x' + 3x = 4 \text{ sen } t + 8 \text{ cos } t,$   
 $x(0) = 3, x'(0) = -1$ .  
 (e)  $x'' + 4x' + 3x = 4e^{-3t},$   
 $x(0) = x'(0) = 0$ .  
 (f)  $x'' + 4x' + 3x = 4e^{-t} + 8e^{-3t},$   
 $x(0) = x'(0) = 0$ .

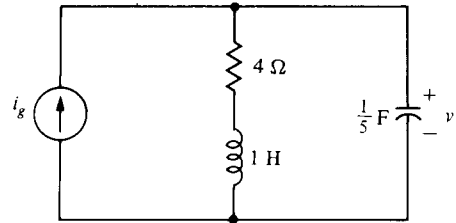
18.24 Usando transformadas de Laplace, resolva o seguinte, para  $t > 0$ :

- (a)  $x' + 4x + 3 \int_0^t x(\tau) d\tau = 5, x(0) = 1$ .  
 (b)  $x' + 4 \int_0^t x(\tau) d\tau = 3 \text{ sen } t, x(0) = 4$ .

18.25 Calcule  $x$ , para  $t > 0$ :

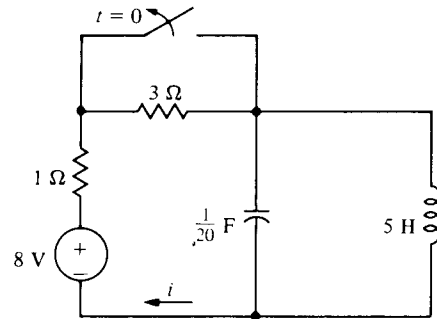
$$\begin{aligned} x' + x + y' + y &= 1 \\ -2x + y' - y &= 0 \\ x(0) &= 0, \quad y(0) = 1. \end{aligned}$$

18.26 Use a equação representativa e transformadas de Laplace para calcular  $v$ , para  $t > 0$ , se (a)  $i_g = 2u(t) \text{ A}$  e (b)  $i_g = 2e^{-t} u(t) \text{ A}$ .



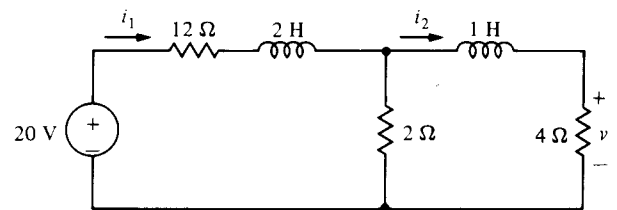
PROBLEMA 18.26

18.27 Use a equação representativa e transformadas de Laplace para calcular  $i$ , para  $t > 0$ , se o circuito está em regime permanente em  $t = 0^-$ .



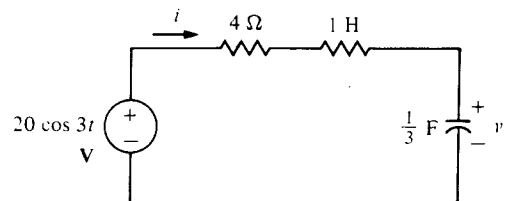
PROBLEMA 18.27

18.28 Use a equação representativa e transformadas de Laplace para calcular  $v$ , para  $t > 0$ , se  $i_1(0) = -1 \text{ A}$  e  $i_2(0) = 0$ .



PROBLEMA 18.28

18.29 Use a equação representativa e transformadas de Laplace para calcular  $i$ , para  $t > 0$ , se  $i(0) = 2 \text{ A}$  e  $v(0) = 6 \text{ V}$ .



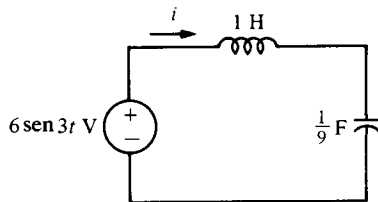
PROBLEMA 18.29



- 18.30 Resolva o Prob. 9.11 usando o circuito transformado.  
 18.31 Resolva o Prob. 9.13 usando o circuito transformado.  
 18.32 Resolva o Prob. 9.23 usando o circuito transformado.  
 18.33 Resolva o Prob. 9.29 usando o circuito transformado.  
 18.34 Resolva o Prob. 9.31 usando o circuito transformado.  
 18.35 Resolva o Prob. 9.33 usando o circuito transformado.  
 18.36 Resolva o Prob. 9.34 usando o circuito transformado.  
 18.37 Resolva o Prob. 9.38 usando o circuito transformado.  
 18.38 Resolva o Prob. 16.23 usando o circuito transformado.  
 18.39 Mostre, por meio do teorema da convolução, que

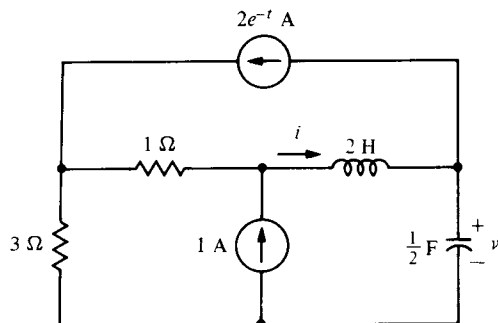
$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \right] = \frac{t}{2a} \text{ sen em } u(t)$$

Use esse resultado para calcular  $i$ , para  $t > 0$ , no circuito inicialmente em repouso.



PROBLEMA 18.39

- 18.40 Se  $x(t)$  é a entrada e  $y(t)$  é a saída, calcule a resposta ao degrau  $r(t)$  e a resposta ao impulso  $h(t)$  para o seguinte:  
 (a)  $y'' + 6y' + 5y = 20x$ .  
 (b)  $y'' + 4y' + 13y = 13x$ .  
 18.41 Calcule  $i$ , para  $t > 0$ , usando o circuito transformado, se  $v(t) = 4 \text{ V}$  e  $i(0) = 2 \text{ A}$ .



PROBLEMA 18.41

- 18.42 Se uma rede tem uma resposta ao impulso

$$h(t) = t e^{-2t} u(t)$$

calcule a resposta forçada a uma entrada

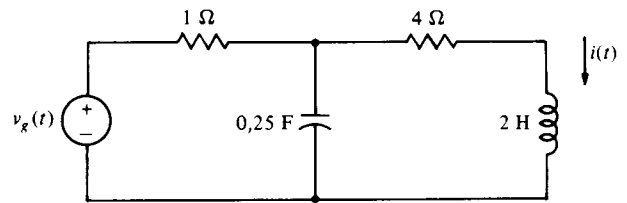
$$f(t) = e^{-2t} \cos t u(t)$$

- 18.43 Resolva para  $x$  e  $y$ , válido para  $t > 0$ :

$$2x' + 4x + y' + 7y = 0$$

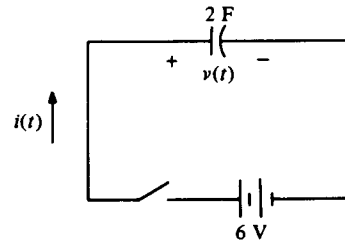
$$x' + x + y' + 3y = \delta(t)$$

- 18.44 Calcule a função de rede e a resposta ao impulso, se a saída é  $i(t)$ .



PROBLEMA 18.44

- 18.45 Calcule a resposta  $i(t)$  no Prob. 18.44, se o circuito está inicialmente em repouso e  $v_g(t) = u(t) - u(t - 1) \text{ V}$ .  
 18.46 Com a presença de correntes ou tensões impulsivas em um circuito é possível, teoricamente, mudar instantaneamente correntes em indutores e tensões em capacitores. Demonstre esta afirmativa, calculando  $v(t)$  e  $i(t)$ , para  $-\infty < t < \infty$ , no circuito fornecido. A chave é fechada em  $t = 0$  e  $v(0^-) = 0$ .



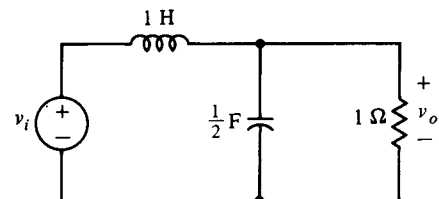
PROBLEMA 18.46

- 18.47 A resposta ao impulso de um circuito é

$$h(t) = \sqrt{2} e^{-t/\sqrt{2}} \text{ sen } \frac{t}{\sqrt{2}} u(t)$$

Calcule a função de rede e a resposta em amplitude e, desta forma, mostre que o circuito é um filtro passa-baixas "Butterworth", com  $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$ .

- 18.48 Calcule a resposta ao degrau para o circuito do Prob. 9.35, usando um circuito transformado.  
 18.49 Troque a fonte de 12-V no Prob. 9.23 por  $v_g(t)$  e use circuitos transformados para calcular  $H(s) = I(s)/V_g(s)$ . Calcule também, em cada caso,  $h(t)$  e  $r(t)$ .  
 18.50 Calcule  $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$ ,  $h(t)$  e  $r(t)$ .



PROBLEMA 18.50

- 18.51 Calcule  $i$ , para  $t > 0$ , no Prob. 9.15(b), trocando tudo à esquerda do resistor  $R$  por seu circuito transformado equivalente de Thévenin.  
 18.52 No circuito transformado do Prob. 9.29, substitua tudo, exceto o capacitor de 1/4-F por seu circuito equivalente de Thévenin e calcule  $v$ .

## Determinantes e Regra de Cramer

A solução de equações simultâneas, como as que são freqüentemente encontradas na teoria de circuitos, pode ser obtida, em muitos casos, de forma relativamente simples, com o uso de *determinantes*. Definimos um determinante como um arranjo quadrado de números, tendo um valor numérico, como

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Neste caso, o determinante é um arranjo  $2 \times 2$ , com duas *linhas* e duas *colunas* e um valor  $\Delta$  definido como sendo

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (\text{A.2})$$

No caso de segunda ordem, ou  $2 \times 2$ , de (A.1), o método para se obter  $\Delta$  em (A.2) pode ser denominado de *regra de diagonais*. Ou seja,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (\text{A.3})$$

ou  $\Delta$  é a diferença entre o produto  $a_{11}a_{22}$  dos elementos da diagonal principal e o produto  $a_{12}a_{21}$  dos elementos da diagonal secundária.

Como um exemplo, considere

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

que é dado por

$$\Delta = (1)(4) - (2)(-3) = 10$$

Um determinante de terceira ordem, ou  $3 \times 3$ , tal como

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{A.4})$$

tem três linhas e três colunas. Pode ser também calculado por uma regra de diagonais, dada por

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}) \\ &\quad - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Desta forma, o valor do determinante é a diferença dos produtos dos elementos das diagonais para a direita e dos produtos dos elementos das diagonais para a esquerda.

Um exemplo de um determinante de terceira ordem e seu cálculo é dado por

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= [(1)(-1)(2) + (1)(1)(-1) + (1)(1)(2)] \\ &\quad - [(1)(-1)(-1) + (1)(1)(1) + (2)(2)(1)] \\ &= -7\end{aligned}\tag{A.6}$$

Uma definição genérica de determinantes pode ser dada e empregada para deduzir vários procedimentos de cálculo. Essa é uma técnica normalmente dada em livros de álgebra elementar. Contudo, para nossos propósitos, vamos usar as regras de diagonais, que apresentamos para determinantes de segundo e terceiro graus, e calcular determinantes de ordem superior pelo método dos *menores* ou dos *cofatores*.

O *menor*  $A_{ij}$  do elemento  $a_{ij}$  na linha  $i$  e coluna  $j$  de um determinante é o determinante resultante após a remoção da linha  $i$  e da coluna  $j$ . Por exemplo, em (A.6), o menor  $A_{21}$  do elemento  $a_{21} = 2$  (segunda linha, primeira coluna) é

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

O cofator  $C_{ij}$  do elemento  $a_{ij}$  é dado por

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}A_{ij}\tag{A.7}$$

Em outras palavras, o cofator é o menor com *sinal algébrico*, o menor multiplicado por  $\pm 1$ , com o sinal dependendo se a soma do número da linha com o número da coluna é par ou ímpar.

O valor de um determinante é a soma dos produtos dos elementos em alguma linha ou coluna por seu cofator. Por exemplo, vamos *expandir* o determinante de (A.4) pelos cofatores da primeira linha. O resultado é

$$\Delta = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

ou, por (A.7),

$$\begin{aligned}\Delta &= a_{11}(-1)^{1+1}A_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}A_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}A_{13} \\ &= a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}\end{aligned}$$

Escrevendo os menores explicitamente, temos

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Pela regra de diagonais, podemos escrever

$$\Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

que pode ser simplificado, até chegar a (A.5).

Para ilustrar a expansão pelos menores, vamos calcular o determinante de (A.6), aplicando a técnica à terceira coluna. Temos

$$\begin{aligned}\Delta &= 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (2 - 1) - (1 + 1) + 2(-1 - 2) = -7\end{aligned}$$

Um método para se obter a solução de equações simultâneas por determinantes, referido anteriormente, é chamado de *regra de Cramer*. Vamos ilustrar o método aplicando-o a dois sistemas de equações, um sistema de segunda e outro de terceira ordem. Os exemplos serão dados de forma que a generalização a sistemas de ordem superior será evidente. O sistema de segunda ordem que vamos estudar é o conjunto de equações

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 &= 5 \\ 6x_1 + x_2 &= 4\end{aligned}\tag{A.8}$$

Definimos o determinante do sistema como o determinante  $\Delta$  cuja primeira coluna são os coeficientes de  $x_1$ , cuja segunda coluna são os coeficientes de  $x_2$  etc. No caso do sistema de (A.8), temos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 13 \quad (\text{A.9})$$

A regra de Cramer afirma que

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde  $\Delta_1$  é  $\Delta$  com a sua primeira coluna substituída pelas constantes dos elementos à direita do sistema de equações,  $\Delta_2$  é  $\Delta$  com a segunda coluna substituída da mesma forma etc. No exemplo de (A.8), os elementos à direita das equações são 5 e 4, de forma que

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 13 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -26 \end{aligned}$$

Pela regra de Cramer, a solução de (A.8) é dada por

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{13}{13} = 1 \\ x_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-26}{13} = -2 \end{aligned}$$

Como um exemplo de um sistema de terceira ordem, vamos considerar as equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

A solução, por (A.10), é

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-7}{-7} = 1 \\ x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-14}{-7} = 2 \end{aligned}$$

e

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-21}{-7} = 3$$

## Eliminação de Gauss

Equações simultâneas, como em (A.8.), podem ser resolvidas por um método de eliminação sucessiva de uma incógnita por vez, de uma certa forma sistemática. Um dos tais procedimentos, conhecido como *eliminação de Gauss*, será dado aqui para o caso particular de (A.11), repetido como

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\-x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7\end{aligned}\tag{B.1}$$

Ficará evidente, do procedimento, como generalizá-lo para qualquer sistema.

Podemos eliminar sistematicamente  $x_1$  de todas as equações de (B.1), exceto da primeira equação, subtraindo duas vezes a primeira equação da segunda e somando a primeira equação na terceira. Teremos, então, a primeira equação e duas novas equações, nenhuma das quais contém  $x_1$ . O resultado é

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\-3x_2 - x_3 &= -9 \\2x_2 + 3x_3 &= 13\end{aligned}\tag{B.2}$$

Vamos agora dividir a segunda equação por  $-3$ , resultando em

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= 3 \\2x_2 + 3x_3 &= 13\end{aligned}\tag{B.3}$$

A seguir, eliminamos  $x_2$  de todas as equações, exceto das duas primeiras. No caso de (B.3), isso significa eliminar  $x_2$  da terceira equação. Isso pode ser feito pela subtração de duas vezes a segunda equação da terceira equação, resultando em

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= 3 \\\frac{7}{3}x_3 &= 7\end{aligned}\tag{B.4}$$

Agora, dividimos a terceira equação por  $7/3$ , obtendo

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= 3 \\x_3 &= 3\end{aligned}\tag{B.5}$$

Num sistema de ordem mais elevada, repetiríamos o procedimento. Ou seja, eliminando  $x_3$  de todas as equações, exceto as três primeiras. Eventualmente, atingimos o ponto, como em (B.5), onde a última incógnita é obtida ( $x_3$  neste caso). Então, *retornamos* com esta última incógnita para a equação imediatamente anterior para obter o valor de outra incógnita. Essas duas respostas são, então, substituídas na próxima equação para obter-se outra incógnita, e assim por diante.

Para ilustrar esse procedimento de substituição, da segunda equação de (B.5), temos

$$\begin{aligned}x_2 &= 3 - \frac{1}{3}(x_3) \\ &= 3 - \frac{1}{3}(3) \\ &= 2\end{aligned}\tag{B.6}$$

Os valores conhecidos de  $x_2$  e  $x_3$  são então substituídos na primeira equação de (B.5), resultando

$$\begin{aligned}x_1 &= 6 - x_2 - x_3 \\ &= 6 - 2 - 3 \\ &= 1\end{aligned}\tag{B.7}$$

Neste exemplo, este último passo completa o processo, visto que todas as incógnitas foram obtidas.

Os passos do procedimento de Gauss podem ser colocados em forma compacta se eliminamos os símbolos das incógnitas, os sinais positivos e os sinais de igual. Ou seja, (B.1) pode ser representada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}\tag{B.8}$$

Esse arranjo é, às vezes, chamado de *matriz*. Tem linhas e colunas como um determinante, mas não é obrigatoriamente um arranjo quadrado (o exemplo dado é  $3 \times 4$ ) e não tem um número associado a ela. A matriz representa simplesmente as equações. Ou seja, sua primeira linha significa que um  $x_1$  mais um  $x_2$  mais um  $x_3$  é igual a seis etc.

Podemos eliminar incógnitas em (B.1) manipulando linhas em (B.8). Deixando a primeira linha intacta, subtraindo duas vezes a primeira linha da segunda e adicionando a primeira linha à terceira, temos a nova matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{bmatrix}\tag{B.9}$$

Isso representa o sistema de (B.2).

Dividindo a segunda linha de (B.9) por  $-3$ , obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{bmatrix}\tag{B.10}$$

Isso representa (B.3).

Subtraindo duas vezes a segunda linha de (B.10) da terceira linha, dá

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & 7 \end{bmatrix}\tag{B.11}$$

que representa (B.4). Dividindo sua última linha por  $7/3$ , dá

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\tag{B.12}$$

O último resultado é equivalente a (B.5) e pode ser usado, como em (B.6) e (B.7), para obter a solução.

Alternativamente, podemos continuar o procedimento de eliminação como segue. Em (B.12), subtraímos, da segunda linha,  $1/3$  vezes a última linha, e subtraímos a última linha da primeira. Isso resulta em

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, subtraímos a segunda linha da primeira, obtendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{B.13}$$

O último resultado representa  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  e  $x_3 = 3$ , que é a solução

O procedimento de continuar o processo de eliminação até atingir a forma (B.13) é conhecido como método de Gauss-Jordan.

# Apêndice C

## Números Complexos

Em nossos estudos de aritmética, lidamos com números *reais*, tais como 3, -5, 4/7,  $\pi$  etc. que podem ser usados para medir distâncias em um sentido ou em outro, a partir de um ponto determinado. Um número como  $x$  que satisfaz

$$x^2 = -4 \quad (\text{C.1})$$

não é um número real e é normalmente, mas infelizmente, chamado de um número *imaginário*. Para lidar com números imaginários, uma *unidade imaginária*, designada por  $j$ , é definida como

$$j = \sqrt{-1} \quad (\text{C.2})$$

Desta forma, temos  $j^2 = -1$ ,  $j^3 = -j$ ,  $j^4 = 1$  etc. (Devemos salientar que os matemáticos usam o símbolo  $i$  para a unidade imaginária, mas em engenharia elétrica isso pode gerar confusão com o símbolo de corrente.) Um número imaginário é definido como o produto de  $j$  por um número real, tal como  $x = j2$ . Neste caso,  $x^2 = (j2)^2 = -4$ , e, desta forma,  $x$  é a solução de (C.1).

Um número *complexo* é a soma de um número real e um número imaginário, tal como

$$A = a + jb \quad (\text{C.3})$$

onde  $a$  e  $b$  são reais. O número complexo  $A$  tem uma *componente real*,  $a$ , e uma *componente imaginária*,  $b$ , que podem ser representadas como

$$a = \text{Re } A$$

$$b = \text{Im } A$$

É importante notar que as duas componentes são reais, apesar de seus nomes.

O número complexo  $a + jb$  pode ser representado num plano de coordenadas retangulares, ou num *plano complexo*, sendo interpretado como um ponto  $(a, b)$ . Ou seja, a coordenada horizontal é  $a$  e a coordenada vertical é  $b$ , como indicado na Fig. C.1, para o ponto  $4 + j3$ . Por causa desta analogia com pontos plotados num sistema de coordenadas retangulares, (C.3) é, às vezes, chamada de *forma retangular* de um número complexo  $A$ .

O número complexo  $A = a + jb$  pode ser também plotado no plano complexo especificando-se

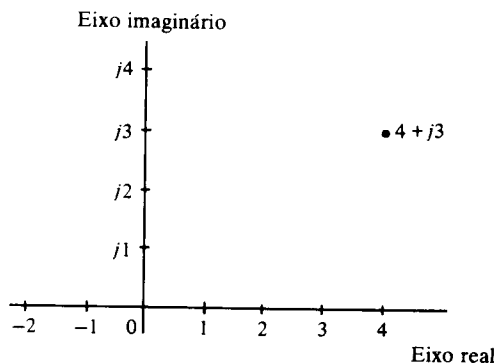


FIGURA C.1 Representação gráfica de um número complexo



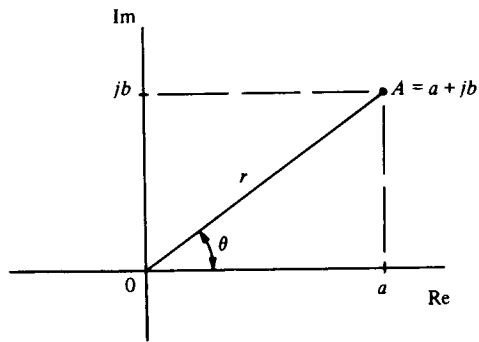


FIGURA C.2 Duas formas de um número complexo

sua distância  $r$  em linha reta a partir da origem e o ângulo  $\theta$  que essa reta faz com o eixo real, como indicado na Fig. C.2. Do triângulo retângulo assim formado, vemos que

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{C.4})$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

e que

$$\begin{aligned} a &= r \cos \theta \\ b &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Designamos essa representação dos números complexos por

$$A = r \angle \theta \quad (\text{C.6})$$

que é chamada de *forma polar*. O número  $r$  é chamado de *amplitude* ou *módulo*, e pode ser representado por

$$r = |A|$$

O número  $\theta$  é o *ângulo* ou *argumento* e pode ser representado por

$$\theta = \text{ang } A = \text{arg } A$$

Podemos converter facilmente da forma retangular para a forma polar, ou vice-versa, por meio de (C.4) e (C.5). Por exemplo, o número  $A$ , indicado na Fig. C.3, é dado por

$$A = 4 + j3 = 5 \angle 36,9^\circ$$

visto que, por (C.4)

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{3}{4} = 36,9^\circ$$

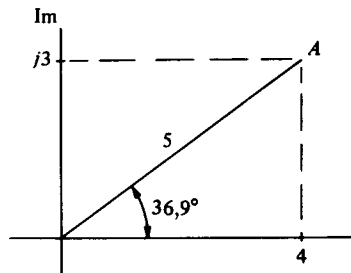


FIGURA C.3 Duas formas de um número complexo A

O conjugado de um número complexo  $A = a + jb$  é definido como

$$A^* = a - jb \quad (C.7)$$

Ou seja,  $j$  é substituído por  $-j$ . Visto que temos

$$|A^*| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |A|$$

e

$$\arg A^* = \tan^{-1}\left(\frac{-b}{a}\right) = -\tan^{-1}\frac{b}{a} = -\arg A$$

podemos escrever, na forma polar,

$$(r/\theta)^* = r/(-\theta) \quad (C.8)$$

Podemos notar da definição, que, se  $A^*$  é o conjugado de  $A$ , então  $A$  é o conjugado de  $A^*$ . Ou seja,  $(A^*)^* = A$ .

As operações de soma, subtração, multiplicação e divisão se aplicam aos números complexos exatamente do mesmo modo que aos números reais. No caso de soma e subtração, podemos escrever, em geral,

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d) \quad (C.9)$$

e

$$(a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d) \quad (C.10)$$

Ou seja, para somar (ou subtrair) dois números complexos, simplesmente somamos (ou subtraímos) suas partes reais e imaginárias.

Como um exemplo, seja  $A = 3 + j4$  e  $B = 4 - j1$ . Então

$$A + B = (3 + 4) + j(4 - 1) = 7 + j3$$

Isso pode ser também feito graficamente, como indicado na Fig. C.4(a), onde os números  $A$  e  $B$  são representados por vetores a partir da origem. O resultado é equivalente a se completar o paralelograma ou conectar os vetores  $A$  e  $B$  da forma indicada na Fig. C.4(b), como o leitor pode verificar, comparando os números. Por essa razão, a soma de números complexos é algumas vezes chamada de soma de vetores.

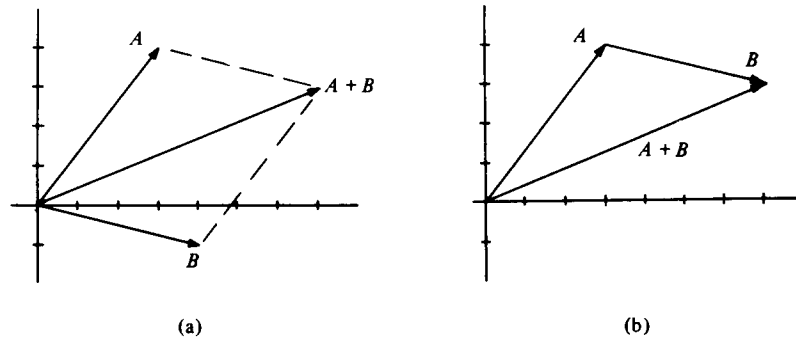


FIGURA C.4 Dois métodos de soma gráfica

No caso de multiplicação dos números  $A$  e  $B$ , dados por

$$A = a + jb = r_1 \cos \theta_1 + jr_1 \sin \theta_1 \quad (C.11)$$

$$B = c + jd = r_2 \cos \theta_2 + jr_2 \sin \theta_2$$

temos

$$\begin{aligned} AB &= (a + jb)(c + jd) = ac + jad + jbc + j^2bd \\ &= (ac - bd) + j(ad + bc) \end{aligned} \quad (C.12)$$

Alternativamente, temos, de (C.11)

$$\begin{aligned} AB &= (r_1 \cos \theta_1 + jr_1 \operatorname{sen} \theta_1)(r_2 \cos \theta_2 + jr_2 \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + j(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + j \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

Portanto, em forma polar, temos

$$(r_1 / \theta_1)(r_2 / \theta_2) = r_1 r_2 / \theta_1 + \theta_2 \quad (\text{C.13})$$

e, por isso, para multiplicar dois números complexos, multiplicamos seus módulos e somamos seus ângulos. Deste resultado, vemos que

$$AA^* = (r / \theta)(r / -\theta) = r^2 / 0 = |A|^2 / 0$$

Visto que  $|A|^2 / 0$  é o número real  $|A|^2$ , temos

$$|A|^2 = AA^* \quad (\text{C.14})$$

Divisão de um número complexo por outro, como

$$N = \frac{A}{B} = \frac{a + jb}{c + jd}$$

resulta em um denominador irracional, visto que  $j = \sqrt{-1}$ . Podemos racionalizar o denominador e indicar as partes reais e imaginárias de  $N$ , escrevendo

$$N = \frac{AB^*}{BB^*} = \frac{a + jb}{c + jd} \cdot \frac{c - jd}{c - jd}$$

que é

$$N = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2} \quad (\text{C.15})$$

Podemos também mostrar, pelo método usado para obter (C.13), que

$$\frac{r_1 / \theta_1}{r_2 / \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} / \theta_1 - \theta_2 \quad (\text{C.16})$$

Como exemplos, seja  $A = 4 + j3 = 5 / 36,9^\circ$  e  $B = 5 + j12 = 13 / 67,4^\circ$ . Então, temos

$$AB = (5)(13) / 36,9^\circ + 67,4^\circ = 65 / 104,3^\circ$$

e

$$\frac{A}{B} = \frac{5}{13} / 36,9^\circ - 67,4^\circ = 0,385 / -30,5^\circ$$

Evidentemente, é mais fácil somar ou subtrair números complexos em forma retangular e multiplicá-los ou dividi-los em forma polar.

Se dois números complexos são iguais, então suas partes reais devem ser iguais e suas partes imaginárias também devem ser iguais. Ou seja, se

$$a + jb = c + jd$$

então

$$a - c = j(d - b)$$

que requer

$$a = c, \quad b = d$$

Caso contrário, poderíamos ter um número real igual a um número imaginário, o que, evidentemente, é impossível. Como exemplo, se

$$1 + x + j(8 - 2x) = 3 + jy$$

então

$$1 + x = 3$$

$$8 - 2x = y$$

ou  $x = 2$ ,  $y = 4$ .

# Apêndice D

## Fórmula de Euler

Para deduzir a fórmula de Euler, um resultado importante, vamos começar com a grandeza

$$g = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta \quad (\text{D.1})$$

onde  $\theta$  é real e  $j = \sqrt{-1}$ . Derivando, obtemos

$$\frac{dg}{d\theta} = j(\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta) = jg$$

como pode ser visto de (D.1). As variáveis na última equação podem ser separadas, dando

$$\frac{dg}{g} = j d\theta$$

Integrando, obtemos

$$\ln g = j\theta + K \quad (\text{D.2})$$

onde  $K$  é uma constante de integração. De (D.1), vemos que  $g = 1$ , quando  $\theta = 0$ , o que deve se verificar também em (D.2). Ou seja

$$\ln 1 = 0 = 0 + K$$

ou  $K = 0$ . Portanto, temos

$$\ln g = j\theta$$

ou

$$g = e^{j\theta} \quad (\text{D.3})$$

Comparando (D.1) e (D.3), vemos que

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta \quad (\text{D.4})$$

que é conhecida como *fórmula de Euler*. Uma outra forma, obtida substituindo-se  $\theta$  por  $-\theta$ , é

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j \operatorname{sen}(-\theta)$$

que é, de forma equivalente,

$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \operatorname{sen} \theta \quad (\text{D.5})$$

Evidentemente, (D.4) e (D.5) são conjugados.

A fórmula de Euler nos proporciona um processo de obter formas alternativas de  $\cos \theta$  e  $\operatorname{sen} \theta$ . Por exemplo, somando (D.4) e (D.5) e dividindo o resultado por 2, temos

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad (\text{D.6})$$

De forma similar, subtraindo (D.5) de (D.4) e dividindo o resultado por  $2j$ , temos

$$\text{sen } \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \quad (\text{D.7})$$

Podemos usar também a fórmula de Euler para esclarecer a representação polar

$$A = r \angle \theta \quad (\text{D.8})$$

do número complexo

$$A = a + jb \quad (\text{D.9})$$

Isso foi estudado no Apêndice C, onde, em (C.5), tivemos

$$\begin{aligned} a &= r \cos \theta \\ b &= r \text{sen } \theta \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Pela fórmula de Euler, podemos escrever

$$\begin{aligned} re^{j\theta} &= r(\cos \theta + j \text{sen } \theta) \\ &= r \cos \theta + jr \text{sen } \theta \end{aligned}$$

que, por (D.10), é

$$re^{j\theta} = a + jb \quad (\text{D.11})$$

Portanto, comparando (D.11) com (D.8) e (D.9), temos

$$A = r \angle \theta = re^{j\theta} \quad (\text{D.12})$$

Esse resultado nos possibilita obter facilmente as regras de multiplicação e divisão, dadas em (C.13) e (C.16).

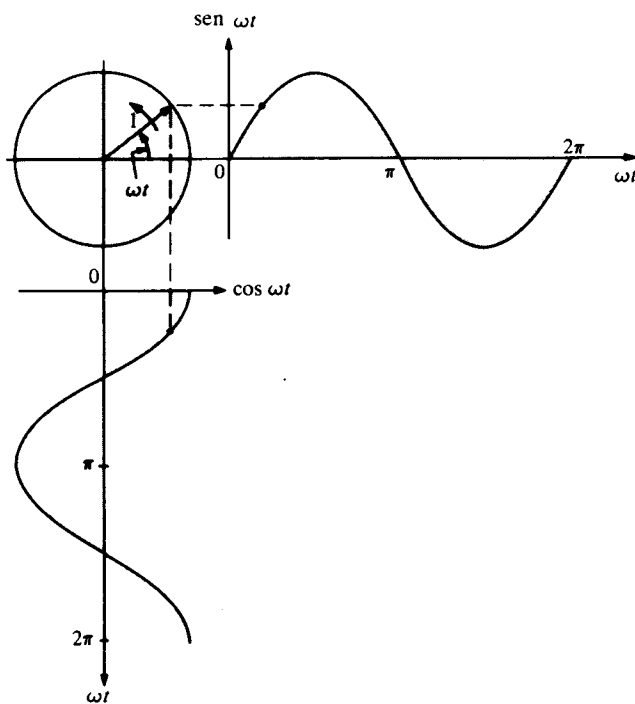


FIGURA D.1 Ilustração gráfica da fórmula de Euler

Evidentemente, se

$$A = r_1 \angle \theta_1 = r_1 e^{j\theta_1}$$

e

$$B = r_2 \angle \theta_2 = r_2 e^{j\theta_2}$$

então

$$\begin{aligned} AB &= (r_1 \angle \theta_1)(r_2 \angle \theta_2) \\ &= (r_1 e^{j\theta_1})(r_2 e^{j\theta_2}) \\ &= r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \\ &= r_1 r_2 \angle \theta_1 + \theta_2 \end{aligned}$$

De mesma forma, podemos obter

$$\frac{A}{B} = \frac{r_1 \angle \theta_1}{r_2 \angle \theta_2}$$

A fórmula de Euler está ilustrada graficamente na Fig. D.1. Um vetor unitário está girando sobre um círculo, no sentido indicado, com uma velocidade angular de  $\omega$  rad/s. Portanto, em  $t$  segundos, girou de um ângulo  $\omega t$ , como indicado, e, desta forma, o vetor pode ser especificado por  $1 \angle \omega t$  ou  $e^{j\omega t}$ . Sua componente real é a projeção no eixo horizontal, dada por  $\cos \omega t$ , e sua componente imaginária é a projeção no eixo vertical, dada por  $\sin \omega t$ . Ou seja,

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

que é a fórmula de Euler. As projeções traçam as ondas de co-seno e seno, como indicado, quando o vetor gira.

## Métodos Computacionais

SPICE, a palavra formada com as letras iniciais de "Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis", foi desenvolvido no departamento de engenharia elétrica e ciência de computação na Universidade da Califórnia, em Berkeley. O programa é muito útil para resolver circuitos simples ou complexos e, com essa finalidade, foi incluído neste livro para complementar o estudo e o entendimento dos rudimentos dos circuitos elétricos. A família SPICE de simuladores de circuitos executa análise de circuitos em cc, ca e transitória. A versão escolhida para ilustrar esse texto é PSpice, da MicroSim Corporation, de Laguna Hills, Califórnia, que usa os mesmos algoritmos e trabalha com a mesma sintaxe de entrada do SPICE2. Embora PSpice tenha também vários comandos que executam operações e simulações não disponíveis na versão de SPICE de Berkeley, vamos nos restringir aos comandos e declarações padronizadas que são pertinentes ao nosso estudo. Versões de PSpice estão disponíveis para os microcomputadores pessoais, com a família IBM PC.

O procedimento padrão para se usar o SPICE foi apresentado na Seção 4.8. O objetivo deste Apêndice é dar uma descrição de todas as declarações de comando e de dados usadas nos vários exemplos do texto. Um arquivo de entrada ou *arquivo de circuito* do SPICE contém (1) declarações de título e comentários, (2) declarações de dados, (3) declarações de controle da solução, (4) declarações de controle da saída e (5) uma declaração de fim.

### A

#### Declarações de Título e Comentários

Uma *declaração de título* é a primeira declaração do arquivo de circuito. Pode conter qualquer texto, mas está restrita a uma linha. Essa declaração é normalmente usada para identificar o circuito em estudo. Um exemplo pode ser

Análise CC do circuito 6.2

Uma *declaração de comentário* é usada para embutir declarações descritivas para definição do circuito, ou como ajuda na organização do arquivo de circuito. As linhas com comentários são marcadas com \* na primeira coluna e podem conter qualquer texto. Um exemplo é

\* Declarações de dados para o Ex. 12.7

### B

#### Declarações de Dados

Declarações de dados são usadas para definir os elementos de um circuito para o simulador SPICE. A primeira letra numa declaração de dados é usada para definir o tipo de elemento. Os elementos passivos são representados como

R resistores  
C capacitores

L indutores  
K transformadores lineares



Fontes independentes de tensão e corrente são representadas por

- I fontes de corrente                                V fontes de tensão

Fontes dependentes (controladas) de corrente e tensão são representadas por

- E fonte de tensão controlada por tensão (FTCT)  
 F fonte de corrente controlada por corrente (FCCC)  
 G fonte de corrente controlada por tensão (FCCT)  
 H fonte de tensão controlada por corrente (FTCC)

Uma declaração de chamada de subcircuito (X), que pode incorporar estes elementos dentro da definição bastante útil de subcircuito, será descrita mais tarde.

A Figura E.1 mostra as conexões básicas do circuito entre os nós  $m$  e  $n$  para um elemento de ramo. O nó de referência deve ser denominado 0. A tensão de ramo  $V(m, n)$  representa a tensão do nó  $m$  com relação ao nó  $n$ . A tensão  $V(m, 0)$  do nó  $m$  com relação ao nó de referência, pode também ser escrita como  $V(m)$ , simplesmente. Correntes de ramo no SPICE são sempre definidas como fluindo do nó mais positivo, através do elemento, em direção ao nó mais negativo. Cada ramo pode conter qualquer dos elementos descritos, com fontes de corrente e tensão podendo ter valores nulos, mas resistores, capacitores e indutores devem ter valores não-nulos.

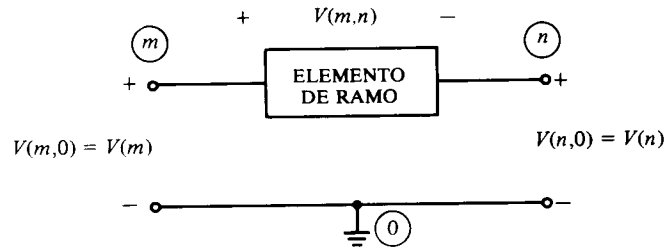


FIGURA E.1 Elemento de ramo conectado entre os nós  $m$  e  $n$

Os ramos são interconectados em nós identificados por inteiros não-negativos, que não são necessariamente seqüenciais, com o nó de referência sendo 0 (alguns simuladores permitem cadeias alfanuméricas). Os circuitos não podem conter um laço de fontes de tensão, um conjunto de corte de fontes de corrente (um conjunto que, se removido, divide o circuito em duas partes), ou um nó ao qual apenas um elemento está conectado (nó flutuante). Além disso, cada nó deve ter um caminho cc ao nó de referência.

Números associados com os valores dos elementos e as respostas no SPICE podem ser especificados nos seguintes formatos:

<i>Tipo</i>	<i>Exemplos</i>
INTEIRO	77, -56
PONTO FLUTUANTE	7,54, -33,65
EXPONENCIAL	100E-02, 1,775E3

Fatores de escala que estão disponíveis para uso com estes números são

F = $10^{-15}$	U = $10^{-6}$	MEG = $10^6$
P = $10^{-12}$	M = $10^{-3}$	G = $10^9$
N = $10^{-9}$	K = $10^3$	T = $10^{12}$

Desta forma, os seguintes valores são todos equivalentes:

1,05E6      1,05MEG      1,05E3K      0,00105G

As declarações de dados para os vários elementos dos circuitos têm as seguintes formas:

#### 1. Resistor

R (NOME) ((+) NÓ) ((-) NÓ) (VALOR)

(NOME) exprime qualquer cadeia alfanumérica de sete caracteres, para designar o elemento.

(+) NÓ e (-) NÓ definem a polaridade da conexão do resistor. Correntes positivas circulam do NÓ (+), através do resistor, ao NÓ (-).

(VALOR) é o valor não-nulo da resistência (positivo ou negativo), em ohms.

representa um resistor de  $10\text{-k}\Omega$ , denominado RLOAD, conectado entre os nós 12 e 3, com corrente circulando do nó positivo 12, através do resistor, para o nó negativo 3.

## 2. Capacitor

C <NOME> <(+) NÓ> <(-) NÓ> <VALOR> [IC = <VALOR INICIAL>]

<NOME> exprime qualquer cadeia alfanumérica de sete caracteres.

<(+) NÓ> e <(-) NÓ> definem a polaridade da conexão do capacitor.

Correntes positivas circulam do NÓ (+), através do capacitor, ao NÓ (-).

<VALOR> é o valor não-nulo (positivo ou negativo), em farads.

<VALOR INICIAL> é opcional e exprime a tensão inicial no capacitor no tempo  $t = 0$ , do NÓ (+) com relação ao NÓ (-), para uma análise da resposta transitória.

Exemplo E.2:

CEXT 2 3 10U  
CEXT 2 3 10U IC=4

representa um capacitor de  $10\mu\text{F}$ , denominado EXT, conectado entre os nós 2 e 3. Se IC = 4 for incluído, então existe uma tensão inicial de 4 V no nó 2 com relação ao nó 3, em  $t = 0$ . Esse valor é usado apenas na resposta transitória.

## 3. Indutor

L <NOME> <(+) NÓ> <(-) NÓ> <VALOR> [IC = <VALOR INICIAL>]

<NOME> exprime qualquer cadeia alfanumérica de sete caracteres.

<(+) NÓ> e <(-) NÓ> definem a polaridade da conexão do indutor.

Correntes positivas circulam do NÓ (+), através do indutor, para o NÓ (-).

<VALOR> é o valor diferente de zero (positivo ou negativo), em henrys.

<VALOR INICIAL> é opcional e exprime a corrente inicial no indutor no tempo  $t = 0$ , do NÓ (+), através do indutor, ao NÓ (-), para uma análise da resposta transitória.

Exemplo E.3:

L12 100 0 10M  
L12 100 0 10M IC=-0.5

representa um indutor de  $10\text{mH}$ , denominado 12, conectado entre os nós 100 e 0 (nó de referência). Se IC = 0,5 for incluído, então existe uma corrente de  $-0,5$  a partir do nó 100, através do indutor, para o nó 0, no tempo  $t = 0$ . Esse valor é usado apenas na resposta transitória.

## 4. Transformador linear

K<NOME> L <INDUTOR A> L <INDUTOR B> <VALOR DO ACOPLAMENTO>

K<NOME> acopla dois indutores A e B usando uma convenção de ponto que é determinada pelas atribuições dos nós dos indutores A e B. A polaridade é determinada pela ordem dos nós nos dispositivos L e não pela ordem dos indutores na declaração K. Os terminais com ponto dos indutores A e B são aqueles ligados aos nós positivos (primeiramente definido), nas suas declarações de definição.

K<NOME> exprime qualquer cadeia alfanumérica de sete caracteres.

K<VALOR DO ACOPLAMENTO> é o coeficiente de acoplamento mútuo, na faixa de 0 a 1.

Exemplo E.4:

LPRI 2 3 500M  
LSEC 5 4 400M  
KXFRM LPRI LSEC 0.98

representa um transformador linear, tendo acoplamento mútuo de 0,98 entre LPRI e LSEC. Os terminais com ponto, para a polaridade do acoplamento, são o terminal de LPRI conectado ao nó 2 e o terminal de LSEC conectado ao nó 5.

## 5. Fontes independentes de corrente e tensão

I <NOME> <(+) NÓ> <(-) NÓ> [TYPE <VALOR>] [TRANSIENT SPEC.]  
V <NOME> <(+) NÓ> <(-) NÓ> [TYPE <VALOR>] [TRANSIENT SPEC.]

I designa uma fonte independente de corrente.

V designa uma fonte independente de tensão.

<NOME> exprime qualquer cadeia alfanumérica de sete caracteres.

<(+) NÓ> e <(-) NÓ> definem a polaridade da fonte. Correntes positivas fluem do NÓ (+), através da fonte, para o NÓ (-).

TYPE é DC (default) para uma fonte de corrente contínua e AC para uma fonte senoidal em corrente alternada.

<VALOR> é um valor cc para DC ou um módulo e uma fase (em graus) para AC. Os valores default são zero.

[TRANSIENT SPEC.] é usado apenas na análise de transientes e pode ser um dos seguintes:

EXP(<x1> <x2> <td1> <tc1> <td2> <tc2>)

A forma EXP faz com que a corrente ou tensão de saída seja  $\langle x1 \rangle$  para os primeiros  $\langle td1 \rangle$  segundos. Então, a saída decai exponencialmente de  $\langle x1 \rangle$  até  $\langle x2 \rangle$ , com uma constante de tempo  $\langle tc1 \rangle$ , em  $\langle td2 \rangle$  segundos. Então, a saída decai de  $\langle x2 \rangle$  de volta a  $\langle x1 \rangle$ , com uma constante de tempo de  $\langle tc2 \rangle$ .

PULSE( $\langle x1 \rangle \langle x2 \rangle \langle td \rangle \langle tr \rangle \langle tf \rangle \langle pw \rangle \langle per \rangle$ )

A forma PULSE faz a saída começar em  $\langle x1 \rangle$  e permanecer por  $\langle td \rangle$  segundos. Então, a saída vai linearmente de  $\langle x1 \rangle$  a  $\langle x2 \rangle$  durante os  $\langle tr \rangle$  segundos a seguir. A saída permanece então em  $\langle x2 \rangle$  por  $\langle pw \rangle$  segundos. Retorna então, linearmente, para  $\langle x1 \rangle$  durante os  $\langle tf \rangle$  segundos a seguir. Permanece em  $\langle x1 \rangle$  por  $\langle per \rangle - (\langle tr \rangle + \langle pw \rangle + \langle tf \rangle)$  segundos e o ciclo se repete, excluindo o período inicial e  $\langle td \rangle$  segundos.

PWL( $\langle t1 \rangle \langle x1 \rangle \langle t2 \rangle \langle x2 \rangle \dots \langle tn \rangle \langle xn \rangle$ )

A forma PWL descreve uma forma de onda de composição linear (ponto a ponto). Cada par de valores tempo-saída especifica uma inflexão da forma de onda. A saída entre esses pontos de inflexão é uma interpolação linear da corrente nesses pontos.

SIN ( $\langle xoff \rangle \langle xamp1 \rangle \langle freq \rangle \langle td \rangle \langle df \rangle \langle fase \rangle$ )

A forma SIN faz com que a saída comece em  $\langle xoff \rangle$  e permaneça por  $\langle td \rangle$  segundos. Então, a saída torna-se uma onda senoidal exponencialmente amortecida descrita pela equação

$$xoff + xamp1 \cdot \text{sen}\{2\pi \cdot [freq \cdot (TIME - td) - fase/360]\} e^{-(TIME - td)/df}$$

*Exemplo E.5:* IG1 2 3 0.2A ou IG1 2 3 DC 0.2A

representa uma fonte de corrente cc, chamada de G1, fornecendo 0,2 A do nó 2 para o nó 3, através da fonte.

ISOURCE 0 5 AC 10 64

representa uma fonte ca 10/64 A, chamada de SOURCE, conectada entre os nós 0 e 5, com terminal positivo no nó 0.

I2 0 2 EXP(10M 0M 0 0.1 1)

representa uma corrente exponencial de  $10e^{-10t}$  mA, circulando do nó 0 para o 2, através da fonte, no intervalo  $0 < t < 0,1$  segundos, para análise transitória. Exemplos de PULSE, PWL e SIN foram dados na Tabela 8.1.

#### 6. Fonte de tensão controlada por tensão (FTCT)

E  $\langle \text{NOME} \rangle \langle (+) \text{NÓ} \rangle \langle (-) \text{NÓ} \rangle \langle (+ \text{CONTROLE}) \text{NÓ} \rangle$   
 $+ \langle (- \text{CONTROLE}) \text{NÓ} \rangle \langle \text{GANHO} \rangle$

$\langle \text{NOME} \rangle$  exprime qualquer cadeia alfanumérica de sete caracteres.

$\langle (+) \text{NÓ} \rangle$  e  $\langle (-) \text{NÓ} \rangle$  definem a polaridade da fonte. Correntes positivas circulam do NÓ (+), através da fonte, para o NÓ (-).

$\langle (+ \text{CONTROLE}) \rangle$  e  $\langle (- \text{CONTROLE}) \rangle$  são em pares e definem um conjunto de tensões de controle que são multiplicadas por  $\langle \text{GANHO} \rangle$ . Um nó em particular pode aparecer mais de uma vez e os nós de saída e de controle não precisam ser diferentes.

*Exemplo E.6:* EBUFF 1 3 11 9 2.4

representa uma FTCT, chamada de BUFF, conectada entre os nós 1 e 3, com tensão no nó 1 com relação ao nó 3 igual a 2,4 vezes a tensão do nó 11 com relação ao nó 9.

#### 7. Fonte de corrente controlada por corrente (FCCC)

F  $\langle \text{NOME} \rangle \langle (+) \text{NÓ} \rangle \langle (-) \text{NÓ} \rangle \langle (\text{DISP. DE CONTROLE V}) \text{NOME} \rangle + \langle \text{GANHO} \rangle$

$\langle \text{NOME} \rangle$  exprime qualquer cadeia alfanumérica de sete caracteres.

$\langle (+) \text{NÓ} \rangle$  e  $\langle (-) \text{NÓ} \rangle$  definem a polaridade da fonte. Correntes positivas circulam do NÓ (+), através da fonte, para o NÓ (-). A corrente através  $\langle (\text{DISP. DE CONTROLE V}) \text{NOME} \rangle$ , multiplicada pelo  $\langle \text{GANHO} \rangle$ , determina a corrente de saída.

$\langle (\text{DISP. DE CONTROLE V}) \rangle$  é uma fonte independente de tensão, com uma tensão nos terminais que não pode ser zero.

*Exemplo E.7:* F23 3 7 VOUT 1.2

representa uma FCCC, chamada de 23, com corrente circulando do nó 3, através da fonte, para o nó 7, tendo um valor igual a 1,2 vezes o da corrente que circula na fonte independente de tensão VOUT (do terminal - para o terminal +).

8. Fonte de corrente controlada por tensão (FCCT)

G(NOME) ((+) NÓ) ((-) NÓ) ((+ CONTROLE) NÓ)  
+ ((- CONTROLE) NÓ) (CONDTRANS)

(NOME) exprime qualquer cadeia alfanumérica de sete caracteres.

(+) NÓ e (-) NÓ definem a polaridade da fonte. Correntes positivas circulam do NÓ (+), através da fonte, para o NÓ (-).

(+ CONTROLE) e (- CONTROLE) são em pares e definem um conjunto de tensões de controle que são multiplicadas por (CONDTRANS). Um nó em particular pode aparecer mais de uma vez e os nós de saída e de controle não precisam ser diferentes.

*Exemplo E.8:* GAMP 4 3 1 9 1.7

representa uma FCCT, chamada de AMP, conectada entre os nós 4 e 3, com corrente circulando do nó 4 para o nó 3, através da fonte, igual a 1,7 vezes a tensão do nó 1 com relação ao nó 9.

9. Fonte de tensão controlada por corrente (FTCC)

(H(NOME) ((+) NÓ) ((-) NÓ) (DISP. DE CONTROLE V) NOME)  
+ (RESISTRANS)

(NOME) exprime qualquer cadeia alfanumérica de sete caracteres.

(+) NÓ e (-) NÓ definem a polaridade da fonte. Correntes positivas circulam do NÓ (+), através da fonte, para o NÓ (-). A corrente através de ((DISP. DE CONTROLE V) NOME), multiplicada por (RESISTRANS), determina a tensão de saída.

(DISP. DE CONTROLE V) é uma fonte de tensão independente, com uma tensão dos terminais que deve ser diferente de zero.

*Exemplo E.9:* HIN 4 8 VDUMMY 7.7

representa uma FTCC, chamada de IN, com corrente circulando do nó 4, através da fonte, para o nó 8, com valor igual a 7,7 vezes o da corrente circulando na fonte independente de tensão VDUMMY (do terminal - para o terminal +).

10. Declaração de chamada de subcircuito

X(NOME) [NÓ]\* ((SUBCIRCUITO) NOME)

(NOME) exprime qualquer cadeia alfanumérica de sete caracteres.

[NÓ]\* exprime uma lista de nós necessários para a definição do subcircuito.

((SUBCIRCUITO) NOME) é o nome da definição do subcircuito (veja a declaração .SUBCKT, abaixo).

Deve existir na chamada o mesmo número de nós que existe na definição de subcircuito.

Esta declaração faz com que o subcircuito referenciado seja introduzido no circuito, com os nós dados substituindo os nós de argumento na definição. Permite a definição de um bloco de circuito uma vez e, então, o uso desse bloco em vários lugares.

*Exemplo E.10:* XBUFF 4 1 7 9 UNITAMP

representa a chamada de um subcircuito que substitui a declaração de chamada pelo conteúdo do arquivo UNITAMP, para análise com o SPICE.

## C

### Declarações de Controle da Solução

Os comandos a serem estudados nessa seção são as declarações .AC, .DC, .FOUR, .IC, .LIB, .SUBCKT, .TF e .TRAN. As declarações de controle da saída .PLOT e .PRINT, descritas na próxima seção, são usadas para se obter os resultados das declarações de controle da solução.

1. Análise AC: A declaração .AC é usada para calcular a resposta em frequência de um circuito, em uma faixa de frequências. Tem a forma

.AC [LIN] [OCT] [DEC] ((PONTOS) VALOR) ((FREQ. PARTIDA) VALOR)  
+ ((FREQ. FINAL) VALOR)

LIN, OCT, ou DEC são palavras-chave que especificam o tipo de varredura, como segue:

LIN: varredura linear. A frequência varia linearmente da freq. partida até a freq. final. ((PONTOS) VALOR) é o número de pontos da varredura.

OCT: varredura em oitavas. A frequência é percorrida logicamente em oitavas. ((PONTOS) VALOR) é o número de pontos por oitava.

DEC: varredura por décadas. A frequência é percorrida logicamente em décadas. ((PONTOS) VALOR) é o número de pontos por década.

Apenas um entre LIN, OCT ou DEC deve ser especificado.

⟨(FREQ. FINAL) VALOR⟩ não deve ser inferior a ⟨(FREQ. PARTIDA) VALOR⟩, e ambas devem ser superiores a zero. A varredura completa pode especificar apenas um ponto, se desejado.

*Exemplo E.11* .AC LIN 1 100HZ 100HZ

representa uma solução em regime permanente ca, para uma rede tendo uma frequência de 100 Hz.

.AC LIN 101 100KHZ 200KHZ

representa uma resposta em frequência linear, tendo 101 pontos distribuídos uniformemente na faixa de 100 a 200 kHz.

2. Análise DC: A declaração .DC faz uma análise em varredura em corrente contínua para o circuito. Tem o formato

.DC ⟨(VARIÁVEL VARREDURA) NOME⟩ ⟨(PARTIDA) VALOR⟩ ⟨(FINAL) VALOR⟩  
+ ⟨(INCREMENTO) VALOR⟩

⟨(VARIÁVEL VARREDURA) NOME⟩ é o nome de uma fonte independente de tensão ou corrente. É percorrida linearmente de ⟨(PARTIDA) VALOR⟩ até ⟨(FINAL) VALOR⟩. O valor do incremento é ⟨(INCREMENTO) VALOR⟩. ⟨(PARTIDA) VALOR⟩ pode ser maior ou menor que ⟨(FINAL) VALOR⟩; ou seja, a varredura pode se processar em qualquer sentido. ⟨(INCREMENTO) VALOR⟩ deve ser superior a zero. A varredura completa pode especificar apenas um ponto, se desejado.

*Exemplo E.12* .DC VIN 10V 10V 1V

representa uma solução cc para um circuito com a fonte independente de tensão VIN = 10 V.

.DC IGEN 1M 10M 1M

representa uma varredura em cc para a fonte independente de corrente IGEN, variando de 1 a 10 mA, em passos de 1mA.

3. Análise de Fourier: A análise de Fourier produz uma decomposição em componentes de Fourier, como resultado de uma análise transitória. Uma declaração .FOUR requer uma declaração .TRAN (descrita abaixo). Tem o formato

.FOUR ⟨(FREQUÊNCIA) VALOR⟩ ⟨(VARIÁVEL DE SAÍDA)⟩\*

⟨(VARIÁVEL DE SAÍDA)⟩ é uma lista de uma ou mais variáveis para as quais se deseja as componentes de Fourier. A análise de Fourier é feita a partir dos resultados da análise transitória para uma ou mais variáveis de saída especificadas. A partir destas tensões ou correntes, a componente cc, a frequência fundamental e as harmônicas de ordem 2 a 9 são calculadas. A frequência fundamental é ⟨(FREQUÊNCIA) VALOR⟩, que especifica o período para a análise. A análise de transiente deve ter, pelo menos, 1/⟨(FREQUÊNCIA) VALOR⟩ segundo de duração.

*Exemplo E.13:* .FOUR 10KHZ V(5) V(6, 7) I(VSENS3)

calcula as componentes de Fourier para as variáveis V(5), V(6,7) e I(VSENS3). A frequência fundamental para a decomposição é 10kHz.

4. Condições iniciais: A declaração .IC é usada para estabelecer as condições iniciais para uma análise de transiente. Tem o formato

.IC ⟨V(⟨NÓ⟩) = ⟨VALOR⟩⟩\*

Cada ⟨VALOR⟩ é uma tensão que é associada ao ⟨NÓ⟩ para a tensão inicial no nó, no tempo  $t = 0$ , para a análise de transiente.

*Exemplo E.14:* .IC V(2)=5 V(5)=-4V V(101)=10

representa estabelecer as tensões de nó iniciais nos nós 2,5 e 101 como 5,-4 e 10 V, respectivamente, no tempo  $t = 0$ .

5. Arquivo permanente: A declaração .LIB é usada para referenciar um subcircuito de "biblioteca" a outro arquivo. Tem o formato

.LIB ⟨(ARQUIVO) NOME⟩

⟨(ARQUIVO) NOME⟩ é o nome do arquivo do subcircuito.

*Exemplo E.15:* .LIB OPAMP.LIB

representa que o arquivo do subcircuito é chamado OPAMP.LIB.

6. Análise cc do ponto de operação: A declaração .OP calcula todas as tensões cc de nós e as correntes em todas as fontes de tensão. Tem a fórmula

.OP

7. Definição de subcircuito: A declaração .SUBCKT é usada para definir um subcircuito que é chamado usando a declaração X descrita anteriormente. Tem o formato

.SUBCKT (NOME) [NÓ]\*

A declaração .SUBCKT inicia a definição de um subcircuito. A definição termina com uma declaração .ENDS. Todas as declarações entre .SUBCKT e .ENDS são incluídas na definição. Sempre que o subcircuito é chamado por uma declaração X, todas as declarações na definição substituem a declaração de chamada.

8. Função de transferência: A declaração .TF produz a função de transferência cc. Tem o formato

.TF ((VARIÁVEL DE SAÍDA)) ((FONTE ENTRADA) NOME)

O ganho de ((FONTE ENTRADA) NOME) até ((VARIÁVEL DE SAÍDA)) é calculado junto com as resistências de entrada e saída. ((VARIÁVEL DE SAÍDA)) pode ser uma corrente ou uma tensão: contudo, no caso de uma corrente, fica restrito à corrente através de uma fonte de tensão.

Exemplo E.16: .TF V(3) IIN

produz a função de transferência cc para V(3)/IIN, a resistência de entrada vista dos terminais da fonte de corrente independente IIN e a resistência de saída vista no nó V(3).

9. Análise de transiente: A declaração .TRAN faz com que uma análise de transiente seja efetuada para o circuito. Tem o formato

.TRAN ((PASSO IMP.) VALOR) ((TEMPO FINAL) VALOR) [UIC]

A análise de transiente calcula o comportamento do circuito no tempo, iniciando-se em  $t = 0$  e indo até ((TEMPO FINAL) VALOR). ((PASSO IMP.) VALOR) é o intervalo de tempo empregado para plotação ou impressão dos resultados da análise. A palavra-chave UIC (*use initial conditions*) faz com que o conjunto de condições iniciais para capacitores e indutores com a especificação IC seja usado.

Exemplo E.17:

efetua uma análise de transitório no intervalo de 0 a 100 ns, com saída plotada ou impressa a cada intervalo de 1ns.

## D

### Declarações de Controle da Saída

As declarações de controle da saída para plotação ou impressão são as declarações .PLOT, .PRINT e .WIDTH

1. Plotação: A declaração .PLOT permite que resultados de análise cc, ca e transitória tenham saída na forma de plotações em impressoras. Tem o formato

.PLOT [DC][AC][TRAN][VARIÁVEL DE SAÍDA]\*  
+ (((LIMITE INF.) VALOR), ((LIMITE SUP.) VALOR))

DC, AC e TRAN são os tipos de análise que podem ser plotados. Um único tipo de análise deve ser especificado. [VARIÁVEL DE SAÍDA]\* é uma lista das variáveis de saída desejadas para plotação. É permitido um máximo de oito variáveis de saída em uma declaração .PLOT.

A faixa de valores e o incremento no eixo dos  $x$  são determinados pelas características da análise que está sendo plotada. A faixa de valores no eixo dos  $y$  pode ser estabelecida acrescentando-se (((LIMITE INF.) VALOR), ((LIMITE SUP.) VALOR)) às variáveis de saída com a mesma faixa no eixo dos  $y$ . Cada ocorrência define um eixo dos  $y$  com a faixa especificada. Todas as variáveis de saída que venham entre esta e a próxima faixa de valores à esquerda são colocadas no seu eixo dos  $y$  correspondente. Se nenhum limite no eixo dos  $y$  for especificado, o programa determina automaticamente os limites de plotação.

Exemplo E.18: .PLOT DC V(2) V(3,5) I(R2)

plota a resposta cc para V(2), V(3,5) e I(R2), a corrente em R2.

.PLOT AC VM(3) VP(3) IR(C1) II(C1)

plota o módulo e a fase de V(3) e as componentes reais e imaginárias da corrente através de C1.

.PLOT TRAN V(5) V(2,3) (0,5V) I(R1) I(VCC) (-5MA,5MA)

plota a resposta de transitório de V(5) e V(2,3) entre os limites 0 e 5 V e I(R1) e I(VCC) entre os limites -5 e 5 mA.

2. Impressão: A declaração .PRINT permite que resultados de análise ca, cc e transitória saiam em forma de tabelas. Tem o formato

.PRINT [DC][AC] [TRAN] [(VARIÁVEL DE SAÍDA)]\*

DC, AC e TRAN definem o tipo de análise que pode ter saída. Um único tipo de análise deve ser especificado. [(VARIÁVEL DE SAÍDA)]\* é uma lista das variáveis de saída desejadas. Não há limite para o número de variáveis de saída. O formato da saída é determinado pela especificação do comando .WIDTH.

*Exemplo E.19:* .PRINT DC V(1) I(R12)

Imprime os valores cc para V(1) e I(R12).

.PRINT AC VM(1,5) VP(1,5) IR(L2) II(L2)

imprime o módulo e a fase de V(1,5) e as componentes reais e imaginárias de I(L2).

.PRINT TRAN V(7) I(L4) I(VCC) V(3,1)

imprime a resposta transitória de V(7), I(L4), I(VCC) e V(3,1).

3. Extensão: A declaração .WIDTH estabelece o tamanho da saída. Tem o formato

.WIDTH OUT = <VALOR>

<VALOR> é o número de colunas e deve ser ou 80 ou 132. O valor "default" é 80 colunas.

*Exemplo: E20* .WIDTH OUT = 132

## **E**

### **Declarações de Fim**

As declarações de fim para arquivos de subcircuito e de circuito, são, respectivamente, .ENDS e .END.

1. Fim de uma definição de subcircuito: A declaração .ENDS marca o final de uma definição de subcircuito (iniciada com a declaração .SUBCKT). Tem o formato

.ENDS [(SUBCIRCUITO) NOME]

Constitui boa prática repetir o nome do subcircuito, embora não seja necessário.

2. Fim do circuito: A declaração .END marca o fim do circuito. Ela tem a forma

.END

# Apêndice F

## Respostas a Problemas Ímpares Seleccionados

### CAPÍTULO 1

- 1.1 Styron—20,55 mph, Griffith Joyner—  
20,96 mph  
1.3 (a)  $-4\text{ C}$ , (b)  $5\text{ C}$ , (c)  $1,5, 0, -3\text{ A}$   
1.5  $9, 0, -18, 0\text{ W}$   
1.7 (a)  $15, 4, 4\text{ W}$ , (b)  $84\text{ mJ}$   
1.9  $25/4, 8\text{ mW}$   
1.11  $-24\pi\text{ mJ}$   
1.13  $6\cos 2t\text{ A}$ ,  $3\text{ C}$   
1.15 (a)  $32e^{-4t}\text{ W}$ ,  $8\text{ J}$ , (b)  $-128e^{-4t}\text{ W}$ ,  $-32\text{ J}$ ,  
(c)  $-16e^{-4t}\text{ W}$ ,  $-4\text{ J}$   
1.17  $32(1 - e^{-4})\text{ J}$   
1.19 (a)  $34.560\text{ J}$ , (b)  $2880\text{ C}$   
1.21 (a)  $14.400\text{ J}$ , (b)  $1200\text{ C}$   
1.25  $8(e^{-2t} - 1)^2\text{ J}$

### CAPÍTULO 2

- 2.1  $300\text{ mA}$ ,  $12\text{ V}$   
2.3  $8\text{ A}$ ,  $15\ \Omega$   
2.5  $-1\text{ A}$ ,  $4\text{ V}$   
2.7  $1\text{ A}$ ,  $-4\text{ A}$ ,  $17\text{ V}$   
2.9  $4\text{ A}$   
2.11  $300\ \Omega$   
2.13  $400\ \Omega$   
2.17  $2, 4, 6, 8, 10, 12\text{ V}$   
2.19  $10\text{ V}$   
2.21  $R_{eq} = 5\text{ k}\Omega$ ,  $i_g = 10\text{ mA}$   
2.23  $3, 1\text{ A}$   
2.25  $1/3\text{ A}$ ,  $3\text{ A}$ ,  $4\text{ V}$   
2.27  $250\ \Omega$ ,  $10\text{ mA}$   
2.29  $1,5\text{ A}$   
2.31  $2\text{ A}$ ,  $4\ \Omega$   
2.33 (a)  $400\ \Omega$ ,  $390\ \Omega$ , (b)  $360\ \Omega$ ,  $351\ \Omega$   
2.35  $3\text{ W}$   
2.37  $3\text{ A}$ ,  $4\text{ V}$   
2.39  $10\text{ A}$ ,  $2,5\text{ A}$ ,  $10\text{ V}$   
2.41  $37,5\ \mu\text{A}$   
2.43  $4,5\text{ k}\Omega$

### CAPÍTULO 3

- 3.1  $-2\text{ V}$ ,  $8/9\text{ W}$   
3.3  $-3\text{ A}$

- 3.5  $5\text{ A}$   
3.7 (a)  $3\text{ A}$ ,  $6\text{ V}$ , (b)  $-1\text{ A}$ ,  $-6\text{ V}$   
3.9 (a)  $5\cos 2t\text{ A}$ ,  $3\ \Omega$ , (b)  $-20\cos 2t\text{ A}$ ,  $-2\ \Omega$   
3.11  $-8\text{ V}$   
3.13  $12\text{ V}$   
3.15 (a)  $20\text{ k}\Omega$ ,  $20\text{ k}\Omega$ , (b)  $1\text{ k}\Omega$   
3.19  $8\sin 3t\text{ V}$   
3.21  $3\ \Omega$   
3.23  $3\text{ A}$   
3.25  $-1\text{ A}$   
3.27  $2\sin 3000t\text{ mA}$   
3.29  $17\text{ V}$   
3.31 (b)  $0,999990v_1$ ,  $0,9900990v_1$ ,  $0,5v_1$

### CAPÍTULO 4

- 4.1  $40, 24\text{ V}$   
4.3  $2, 4\text{ A}$   
4.5  $2\text{ A}$   
4.7  $3\text{ A}$   
4.9  $2\text{ A}$   
4.11  $20\text{ V}$   
4.13  $64\text{ W}$   
4.15  $-2, -4\text{ V}$   
4.17  $4\text{ V}$   
4.19  $4\cos 3t\text{ V}$   
4.21  $95\text{ k}\Omega$   
4.25  $4\text{ W}$   
4.27  $8\text{ V}$   
4.29  $-2, 4\text{ A}$   
4.31  $75\text{ W}$   
4.33  $9\text{ V}$   
4.35  $3\cos 1000t\text{ mA}$   
4.41  $v = 3\text{ V}$ ,  $R_{in} = 1,82\text{ k}\Omega$   
4.43  $v_1 = 5, 6, 7, 8, 9, 10\text{ V}$

### CAPÍTULO 5

- 5.1  $3,5\text{ A}$ ,  $35\text{ V}$ ,  $8\text{ V}$   
5.5  $-200\text{ V}$   
5.9  $3\text{ A}$   
5.11  $24\text{ V}$   
5.13  $16\text{ W}$   
5.15  $6\text{ A}$



- 5.17  $v_{oc} = 14 \text{ V}$ ,  $R_{th} = 10 \Omega$ ; 4 W  
 5.19  $i_{sc} = 2,8 \text{ A}$ ,  $R_{th} = 5 \Omega$ ; 1 A  
 5.21  $i_{sc} = 3 \text{ A}$ ,  $R_{th} = 8 \Omega$ ; 1 A  
 5.23  $v_{oc} = 120/19 \text{ V}$ ,  $R_{th} = 198/19 \Omega$ ; 4 V  
 5.25  $v_{oc} = -70 \text{ V}$ ,  $R_{th} = 16 \Omega$ ; -3,5 A  
 5.27  $v_{oc} = 4,8 \text{ V}$ ,  $R_{th} = 800 \Omega$ ; 1 mA  
 5.29  $v_{oc} = 14 \text{ V}$ ,  $R_{th} = 10 \Omega$ ; 4 W  
 5.31 -6 mA  
 5.35 7,2 mW, 800  $\Omega$   
 5.37 28  $\Omega$ , 1,75 W  
 5.39 16/9  $\Omega$ , 625 W  
 5.41  $v_{oc} = 12 \text{ V}$ ,  $R_{th} = 8 \Omega$ ,  $v = 4 \text{ V}$   
 5.43 4,5  $\Omega$ , 2 W

## CAPÍTULO 6

- 6.1 2 V  
 6.5 4 V  
 6.9 2 V  
 6.11 (a) 3 A, (b) -1 A  
 6.17 26 V

## CAPÍTULO 7

- 7.1  $i = 2 \mu\text{A}$ ,  $0 < t < 0,5 \text{ s}$   
 $i = -2 \mu\text{A}$ ,  $0,5 < t < 1 \text{ s}$   
 7.3  $e^{-20t} \text{ A}$   
 7.5  $25e^{-10t} \text{ V}$   
 7.7 (a)  $5 + 8t \text{ V}$ , (b)  $5 + 8t^2 \text{ V}$ , (c)  $9 - 4e^{-2t} \text{ V}$ ,  
 (d)  $5 + 5 \sin 4t \text{ V}$   
 7.9  $16e^{-4t} \text{ W}$   
 7.11 (a) 2 J, 2 s, (b) 16 V  
 7.13 (a) 3/2, 9/10 A, (b) 12, 12 V,  
 (c) 0, -6/5 A, (d) 0, -12 V/s  
 7.15 3 A, 3 A, -3/4 A, 15 V  
 7.17 10  $\mu\text{F}$   
 7.19 6, 0, -2 V  
 7.21  $20e^{-20t} \text{ V}$   
 7.23 (a)  $-10 \sin 10t \text{ mV}$ , (b)  $-50 \sin 20t \mu\text{W}$ ,  
 (c)  $5 \cos^2 10t \mu\text{J}$ , (d)  $50 \mu\text{W}$   
 7.25 72 J, -20 A/s  
 7.27 15 mA, -20 A/s  
 7.29 10 mH  
 7.31 12 mH  
 7.33 5, -20; 25, 20 V  
 7.35 20 V/s, 12 A/s  
 7.37 1 nF,  $10^{12} \Omega$   
 7.39 2 ou 10 V

## CAPÍTULO 8

- 8.1  $10e^{-100t} \text{ V}$   
 8.3 (a) 0,4 M $\Omega$ , 0,5  $\mu\text{F}$ , 16  $\mu\text{J}$ , (b) 36,8%  
 8.5  $8e^{-3t} \text{ V}$ ,  $e^{-3t} \text{ A}$   
 8.7  $0,9e^{-t} \text{ A}$   
 8.11  $5 + 10e^{-2t} + 5e^{-t} \text{ A}$   
 8.13 (a)  $V_0 e^{-t/RC}$ , (b)  $\frac{R}{R_1 + R} V_0 e^{-t/RC}$   
 8.15  $2e^{-8t} \text{ A}$   
 8.17  $-16e^{-4t} \text{ V}$   
 8.19  $-24e^{-4t} \text{ V}$ ,  $-0,3e^{-4t} \text{ A}$

- 8.21  $-6e^{-10^4 t} \text{ A}$   
 8.23  $2e^{-4t} \text{ A}$   
 8.25  $2 + 5e^{-2t} \text{ A}$ ,  $24 - 30e^{-2t} \text{ V}$   
 8.27  $6(e^{-4t} - 1) \text{ V}$   
 8.29  $6 - 2e^{-2t} \text{ A}$   
 8.31  $2(1 + e^{-16t}) \text{ A}$   
 8.33 (a)  $4 - 2e^{-3t} \text{ V}$ , (b)  $6e^{-t} - 4e^{3t} \text{ V}$ ,  
 (c)  $e^{-3t}(12t + 2) \text{ V}$   
 8.35  $4e^{-5t} + 8 \text{ V}$ ,  $3(e^{-5t} - e^{-3t}) \text{ A}$   
 8.37  $(14e^{-3t} - 12e^{-2t})u(t) \text{ V}$   
 8.39  $8(1 - e^{-3t}) \text{ V}$

## CAPÍTULO 9

- 9.3  $1,2e^{-t} - 0,2e^{-6t} \text{ A}$   
 9.5  $8e^{-2t} (\cos t - \sin t) \text{ V}$   
 9.7  $(1 + 4t)e^{-2t} \text{ A}$   
 9.9  $54e^{-t} - 9e^{-6t} \text{ V}$   
 9.11  $(4 + 2t)e^{-2t} \text{ A}$   
 9.13  $e^{-5t}(\cos 5t + 0,2 \sin 5t) \text{ A}$   
 9.15 (a)  $e^{-t}(\cos t + 4 \sin t) \text{ A}$ ,  
 (b)  $(1 + 3t)e^{-2t} \text{ A}$ , (c)  $3e^{-3t/2} - 2e^{-2t} \text{ A}$   
 9.17  $8e^{-2t} - 2e^{-8t} + 2 \text{ A}$   
 9.19  $6e^{-3000t} - 18e^{-1000t} + 12 \text{ mA}$   
 9.21  $3e^{-4t} + 9 \text{ V}$ ,  $6e^{-2t} + 6 \text{ V}$   
 9.23 (a)  $12[1 - e^{-t}(\cos t + \sin t)] \text{ A}$ ,  
 (b)  $6 - 12e^{-t} + 6e^{-2t} \text{ A}$ ,  
 (c)  $12 - (12 + 24t)e^{-2t} \text{ A}$   
 9.25  $(6 + 12t)e^{-2t} + 4 \text{ A}$   
 9.27  $-2e^{-2t} - e^{-3t} + 5 \cos 3t + \sin 3t \text{ A}$   
 9.29  $(2 + \frac{17}{2}t - 2t^2)e^{-t} \text{ A}$   
 9.31 (a)  $(2 - 12t)e^{-2t} - 2 \text{ V}$ ,  
 (b)  $(4 - 6t)e^{-2t} - 4 \cos 2t - \sin 2t \text{ V}$   
 9.33  $(4 + 12t)e^{-8t} + 2 \sin 8t \text{ V}$   
 9.35  $8e^{-2t} \sin 2t \text{ V}$   
 9.37  $-(10 + 10^4 t)e^{-1000t} + 10 \text{ V}$

## CAPÍTULO 10

- 10.1 (a) 100 V, (b) 45°, (c)  $\pi/4$ , (d) 5 ms,  
 (e)  $400\pi$ , (f) 200, (g) 62° (adiantado)  
 10.3 (a)  $v_1$  está adiantado em 60°, (b)  $v_1$  está adiantado em 67,4°,  
 (c)  $v_1$  está atrasado em 6,9°  
 10.5  $0,25 \cos(2 \times 10^6 t - 53,1^\circ) \text{ mA}$   
 10.7 5 k $\Omega$ , 1/15  $\mu\text{F}$   
 10.9  $10e^{j(4t - 28,1^\circ)} \text{ V}$ ,  $10 \cos(4t - 28,1^\circ) \text{ V}$   
 10.11 (a)  $20e^{j(2t + 15^\circ)} \text{ A}$ , (b)  $10 \cos(2t - 45^\circ) \text{ A}$ ,  
 (c)  $2 \sin(2t - 60^\circ) \text{ A}$   
 10.13 (a)  $5\sqrt{2} \cos(10t + 135^\circ)$ ,  
 (b)  $13 \cos(10t + 112,6^\circ)$ ,  
 (c)  $5 \cos(10t - 36,9^\circ)$ ,  
 (d)  $-10 \cos 10t$ , (e)  $5 \sin 10t$   
 10.15 (a)  $20 \angle -171,9^\circ \Omega$ , (b)  $1/\sqrt{2} \angle 15^\circ \text{ k}\Omega$ ,  
 (c)  $a/\alpha \Omega$   
 10.17 5  $\Omega$ , -5  $\Omega$ , 1/10 S, 1/10 S,  
 $\sqrt{2} \cos(2t + 45^\circ) \text{ A}$   
 10.19  $10 \cos(4t - 28,1^\circ) \text{ V}$   
 10.21  $2 \angle 53,1^\circ \Omega$ ,  $3 \angle -53,1^\circ \text{ A}$ ,  
 $3 \cos(2t - 53,1^\circ) \text{ A}$   
 10.23  $20 \sin 1000t \text{ mA}$ ,  $4 \cos 1000t \text{ V}$   
 10.25  $8 \cos(t - 53,1^\circ) \text{ A}$

- 10.27  $\sqrt{2} \cos(40,000t - 98,1^\circ)$  mA  
 10.29  $2 \cos(2t - 53,1^\circ)$  A,  
 $0,5 \cos(2t - 53,1^\circ)$  A  
 10.31  $50 \cos 15,000t$  V  
 10.33 (a)  $4 \cos(t + 36,9^\circ)$  A, (b)  $5 \cos 2t$  A,  
 (c)  $4 \cos(4t - 36,9^\circ)$  A  
 10.35  $\frac{3}{8} \cos 4t$  A  
 10.37  $2\sqrt{2} \cos(4000t - 135^\circ)$  mA  
 10.39  $-3e^{-2t} + e^{-6t} + 2\sqrt{5} \cos(6t - 26,6^\circ)$  A

## CAPÍTULO 11

- 11.1  $10 \cos(2t + 233,1^\circ)$  V  
 11.3  $\frac{3}{4} \cos 2t$  A  
 11.5  $24 \sin 4t$  V  
 11.9  $16\sqrt{2} \cos(4t - 45^\circ)$  V  
 11.11  $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(4t - 135^\circ)$  V  
 11.13  $2\sqrt{2} \cos(4t - 135^\circ)$  V  
 11.15  $3\sqrt{2} \cos(1000t + 45^\circ)$  mA  
 11.17  $2\sqrt{5} \cos(4t - 10,3^\circ)$  V  
 11.19  $2\sqrt{2} \cos(4t - 135^\circ)$  V  
 11.21  $-4 \sin 3000t$  mA  
 11.23  $8 \cos t$  V  
 11.25  $6\sqrt{2} \cos(t + 135^\circ)$  V  
 11.27  $4 + \sqrt{2} \cos(2t - 45^\circ)$  V  
 11.29  $3 \cos 2t + 12 \cos(3t + 7,4^\circ)$  V  
 11.31  $I_{sc} = \frac{9}{65}(7 - j4)$  A,  
 $Z_{th} = \frac{18 + j1}{5} \Omega$ ,  $i_1 = \cos 2t$  A  
 11.33  $V_{oc} = \frac{10}{3} \angle 0^\circ$  V,  $Z_{th} = -j\frac{4}{3} \Omega$ ,  
 $v = 2 \cos(8t - 53,1^\circ)$  V  
 11.35  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(1000t - 135^\circ)$  V  
 11.37  $0,5 \cos(3t + 126,9^\circ)$  A  
 11.39  $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ , 1 H,  $\sin 2t$  V

## CAPÍTULO 12

- 12.1 500 W  
 12.3  $\frac{3}{2} RI_m^2$   
 12.5  $\frac{8}{5}$  W  
 12.7  $P_{100\Omega} = 4000$  W,  $P_{200\Omega} = 400$  W,  
 $P_x = -4400$  W  
 12.9 3,4 W  
 12.11 145 W  
 12.17 (a) 2 W, (b)  $\frac{25}{12}$  W, (c)  $\frac{4}{3}$   $\Omega$   
 12.19 (a) 10 V, (b) 9 V, (c) 8,72 V  
 12.21 4 V (valor eficaz)

- 12.23  $\frac{1}{4}$  A (valor eficaz)  
 12.27  $0,6$  (atrasado)  $-\frac{25}{4} \Omega$   
 12.29 30 W,  $-18$  vars,  $30 - j18$  VA,  $\frac{1}{80}$  F  
 12.31  $5\sqrt{2} \angle 60^\circ$  A (valor eficaz)  
 12.33 (a) 1,6 mF, (b) 700  $\mu$ F  
 12.35 14 W, 2 vars,  $14 + j2$  VA  
 12.37 4 W  
 12.39  $3\sqrt{3}$  kW

## CAPÍTULO 13

- 13.1  $10\sqrt{3} \angle 90^\circ$  A (valor eficaz)  
 13.3  $2,31 \angle 6,9^\circ$ ,  $2,31 \angle -113,1^\circ$ ,  
 $2,31 \angle -233,1^\circ$  A (valor eficaz), 640 W  
 13.5  $20\sqrt{3}$  A (valor eficaz)  
 13.7  $5 \angle -53,1^\circ \Omega$   
 13.9  $2,66 - j10,32$  A (valor eficaz)  
 13.11  $I_{AN} = 24$  A (valor eficaz)  
 $I_{BN} = \frac{24}{5}[\sqrt{3} - 2 - j(2\sqrt{3} + 1)]$  A (valor eficaz)  
 $I_{CN} = 6(\sqrt{3} + j1)$  A (valor eficaz)  
 $I_{nN} = \frac{1}{5}[-(72 + 54\sqrt{3}) +$   
 $j(48\sqrt{3} - 6)]$  A (valor eficaz)  
 13.13 24 A (valor eficaz)  
 13.15  $\frac{100}{\sqrt{3}}$  A (valor eficaz) 15 kW  
 13.17  $100\sqrt{3}$  V (valor eficaz), 60 A (valor eficaz), 10,8 kW  
 13.19 17,62  $\mu$ F  
 13.21 20 A (valor eficaz)  
 13.23  $I_{aA} = 10 - j4$ ,  $I_{bB} = -20$ ,  
 $I_{cC} = 10 + j4$  A (valor eficaz)  
 13.25  $10\sqrt{3}$  A (valor eficaz) 7,2 kW  
 13.27  $I_{aA} = 17,32$ ,  $I_{bB} = -8,66 + j6,34$ ,  
 $I_{cC} = -8,66 - j6,34$  A (valor eficaz)  
 13.31 (a)  $2/\sqrt{3}$ ,  $4/\sqrt{3}$  kW, (b)  $2\sqrt{3}$  kW  
 13.35  $3\sqrt{3}$ ,  $1,5\sqrt{3}$ ,  $4,5\sqrt{3}$  kW  
 13.37 (a) 1, (b) 0, (c) 0,5 atrasado, (d) 0,5 adelantado,  
 (e) 0,866 adelantado  
 13.39  $1500\sqrt{3}$ ,  $-633,7\sqrt{3}$  W

## CAPÍTULO 14

- 14.1 (a)  $5 \angle -30^\circ$ , (b)  $1 \angle 45^\circ$ , (c)  $10 \angle -53,1^\circ$ ,  
 (d)  $5 \angle 0^\circ$   
 14.3  $-4e^{-t} \sin t$  A  
 14.5  $-16e^{-4t} \cos 2t$  V  
 14.7  $8e^{-2t} \sin t$  V  
 14.9  $\sqrt{2} \cos(t - 135^\circ)$  V  
 14.11  $4\sqrt{2} e^{-2t} \cos(2t + 45^\circ)$  V  
 14.13  $\frac{-2s}{s^2 + 4s + 8}$ ,  $2\sqrt{5}e^{-2t} \cos(4t + 116,6^\circ)$  V  
 14.15  $\frac{150}{s^2 + 15s + 75}$ ,  $-12e^{-10t} \sin 5t$  V

$$14.17 \frac{2}{(s+1)^2}, \frac{12}{13} e^{-4t} \cos(2t + 67,4^\circ) \text{ V}$$

$$14.19 \mathbf{V}_{oc} = \frac{16(2s+3)}{s}, \mathbf{Z}_{th} = \frac{6(s+2)}{s},$$

$$i = \sqrt{5} e^{-2t} \cos(4t - 26,6^\circ) \text{ A}$$

$$14.21 6e^{-t} - 6e^{-3t} - 12te^{-t} \text{ V}$$

$$14.23 e^{-3t}(-8 + \sin 6t) + 8 \text{ V}$$

$$14.25 \mathbf{z}_{11} = s, \mathbf{z}_{12} = \mathbf{z}_{21} = s, \mathbf{z}_{22} = \frac{s^2 + 250}{s},$$

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{s^2 + 250}{250s}, \mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21} = -\mathbf{y}_{22} = \frac{-s}{250}$$

## CAPÍTULO 15

$$15.1 \frac{s}{s^2 + s + 25}$$

$$15.3 \frac{6s}{s^2 + 10s + 16}$$

$$15.5 \frac{2s}{s^2 + 2s + 100}, \omega_0 = 10 \text{ rad/s}, |\mathbf{H}| = 1$$

$$15.7 \frac{1}{5} \text{ H}, 5 \text{ F}$$

$$15.11 R_1 = 5 \Omega, R_2 = 10 \Omega, R_3 = 1 \Omega, \\ \omega_{c1} = 0,95 \text{ rad/s}, \omega_{c2} = 1,05 \text{ rad/s}, \\ B = 0,1 \text{ rad/s}$$

$$15.15 \frac{\frac{1}{2}}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

$$15.17 \frac{\frac{2}{3}}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}, \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1 + \omega^6}}$$

$$15.19 R_1 = \frac{1}{2} \Omega, R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega, R_3 = 1 \Omega$$

$$15.21 |\mathbf{H}(j\omega)| = \frac{\omega^2}{\sqrt{1 + \omega^4}}; \omega_c = 1 \text{ rad/s}$$

$$15.23 \frac{\frac{1}{2}s^3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}, \frac{\frac{1}{2}\omega^3}{\sqrt{1 + \omega^6}}, \\ \omega_c = 1 \text{ rad/s}$$

$$15.25 \frac{(1/2)(s^2 + 1)}{s^2 + (1/2)s + 1}; R = 1 \Omega, L = 1 \text{ H}, \\ C = 1 \text{ F}$$

$$15.27 R_1 = 79,6 \text{ k}\Omega, R_2 = 159,2 \text{ k}\Omega, \\ R_3 = 15,92 \text{ k}\Omega, \text{ outros resistores de } 1\Omega \text{ tornam-se} \\ \text{resistores de } 15,92\text{k}\Omega.$$

$$15.29 R_1 = 1\Omega, R_2 = 2\Omega, \text{ resistores de } 1\Omega \text{ tornam-se} \\ \text{de } 10 \text{ k}\Omega, \text{ resistor de } 2\Omega \text{ torna-se de } 20 \text{ k}\Omega$$

$$15.31 \mathbf{H}(s) = \frac{s^3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}, L = 0,05 \text{ H}, \\ R's = 10 \text{ k}\Omega$$

$$15.33 1 \Omega \rightarrow 14,14 \text{ k}\Omega, 2 \Omega \rightarrow 28,28 \text{ k}\Omega, \\ \frac{1}{2} \Omega \rightarrow 7,07 \text{ k}\Omega$$

$$15.35 1 \Omega \rightarrow 4 \text{ k}\Omega, 2,5 \text{ H} \rightarrow 0,1 \text{ H}$$

$$15.37 |\mathbf{H}| = 1, \phi = -2 \tan^{-1} \frac{2\omega}{2 - \omega^2}$$

## CAPÍTULO 16

$$16.1 -50 \sin 100t \text{ V}$$

$$16.3 (a) 12, 26 \text{ V}, (b) 12, 26 \text{ V}$$

$$16.5 26, -40; 14, 20 \text{ V}$$

$$16.7 4(e^{-t} - 2e^{-2t}) \text{ V}$$

$$16.9 \frac{5\sqrt{2}}{6} \sin(2t + 135^\circ) \text{ V}$$

$$16.11 2,5\sqrt{2} \cos(2t + 135^\circ) \text{ V}$$

$$16.13 4 \text{ J}$$

$$16.15 8 \text{ J}$$

$$16.17 (a) 0,6 \text{ H}, (b) 0,3 \text{ H}, (c) 6 \text{ mH}$$

$$16.19 -4e^{-t} \text{ V}$$

$$16.23 e^{-t} - e^{-3t} \text{ A}$$

$$16.25 3 \cos 4t \text{ A}$$

$$16.27 4\sqrt{2} \cos(2t - 45^\circ) \text{ A}$$

$$16.29 \frac{s}{3s + 2}$$

$$16.31 \sqrt{2}e^{-t} \cos(t + 45^\circ) - e^{-t} \text{ A}$$

$$16.33 18 \text{ W}$$

$$16.35 (a) \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{\mathbf{N}_2}{\mathbf{N}_1}, \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{\mathbf{N}_1}{\mathbf{N}_2}, (b) 10/30^\circ \text{ A}, \\ 40/0^\circ \text{ V}$$

## CAPÍTULO 17

$$17.1 (a) a_0 = 3, a_n = 0, b_n = \frac{(-1)^n - 1}{n\pi}, \\ \omega_0 = 1$$

$$(b) a_n = \frac{2(-1)^n}{\pi(n^2 + 1)} \sinh \pi, \\ n = 0, 1, 2, \dots; b_n = -na_n, \\ n = 1, 2, 3, \dots; \omega_0 = 1;$$

$$(c) \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi t$$

$$17.7 \frac{8}{\pi} - \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \cos 4nt$$

$$17.9 \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\pi^2 + 4}{\pi^2 + 16}} \cos\left(\frac{\pi t}{2} + \tan^{-1} \frac{\pi}{2} - \right. \\ \left. \tan^{-1} \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2}{3\pi} \sqrt{\frac{9\pi^2 + 4}{9\pi^2 + 16}} \cos\left(\frac{3\pi t}{2} + \right. \\ \left. \tan^{-1} \frac{3\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{3\pi}{4}\right) + \dots$$

$$17.11 \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2 \pi^2} \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 + 1}{n^2 \pi^2 + 4}} \cos(n\pi t + \\ \tan^{-1} n\pi - \tan^{-1} \frac{n\pi}{2}) \text{ A}$$

$$17.13 \frac{8}{\pi} - \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(4nt + \tan^{-1} \frac{4n}{8n^2 - 1}\right)}{(4n^2 - 1)\sqrt{1 + 64n^2}} \text{ V}$$

$$17.19 \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n - 1} \sqrt{\frac{1 + (2n - 1)^2 \pi^2}{4 + (2n - 1)^2 \pi^2}} \sin \theta \text{ A}; \\ \theta = (2n - 1)\pi t + \tan^{-1} \frac{(2n - 1)\pi}{2 + (2n - 1)^2 \pi^2}; \\ \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left[(2n - 1)\pi t - \tan^{-1} \frac{(2n - 1)\pi}{2}\right]}{(2n - 1)\sqrt{4 + (2n - 1)^2 \pi^2}} \text{ V};$$

esquerda:

$$\frac{128}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (2n - 1)^2 \pi^2}{(2n - 1)^2 [4 + (2n - 1)^2 \pi^2]} \text{ W};$$

direita:

- $$\frac{128}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 [4 + (2n-1)^2 \pi^2]} \text{ W}$$
- 17.21  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{8}{\pi(1-4n^2)} e^{j4nt}$
- 17.23 (a)  $|c_0| = \frac{3}{2}$ ,  $\phi_0 = 0$ ;  $|c_{-n}| = |c_n| = 0$ ,  
 $n$  par;  $= 1/|\pi n|$ ,  $n$  ímpar;  $\phi_n = -90^\circ$ ,  
 $n = 1, 3, 5, \dots$
- 17.27 (a)  $e^{-j\omega/2} Sa(\omega/2)$ , (b)  $\frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + b^2}$ ,  
 (c)  $\frac{1 - e^{-(a+j\omega)}}{a + j\omega}$
- 17.29  $\frac{-j2\omega}{a^2 + \omega^2}$
- 17.31 (a)  $\frac{-j3}{13 - \omega^2 + j4\omega}$ , (b)  $\frac{2 + j\omega}{13 - \omega^2 + j4\omega}$ ,
- 17.33  $\frac{8e^{j\omega/2} \cos \frac{5\omega}{2} \sin \omega}{\omega}$
- 17.35 (a)  $\frac{a}{\pi(t^2 + a^2)}$ , (b)  $\frac{-2at}{\pi(t^2 + a^2)^2}$ ,  
 (c)  $\frac{a}{\pi[(t-2)^2 + a^2]}$
- 17.37 (a)  $-e^t u(-t)$ , (b)  $-te^t u(-t)$
- 17.39 (a)  $\frac{1}{2 + j\omega}$ , (b)  $(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$  V
- 17.41  $\frac{2 + j\omega}{1 + j\omega}$ ;  $y' + y = x' + 2x$

## CAPÍTULO 18

- 18.1 (a)  $\frac{2e^{-3s} - 1}{s}$  (b)  $\frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$
- 18.3 (a)  $\frac{k}{s^2 - k^2}$ , (b)  $\frac{2}{s(s+2)}$ , (c)  $\frac{18}{s(s^2 + 36)}$ ,  
 (d)  $\frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)}$
- 18.5 (a)  $\frac{s+1}{(s+1)^2 + 9}$ , (b)  $\frac{4}{(s+2)^2 + 16}$ ,  
 (c)  $\frac{s+5}{(s+3)^2}$ , (d)  $\frac{1}{s^2 + 8s + 15}$
- 18.7 (a)  $e^{-t}(6 \cos 3t - 2 \sin 3t)u(t)$   
 (b)  $e^{-2t}(2 \cos 3t + 2 \sin 3t)u(t)$   
 (c)  $te^{-2t}u(t)$   
 (d)  $e^{-t}(2 \cos t - 8 \sin t)u(t)$

- 18.9  $\frac{4s}{(s^2 + 4)^2}$
- 18.13 (a)  $(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$ , (b)  $(1 - \cos t)u(t)$
- 18.15  $(\cos t + \sin t)u(t)$
- 18.17 (a)  $\frac{(ae^{-at} - be^{-bt})u(t)}{a - b}$   
 (b)  $(2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$   
 (c)  $(-4 + 5e^{-t} + e^{-3t})u(t)$   
 (d)  $(2 - t + 3 \cos t - 2 \sin t)u(t)$
- 18.19 (a)  $e^{-t}(1 + \sin 2t)u(t)$   
 (b)  $e^{-t}(1 + t - \cos t - \sin t)u(t)$   
 (c)  $[-2 \sin 3t + 2e^{-2t}(2 \cos 3t - \sin 3t)]u(t)$   
 (d)  $[4e^{-2t} + e^{-t}(-4 \cos 2t + \frac{13}{4} \sin 2t - 5t \sin 2t - \frac{5}{2}t \cos 2t)]u(t)$
- 18.21 (a)  $\left[ e^{-t} \left( 1 - 3t + \frac{9}{2}t^2 \right) + e^{-4t} \right] u(t)$ ,  
 (b)  $\left[ 1 - e^{-t} \left( 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \right) \right] u(t)$
- 18.23 (a)  $-\cos t + \sin t$ , (b)  $e^{-t} \sin t$ ,  
 (c)  $1 + e^t \sin t$ , (d)  $3e^{-t} + 2 \sin t$ ,  
 (e)  $e^{-t} - e^{-3t} - 2te^{-3t}$ ,  
 (f)  $e^{-t}(1 + 2t) + e^{-3t}(-1 - 4t)$
- 18.25  $-1 + e^{-t}$
- 18.27  $2 + 10e^{-t} - 10e^{-4t}$  A
- 18.29  $e^{-3t} - 3e^{-t} + 4 \cos 3t + 2 \sin 3t$  A
- 18.37 (a)  $2 \sin 2t$  V, (b)  $2 \cos 2t$  V,  
 (c)  $2 \cos 2t + 2 \sin 2t$  V
- 18.39  $t \sin 3t$  A
- 18.41  $e^{-t} \left( 2 + t - \frac{1}{2}t^2 \right)$  A
- 18.43  $-e^{-t}(\cos 2t + 3 \sin 2t)$   
 $e^{-t}(2 \cos 2t + \sin 2t)$
- 18.45  $\frac{1}{5}[1 - e^{-3t}(\cos t + 3 \sin t)]u(t) -$   
 $\frac{1}{5}\{1 - e^{-3(t-1)}[\cos(t-1) +$   
 $3 \sin(t-1)]\}u(t-1)$
- 18.47  $\frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^4}}$
- 18.49  $\frac{\frac{\mu}{2R}}{s^2 + \left(2 - \mu + \frac{1}{R}\right)s + \frac{1}{R}}$ ,  
 (a)  $2e^{-t} \sin t u(t)$   
 $[1 - e^{-t}(\cos t + \sin t)]u(t)$  A,  
 (b)  $(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$ ,  
 $\left(\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)$  A,  
 (c)  $4te^{-2t}u(t)$ ,  $[1 - e^{-2t}(1 + 2t)]u(t)$  A

- Pólos e zeros, diagramas de, 395-397  
de funções de rede, 357
- Polar, forma de números complexos, 512
- Poliestireno, capacitores de, 151
- Polifásicas, fontes, 320
- Ponto, convenção de, 415-416
- Positiva (abc), seqüência de fases, 324
- Potência, 6-9  
aparente, 305-306, 313  
complexa, 308-312  
conservação da, 310  
conservação da (teorema de Tellegen), 26, 34-35, 300  
de pico, 295  
em quadratura, 309  
fonte que absorve, 10-11  
fonte que entrega, 10-11  
instantânea, 8, 17-18, 295  
definição, 7, 17  
em circuitos em série, 26-28  
expressão alternativa para, 18  
gráfico da, 16-17  
máxima, 295  
periódica, 295-297  
média, 17, 295-300  
fator de potência, 305-308  
superposição e, 300-303  
valor eficaz, 304-305  
wattímetro e, 312-313  
medição da, 312-313, 336-339  
em circuitos em regime permanente ca, 312-313  
em circuitos trifásicos, 336-339  
reativa, 309, 313  
Potência, fator de, 305-308  
Potência, ângulo do fator de, 305-306  
Potência nominal, 17  
Potência, transferência máxima de, 111-113  
Potencial, diferença de, 7  
Potencial (tensão), bobina de, 312  
Potencial, zero, 61  
Primário, enrolamento, 414, 422-423  
Proporcionalidade, princípio da, 92-95  
aplicado a circuitos fasoriais, 281  
Própria, indutância, 414  
Práticos, dielétricos, 151  
Prótons, 5  
PSpice (programa), 80-84, 519  
*Veja também* SPICE, análise com;  
SPICE, programa
- Q**
- Quadrada, onda, 184, 440, 441  
Quadratura, componente em, 309  
Quadratura, potência em, 309  
Quadripolo(s), 362-378  
aplicações dos, 369-374  
associações de, 374-378  
em cascata, 376-378  
em paralelo, 374-375  
paralela-série, 378  
série, 375-376  
série-paralela, 378  
com terminação dupla, 370-372
- Quilograma, 2, 3  
Quilo-ohms, 16  
Quilovolt-ampère, 306
- R**
- Radiano, frequência em, 239-241  
Ramos de gráficos, 121  
Rampa, função, 186  
RC, circuito(s):  
com entrada de degrau de tensão, 185-186  
constantes de tempo de, 165-168, 169-170  
em regime permanente cc, 167-168  
excitados, 172-174, 178-179  
resposta de tensão para, 174  
resposta de tensão em, 164  
sem fontes, 162-164  
superposição para análise de, 189-192
- Reais, fontes, 106-110  
Reais, resistores, 40-41  
Realimentação, operação com, 52  
Reatância, 257  
capacitiva e indutiva, 258  
Reativa, potência, 309, 312-313  
Rede, função(ões) de, 354-378, 385-386, 464  
definição, 354  
fator de escala das, 397-400  
frequências naturais das, 360-362  
função de transferência, 354  
pólos e zeros da, 356-358  
resposta natural da, 358-360  
superposição para definir, 355  
transformadas de Laplace e, 497-501  
*Veja também* Fourier, métodos de;  
Frequência, resposta(s) em
- Rede, topologia de, 120  
Rede(s):  
com excitação senoidal, em ressonância, 391  
definição, 2  
de três terminais (aterrada), 362  
escada, 94  
não-recíprocas, 366  
para a LKC generalizada, 23  
planar, análise de malha de, 128-129  
quadripolo, 362-378  
aplicações dos, 369-374  
associação em paralelo de, 374-375  
associação paralela-série de, 378  
associação série de, 375-376  
associação série-paralela de, 378  
com terminação dupla, 370-372  
conexão em cascata de, 376-377  
recíproca, 366  
ruído em, 304-305  
T, 363
- Redes, ruído em, 305  
Redes, teoremas de, 91-118  
aplicados a circuitos fasoriais, 277-281  
circuitos equivalentes de Thévenin e SPICE, 113-114  
circuitos lineares, 92-95  
princípio da superposição, 95-100  
teoremas de Thévenin e Norton, 91, 100-106  
fontes reais, 106-110  
transferência máxima de potência, 111-113
- Referência (dados), nó de, 61  
Referência, fasor de, 282  
Refletida, impedância, 425-427  
Resistivos, circuitos, 14-45  
amperímetros, voltmíetros e ohmímetros, 37-39  
características nos terminais de, 134  
circuitos fasoriais *versus*, 270  
lei de Ohm e, 15-19, 46  
leis de Kirchhoff e, 19-24, 60, 61  
lei da corrente (LKC), 20-21, 23-24  
lei da irradiação, 60  
lei da tensão (LKT), 21-24  
resistência em paralelo e divisão de corrente, 29-33
- resistência em série e divisão de tensão, 24-29  
resistores reais, 40-41
- Resistência(s), 257  
de condutores, 15  
de Thévenin, 101  
dualidade entre condutância e, 78  
em paralelo, 29-33  
em série, 25-29, 78  
equivalente, 25, 30, 32, 48  
em resistências em série, 78  
interna, 107  
negativa, 48
- Resistor(es), 48-49  
atribuição de tensão, 17  
definição, 15  
linear, 16-17  
definição, 92  
não-linear, 16-17  
potência nominal, 17  
reais, 40-41  
circuito integrado, 41  
resistor composto de carbono ou filme de carbono, 40  
símbolo de circuito para, 16  
*Veja também* Ohm, lei de; RC, circuito(s); RLC, circuito(s)
- Resposta(s):  
ao degrau, 185-189  
completa, 215-218, 239  
de corrente, em circuitos RL, 170  
de tensão, em circuitos RC, 164, 174  
em amplitude (módulo), 385  
em fase, 385  
em frequência, 384-410  
atenuação, 401  
com SPICE, 403-404  
decibel, 401-402  
diagramas de pólos e zeros de, 395-397  
fator de escala de rede, 397-400  
filtros, 387-390  
funções passa-faixa, 392-395  
índice de mérito, 392-395  
respostas em amplitude e fase, 385-387  
ressonância, 390-392, 394-395  
em regime permanente, 174  
forçada, 205, 211-213, 239  
a excitações periódicas, 449-452  
de circuitos excitados, 162, 173-174  
*Veja também* Fasor(es); Senóide(s)  
natural, 205-207, 239  
de circuitos excitados, 173  
de circuitos sem fontes, 162, 164  
de funções de rede, 358-360  
no domínio do tempo, 465  
transitória, 174  
análise com SPICE para circuitos de segunda ordem, 229-232  
análise com SPICE para circuitos simplificados, 192-194
- Ressonância, 390-392  
efeito do índice de mérito na, 394-395  
Ressonância, frequência de, 221, 390-392  
Retangular, forma de números complexos, 511  
RL, circuito(s):  
circuito fasorial, 284  
contendo fontes dependentes de tensão, 171  
em regime permanente ca, 299-300  
excitado, 177-178  
excitação senoidal em, 243-244  
resposta a função de excitação, 188

- relação carga-tensão para, 135  
relação dual entre indutor e, 152  
símbolo de circuito para, 135  
tensão em, 134-135, 138-139  
tensão nominal, 151  
tipos de, 151  
*Veja também RC, circuito(s); RLC, circuito(s)*
- Características, equações, 206
- Carbono ou filme de carbono, resistor composto de, 40
- Carga ( $Q, q$ ), 4-6  
conservação da, 20  
relação de tensão em capacitores, 134-136  
*Veja também Energia, elementos armazenadores de*
- Carhart, H. S., 161
- Cascade, associação de quadripolos em, 376-377
- Cavendish, Henry, 15
- Cc (corrente contínua), 6
- Cc, isolamento, 422
- Cc, regime permanente, 149-150  
circuito RC em, 167-168  
circuitos singulares, 153-156  
elementos armazenadores de energia e relações de dualidade e linearidade, 152-153
- Celestial Mechanics (Laplace), 471
- Central, frequência, 388
- Cerâmica, capacitor de, 151
- Chassi, 61
- Circuito(s):  
amplificadores, 47, 52-55  
análise nodal de:  
contendo amp. op's, 70-72  
contendo fontes de tensão, 66-69  
circuito RLC:  
paralelo, 218-223  
série, 223-237  
com dois terminais, 2  
contendo fontes de corrente, análise de malha de, 72-77  
curto, 79  
definição, 18  
digital, 184  
dual, 78-80  
equivalente, 25, 34  
de Norton, 101-102  
de Thévenin, 101, 113-114  
para transformadores lineares, 432-433  
excitado:  
resposta forçada de, 162, 173-174  
resposta natural de, 173-174  
fasorial, 262-265  
análise de malha de, 270-274  
análise nodal de, 270-274  
circuitos resistivos *versus*, 270  
princípio da proporcionalidade aplicado a, 280-281  
RL, 283  
superposição de, 277-278  
teoremas de rede aplicados a, 277-281  
teoremas de Thévenin e de Norton aplicados a, 278-281  
finalidade principal de, 5  
integrado, 151  
dual-in-line (DIP), 50  
integrador, 186  
inversor, 53  
laço único, 34  
linear:  
com elementos armazenadores de energia, 202  
definição, 92  
superposição de, 95-100  
teoremas de rede aplicados a, 92-95  
mutuamente acoplados, 412, 413  
não-linear, 95  
não-planar, 72, 78  
aberto, 78  
definição, 18  
parâmetro concentrado, 19  
como sistema conservativo, 21  
teoria de, 145  
planar, 72  
resistivo, 14-45  
amperímetros, voltímetros e ohmímetros, 37-39  
características dos terminais, 134  
circuitos fasoriais *versus*, 270  
lei de Ohm e, 15-19, 46  
leis de Kirchhoff e, 19-24, 60, 61  
resistência em paralelo e divisão de corrente, 29-33  
resistência em série e divisão de tensão, 24-29  
resistores reais, 40-41  
ressonância, seletividade em, 393-395  
RLC, circuito:  
paralelo, 218-223  
série, 223-226  
segunda ordem, 201-237  
com dois elementos armazenadores de energia, 202-203  
equações diferenciais de segunda ordem e, 202, 203, 204-207  
frequência com amortecimento crítico, 209-210  
frequência subamortecida, 209, 220-222  
frequência super-amortecida, 208, 219-220  
frequências naturais, 206-210  
métodos alternativos para obtenção das equações representativas, 226-235  
resposta completa de, 215-218  
resposta forçada de, 211-213  
SPICE para respostas transitórias de, 229-232  
sem fonte, resposta natural de, 162, 164  
simples, 61  
circuito resistivo com um só par de nós, 29-33  
definição, 24-29  
laço único, 24-29  
*Veja também RC, circuito(s); RLC, circuito(s)*  
singulares, 138, 145, 153-156  
síntese, 12  
série, potência instantânea em, 26-28  
transformado, 492-497  
trifásico, 319-343  
conexão em delta, 329-332  
medição da potência, 336-339  
sistemas Y-Y, 324-329  
SPICE para análise de, 339-340  
transformações Y-, 332-336  
*Veja também Elemento(s); Rede(s)*
- Circuitos, definição de análise de, 12
- Co-árvore em gráficos, 122
- Coefficiente(s):  
de acoplamento, 421  
de amortecimento, 221  
de Fourier, 441-442, 460  
determinante, 65-66, 74
- Cofatores, cálculo de determinante usando os, 506-507
- Complementar de equações diferenciais de segunda ordem, solução, 205-207
- Completa, onda senoidal retificada em onda, 440, 441
- Completa, resposta, 215-218, 239
- Complexa, frequência, 345-353  
senóide amortecida, 345-347  
impedância e admitância de, 350-353  
representações fasoriais da, 348-349  
*Veja também Rede, função(ões) de*
- Complexa, potência, 308-312  
conservação da, 310
- Complexo, plano, 511
- Complexos, números, 511-515  
análise de circuitos com o emprego de, 244-247  
conjugado de, 513  
forma polar de, 512  
forma retangular de, 511  
multiplicação e divisão de, 513-515  
soma e subtração de, 513  
*Veja também Fator(es)*
- Computador, análise de circuitos com auxílio de.  
*Veja SPICE, análise com*
- Concentrados, circuitos de parâmetros, 19  
como sistemas conservativos, 21
- Concentrados, teoria dos circuitos, 145-146
- Condução de calor, 439
- Condutância(s), 258  
definição, 18  
dualidade entre resistência e, 78  
em paralelo, 78
- Condutor(es):  
perfeito, 19  
resistência de, 15  
semicondutores, 41, 151
- Conjugado de número complexo, 513
- Conservação da carga, 20
- Conservação da potência (teorema de Tellegen), 26, 34-35, 300
- Conservação da potência complexa, 310
- Constante, fonte de tensão, 12
- Constantes, de tempo, 165-168
- Contínua (cc), corrente, 6
- Controladas, fontes. *Veja Dependentes (controladas), fontes*
- Convencional, corrente, 5
- Convolução, 478-480
- Convolução, teorema da, 478
- Corrente, bobina de, 312
- Corrente, divisão de, 29-33, 48-49
- Corrente, divisor de, 30-31
- Corrente, equações independentes, 47
- Corrente, fonte(s) de:  
análise nodal e, 62  
circuitos contendo, análise de malha de, 74-77  
controlada por corrente (FCCC), 47, 54  
controlada por tensão (FCCT), 47, 48, 54-55  
dependente, 47, 48  
independente, 10  
"matando", 96  
prática, 107-108
- Corrente, ganho de, 47
- Corrente, resposta, em um circuito RL, 170
- Corrente(s), 4-6, 61  
alternada (ca), 6  
atrasada, 254-255  
circulando para os nós, 20  
contínua (cc), 6  
convencional, 6  
de fase, 326

definição, 2  
 de fuga, 151  
 de laço, 75  
 de malha, 73  
 dualidade entre tensão e, 78  
 eficaz, 304  
 eletrônica, 5  
 exponencial, 6  
 fasorial, 252-256  
 fim de escala, 38  
 fundamentos, 73  
 ôhmica (perdas), 151  
 mudança instantânea na, 143  
 senoidal, 252

Corrente de voltmímetros, sensibilidade a, 39  
 Corrente elétrica, 1  
 Corrente-tensão, relações, 7  
 para elementos passivos, 270

Corta-faixa, filtros, 389-390  
 Corte, pontos de, 388  
 Corte de gráficos, conjunto de, 125-126  
 Coulomb (C), 2, 3, 5  
 Coulomb, Charles Augustin de, 3  
 Cramer, regra de, 64, 505-507  
 Crítico, caso com amortecimento de frequências naturais, 209-210, 222

Curto-circuito, 78  
 admitâncias (parâmetros), 365  
 definição, 18

**D**

Dados (de referência), nó de, 61  
 D'Arsonval, medidor de, 38  
 Davy, Sir Humphry, 133  
 Decibel (dB), 401-402  
 Delta, conexão em, 329-332  
 Dente de serra, corrente, 6  
 Dente de serra, onda, 440, 441, 442-444  
 Dependentes (controladas), fontes, 46-59  
 amplificadores operacionais, 50-52  
 circuitos amplificadores, 52-55  
 circuitos amplificadores e, 47-48  
 circuitos com, 48-49  
 fontes de corrente, 47-48  
 fontes de tensão, 11, 47, 48

Desacopladas, equações, 203  
 Determinantes, 505-507  
 cálculo usando menores ou cofatores, 505-507

Dielétrico (isolador), 134  
 prático, 151

Diferença de potencial, 7  
 Diferenciação (D), operador de, 227-228  
 Diferenciais, equações:  
 de segunda ordem, 202, 203, 204-205  
 ordem das, 163  
 resposta natural (solução complementar) para, 205-207

Digitais, circuitos, 184  
 Dinâmicos, elementos de circuitos. *Veja* Capacitor(es); Indutor(es)

Dirac, Paul A. M., 480  
 Dirichlet, condições de, 442  
 Discreto, espectro de amplitude, 456-457  
 Discreto, espectro de fase, 456-457  
 Divisão:  
 de corrente, 29-33, 48  
 de números complexos, 514-515  
 de tensão, 26, 48

Dois terminais, elementos com, 2  
 Duais, circuitos, 78-80  
 Dualidade, 78-80  
 Dual-in-line package (DIP), 50  
 Dupla, quadrípulo com terminação dupla, 370-372  
 Duplo, notação em subíndice, 7, 320-322

## E

Eccles, W. H., 319  
 Edison, efeito, 269  
 Edison, Thomas A., 269, 319  
 Eficazes, valores, 295, 304-305  
 Electrophorus, 1  
 Elemento(s):  
 ativo, 10-11  
 com dois terminais, 2  
 de corrente, 73  
 ideal, 11  
 linear, 92  
 multiterminal, 2  
 passivo, 10-11, 17  
 relação tensão-corrente para, 270  
 sem perdas, 298  
*Veja também* Energia, elementos armazenadores de

Elétrica, análise da corrente, 1-13  
 análise de circuito, 12  
 carga e corrente, 4-6  
 definições e unidades, 2-4  
 elementos passivos e ativos, 10-11  
 tensão, energia, potência, 6-9

Elétrica, bateria, 1  
 Eletricidade, tipos de, 1  
 Elétrico, definição de campo, 137  
 Eletrolítico, capacitor, 151  
 Eletrônica, corrente, 5  
 Eletrônicos, amplificadores, 302  
 Elétrons, 5  
 Energia, 6-9  
 Energia, elementos armazenadores de, 133-160  
 capacitor(es), 134-141  
 I F, 136  
 armazenamento de energia em, 151-152  
 circuito equivalente para, 151  
 circuitos singulares, 153-156  
 definição, 134  
 de placas paralelas, 134-135  
 em série e em paralelo, 139-141  
 ideal, 298  
 linear, 135, 152-153  
 prático, 151  
 regime permanente cc e, 149-150  
 relações de dualidade e linearidade, 152-153  
 relação corrente-tensão para, 135  
 relação dual entre indutor e, 152  
 símbolo de circuito para, 135  
 tensão no, 135, 138-139  
 tensão nominal, 151  
 tipos de, 151

circuitos lineares com, 202  
 indutor(es), 142-148  
 1 H, 143-144, 155-156  
 2 H, 145  
 armazenamento de energia em, 145-146  
 circuito equivalente para, 151-152  
 continuidade da corrente em, 145  
 definição, 142  
 em série e em paralelo, 146-148  
 ideal, 298  
 modelo simplificado de, 142  
 propriedade da linearidade para, 152-153  
 prático, 151  
 relação dual entre capacitor e, 152

símbolos de circuito e corrente-tensão para, 143, 143  
 resposta transitória para redes contendo, 192-194  
*Veja também* RC, circuito(s); RL, circuito(s); Segunda ordem, circuitos de

Enlace, de fluxo, 143-144, 412, 413-414  
 Enlaces em gráficos, 122-123  
 Enésima harmônica, 442  
 Entrada, terminais de, 50  
 Envoltória do espectro de amplitude, 456  
 Equação(ões):  
 características, 206  
 com integrais e derivadas, 489-492  
 de corrente, independentes, 127-129  
 de malha, 73  
 de nó, 61-63  
 desacopladas, 203  
 de tensão, independentes, 123-126  
 diferenciais:  
 de segunda ordem, 202, 203, 204-207  
 ordem de, 163  
 homogêneas, 204  
 solução geral de, 205-206  
 simultâneas, solução para:  
 usando determinantes, 505-507  
 usando eliminação de Gauss, 508-510

Equilibrado, sistema de tensões, 320, 324  
 Equivalente, capacitância, para associações em série e em paralelo de capacitores, 141  
 Equivalente, condutância, para condutâncias em paralelo, 78  
 Equivalente, resistência, 25, 30, 32, 48  
 para resistências em série, 78  
 Equivalente(s), circuito(s), 25, 34  
 de Norton, 101-102  
 de Thévenin, 101  
 para transformadores lineares, 432-433

Equivalentes, fontes, 110  
 Escada, rede, 94  
 Escala, fator de, rede, 397-400  
 Espiras, relação de número de, 427  
 Estado, variáveis de, 228  
 Estática, eletricidade, 1  
 Euler, fórmula de, 209, 516-518  
 Euler, Leonhard, 119, 209  
 Exatidão do pico em circuitos ressonantes, 393-395

Excitado(s), circuitos:  
 resposta forçada de, 162, 173-174  
 resposta natural de, 173-174

Excitação(ões):  
 em frequências naturais, 213-215  
 periódica, 449-452  
 senoidal, 238-268  
 amortecida, 358  
 circuito RL, 243-244  
 em circuitos RL, excitações complexas, 247-250  
 números complexos e, 244-247  
 propriedades das senóides e, 239-243  
 ressonância, 391  
*Veja também* Rede, função(ões) de; Fasor(es)

Exponenciais, funções, 166-167  
 Exponencial, corrente, 6

**F**

Faixa, largura da, 388  
 Faraday, Michael, 133, 135, 161  
 Farad (F), 133, 135  
 Fase, ângulo de, 240

- Fase, correntes de, 326  
 Fase, espectro discreto de, 455-457  
 Fase, impedância de, 325  
 Fase, resposta em, 385  
 Fase, tensões de, 324-325  
 Fasor(es), fasorial(is), 250-265  
   associações de impedâncias, 259-261  
   corrente, 252-256  
   de referência, 282  
   diagramas, 282  
   generalizados, frequência complexa e, 348-349  
   impedância e admitância, 256-259  
   leis de Kirchhoff aplicadas a, 259-261  
   limitações dos, 440  
   lugar geométrico dos, 283  
   notação em subíndice duplo e, 321-322  
   relações tensão-corrente para, 252-256  
   resolução de problemas no domínio do tempo usando, 252  
   tensão, 282  
   *Veja também* Ca, potência em regime permanente; Fourier, métodos de; Laplace, transformadas de
- Fasoriais de senóides amortecidas, representações, 348-349
- Fasorial(is), circuito(s),  
   análise de malha de, 275-276  
   análise nodal de, 270-274  
   circuitos resistivos *versus*, 270  
   princípio da proporcionalidade aplicado a, 280-281  
   RL, 284  
   superposição de, 277-278  
   teoremas de rede aplicados a, 277-281  
   teoremas de Thévenin e Norton aplicados a, 278-281
- Fasorial, tensão, 252-256
- Ferro, transformadores com núcleo de, 426
- Filtro(s), 274, 387-389  
   atenuação de, 402  
   corta-faixa, 389-390  
   passa-altas, 389-390  
   passa-baixas, 388, 389  
   resposta em amplitude de, 458-459  
   passa-faixa, 387-388
- Fim de escala, corrente de, 38
- Fluxo:  
   enlace de, 143, 412, 414  
   magnético, 142  
   mútuo, 414
- Fonte(s):  
   dependente (controlada), 46-59  
   equivalente, 111  
   impulsiva, 493  
   polifásica, 320  
   real, 106-110  
   transformações sucessivas de, método das, 108-110  
   *Veja também* Corrente, fonte(s) de; Tensão, fonte(s) de
- Forçada(s), resposta(s), 205, 211-213, 239  
   a excitações periódicas, 449-451  
   de circuitos excitados, 162, 173-174  
   *Veja também* Fasor(es); Senóide(s)
- Fourier, coeficientes de, 441-442, 460
- Fourier, Jean Baptiste Joseph, 439, 440
- Fourier, métodos de, 439-470  
   espectro de frequência, 455-457  
   propriedades de simetria, 446-449  
   resposta forçada a excitação periódica, 449-452  
   série de Fourier, 439  
     exponencial, 452-455  
     SPICE e, 466-468  
     trigonométrica, 440-445
- transformada de Fourier, 458-466  
   antitransformada, 460  
   operações, 462-466
- Frações, parciais, 476  
   método, 485
- Franklin, Benjamin, 5
- Frequência(s), 240  
   amortecida, 221  
   angular, 239-241  
   atenuação de, 401-402  
   central, 388  
   complexa, 344-345  
     senóide amortecida, 345-347  
   em radiano, 239-240  
   generalizada, 349  
   natural:  
     com amortecimento crítico, 209-210,  
       excitação na, 213-215  
       subamortecida, 209, 220-222  
       super-amortecida, 208, 219-220  
   neperiana, 346  
   ressonância, 221, 390-392
- Frequência, fator de escala para, 398-400
- Frequência, funções no domínio da, 252
- Frequência, resposta(s) em, 384-410  
   atenuada, 401-402  
   com SPICE, 403-404  
   decibel, 401-402  
   diagrama de pólos e zeros, 395-397  
   fator de escala de redes, 397-400  
   filtros, 387-390  
   funções passa-faixa, 392-395  
   índice de mérito, 392-395  
   respostas em amplitude e fase, 385-387  
   ressonância, 390-392, 394-395
- Frequências, espectro de, 455-457
- Frequência(s) natural(is):  
   com amortecimento crítico, 209-210,  
     222-223  
   excitação na, 213-215  
   subamortecida, 209, 220-222  
   super-amortecida, 208, 219-220
- Frequência, translação em, 476-477
- Fuga, correntes de, 151
- Fundamental, harmônica, 442
- Fundamental, período, 295
- Funções de excitação complexas. *Veja* Fasor(es)
- ## G
- Galvani, Luigi, 1  
*Galvanic Chain, Mathematically Treated, The* (Ohm), 46
- Ganho, 47
- Gauss, eliminação de, 65, 508-510
- Gauss-Jordan, método de, 510
- Generalizados, nós, 67
- Gráficos, conexos *versus* não-conexos, 121
- Gráficos, teoria dos, 119, 119-123, 229
- ## H
- Harmônica, de ordem  $n$  e fundamental, 442
- Híbridos, parâmetros, 366
- Helmholtz, Hermann von, 91, 101
- Henry, Joseph, 161, 201
- Hertz, Heinrich Rudolf, 91, 240, 344
- Hertz (Hz), 240
- Homogêneas, equações, 204  
   solução geral das, 205-206
- ## I
- Ideais, capacitores, 298
- Ideais, elementos, 11
- Ideais, indutores, 298
- Ideal, amp. op., 92-93
- Ideal, amperímetro, 37-38
- Ideal, ohmímetro, 38
- Ideal, transformador, 374, 412, 427-432
- Ideal, voltímetro, 38
- Imaginária, unidade, 511
- Imaginários, números, 511
- Impedância(s), 256-259  
   associações de, 259-262  
   de fase, 325  
   de senóides amortecidas, 350-353  
   de transferência, 363  
   em circuito aberto, 363  
   fator de escala de, 398-400  
   refletida, 425-427  
   *Veja também* Rede, função(ões) de
- Impulsiva, fonte, 493
- Impulso, função, 472, 480-484  
   propriedade da amostragem (separação), 482  
   unitário, 481
- Impulso, resposta ao, 500-501
- Incidente, conjunto de corte, 125
- Independência das equações, 119-132  
   aplicação a circuitos, 129-132  
   equações de corrente, 127-129  
   equações de tensão, 123-127  
   teoria dos gráficos, 119-123
- Independente, fonte de tensão, 10-11
- Indutiva, reatância, 258
- Indutância:  
   da bobina (indutância própria), 161  
   mútua, 412-419  
   própria, 414  
   *Veja também* Transformador(es)
- Indutor(es), 142-148  
   1 H, 143-144, 154-156  
   2 H, 145-146, 155-156  
   armazenamento de energia em, 145-146  
   circuito equivalente para, 151-152  
   continuidade da corrente em, 145  
   definição, 142  
   em série e em paralelo, 146-148  
   ideal, 298  
   modelo simplificado de, 142  
   propriedade da linearidade para, 152-153  
   prático, 151-152  
   relação dual entre capacitores e, 152  
   símbolos de circuito e de corrente-tensão para, 142-143  
   *Veja também* RC, circuito(s); RLC, circuito(s)
- Iniciais, condições, 149
- Instantânea, potência, 8, 17, 18, 295  
   definição, 8, 17  
   em circuitos em série, 26-28  
   expressão alternativa para, 18  
   gráfico da, 17  
   máxima, 295  
   periódica, 295-297
- Integrador, circuito, 186
- Integrado, resistor de circuito, 41
- Integrado(s), circuito(s):  
   dual-in-line package (DIP), 151
- Integrais e derivadas transformadas de Laplace aplicadas a, equações com, 489-492
- Integração, método do fator de, 176-178
- Internacional, Sistema de Unidades (SI), 2-3
- Inversor, circuito, 53-54
- Inversor de entrada, terminal, 50
- Isolador (dielétrico), 134  
   prático, 151
- ## J
- Joule, James P., 3, 294
- Joule (J), definição, 3



**K**

Kelvin, 2  
 Kelvin, Lord, 439  
 Kirchhoff, Gustav Robert, 19, 60  
 Kirchhoff, leis de, 19-24, 60, 61  
   aplicadas a excitações senoidais, 259-262  
   aplicadas a redes tendo somente  
     condutâncias e fontes de  
     corrente, 63  
 da corrente (LKC), 19-21, 23-24, 48-49,  
 60, 61  
   amp. op.'s e, 50  
   para nós generalizados, 67  
 da tensão (LKT), 21-24, 48-49, 60, 61  
   expressão no domínio do tempo  
   da, 492  
   *Veja também* Malha, análise de  
   de irradiação, 60

**L**

Laço, correntes de, 76  
 Laços, análise de. *Veja* Malha, análise de  
 Laplace, Pierre Simon, 471  
 Laplace, transformadas de, 202, 465, 471-504  
   antitransformada, 484-489  
   aplicações a equações com integrais e  
   derivadas, 489-492  
   circuitos transformados, 492-497  
   condições matemáticas para a existência  
   das, 472-473  
   definição, 472-474  
   funções de rede, 497-501  
   função impulso, 472, 473, 480-484  
   propriedade da amostragem  
   (separação) das, 482  
   unitário, 481  
   resultados especiais das, 474-480  
   antitransformadas, 475-476  
   convolução, 478-480  
   translação em frequência, 476-  
   477  
   translação no tempo, 477  
   unilateral, 472  
 Lenz, Heinrich F. E., 416  
 Lenz, lei de, 416  
 Leyden, jarro de, 1  
 Lineares, capacitores, 135  
 Linear(es), circuito(s):  
   com elementos armazenadores de  
   energia, 202  
   definição, 93  
   superposição de, 95-100  
   teoremas de rede aplicados a, 92-100  
 Lineares, elementos, 92  
 Lineares, resistores, 16-17  
   definição, 92  
 Linearidade:  
   das transformadas de Fourier, 462-463  
   para capacitores e indutores, 152-153  
 Linhas, espectro de, 456-457  
 Lugar geométrico de fasores, 283

**M**

Magnético, campo, 142  
 Magnético, fluxo, 142  
 Malha(s):  
   corrente de, 73  
   dualidade entre nós e, 78-80  
   equações de, 73  
 Malha, análise de, 61, 121, 228-229  
   de circuitos contendo fontes de corrente,  
   74-77  
   de circuitos fasoriais, 275-276  
   de redes planares, 128-129  
   *Veja também* Equação(ões)

Matar fontes, 96  
 Matemáticos, modelos, 14  
 Matriz, 509-510  
 Máxima de potência, teorema da transferência,  
   111  
 Maxwell, James Clerk, 344  
 Média, potência, 17, 295-300  
   fator de potência, 305-308  
   superposição e, 300-303  
   valor eficaz, 304-305  
   watímetro e, 312-313  
 Medidor, 2  
   de D'Arsonval, 38  
   definição, 3  
 Mega-ohms, 16  
 Meia onda, onda senoidal retificada em, 440, 441  
 Menores, cálculo de determinantes usando, 506-  
   507  
 Metálica (chassi), base, 61  
 Metálica, eletricidade, 1  
 Mho, 18  
 Modelos, matemáticos, 11  
 Módulo, 512  
 Módulo, resposta em, 385  
 Monofásicos, sistemas, a três fios, 320-323  
 Morse, Samuel F. B., 201  
 Mérito, índice de, 392-395  
 Mútua, indutância, 412-419  
 Mútuo, fluxo, 414  
 Multiplicação de números complexos, 513-515  
 Multiterminais, elementos, 2  
 Mutuamente acoplados, circuitos, 412, 413  
 Mylar, capacitores, 151

**N**

Nanossegundo, 4  
 Não-inversor, terminal de entrada, 50  
 Não-linear, circuito, 95  
 Não-lineares, resistores, 16  
 Não-planares, circuitos, 72, 78-80  
 Não-recíprocas, redes, 366  
 Não-referência, nós de, 61  
 Napier, John, 346  
 Natural, resposta, 205-207  
   das funções de rede, 358-360  
   de circuito excitado, 173-174  
   de circuitos sem fontes, 162, 164  
 Núcleo, perdas no, 151  
 Negativa (acb), sequência de fases, 324-325  
 Neper (Np), 345  
 Neperiana, frequência, 346  
 Neutros, terminais, 5-6  
 Nêutrons, 5  
 Newton (N), definição, 3  
 Newton, Sir Isaac, 3  
 Nó(s):  
   correntes circulando para, 19-20  
   definição, 19-20  
   de gráficos, 121  
   de não-referência, 61  
   de referência ou de dados, 61  
   de tensões, 61  
   de não-referência, 126  
   dualidade entre malhas e, 78-80  
   equação de, 62-63  
   super (generalizados), 67  
 Nodal, análise, 61-72  
   de circuitos contendo amp. op.'s, 69-72  
   de circuitos contendo fontes de tensão,  
   66-69  
   de circuito(s) fasorial(is), 270-274  
   de tensões, 61-66  
   elementos transformados úteis para, 494  
   fontes independentes de corrente e, 62  
 Norton, circuito equivalente de, 101-102  
 Norton, E. L., 101-102  
 Norton, teorema de, 100-106

aplicado a circuitos fasoriais, 277-281  
 Nulo, potencial, 61

**O**

Oersted, Hans Christian, 14  
 Ohm, Georg Simon, 15, 46  
 Ohm, lei de, 15-19, 46, 48-49, 92  
 Ôhmica (perdas), corrente, 151  
 Ohmímetros, 37-39  
   ideal, 37-38  
 Ohm ( $\Omega$ ), 16  
 Onda(s):  
   dente de serra, 440, 441, 442-444  
   quadrada, 184, 440, 441  
   senoidal, 239  
     retificada em meia onda e onda  
     completa, 440, 441  
     *Veja também* Senóide(s)  
 Operacionais (amp. op.'s), amplificadores, 47, 50-  
   53  
   análise nodal de circuitos contendo, 70-  
   72  
   ideal, 92-93  
   leis de Kirchhoff e, 50-51  
   realimentação em, 52  
   terminais em, 2, 50  
 Operador, de diferenciação (D), 227-228

**P**

Paralela-série, associação de quadripolos, 378  
 Paralelo, associações em:  
   de capacitores, 139-141  
   de placas paralelas, 134-135  
   de quadripolos, 374-375  
 Paralelo(s), circuito(s) RLC, 218-223, 391  
   caso com amortecimento crítico, 222-223  
   subamortecido, 220-221  
   super-amortecido, 219-220  
 Paralelo, condutâncias em, 78  
 Paralelo, indutores em, 146-148  
 Paralelo, resistência em, 29-33  
 Paralelo, ressonância em, 391, 392  
 Parâmetro(s):  
   concentrados, 19  
   em circuito aberto (z), 363  
   em curto-circuito (y), 365  
   híbridos, 366  
   *Veja também* Rede(s)  
 Parciais, frações, 476  
   método, 485  
 Particular, solução para equações diferenciais de  
   segunda ordem, 205  
 Passa-altas, filtro, 389-390  
 Passa-baixas, filtro, 389  
   atenuação do, 401  
   resposta em amplitude do, 458-459  
 Passa-faixa, filtro, 387-388  
 Passa-faixa, funções, 392-395  
 Passagem, faixa de, 388  
 Passivos, elementos, 10-11, 17  
 Perda:  
   de frequência (atenuação), 401-402  
   ôhmica, 151  
   no núcleo, 151  
 Periódica, extensão, 458  
 Periódica, função, 239  
 Permanente, resposta em regime, 174  
 Período, fundamental, 295  
 Pico, potência de, 295  
 Planares, análise de malha de redes, 128-129  
 Planares, circuitos, 72  
 Plano complexo, 511  
 Pólo(s):  
   de funções de rede, 356-358  
   múltiplo, 485  
   simples, 485

- Pólos e zeros, diagramas de, 395-397  
de funções de rede, 357
- Polar, forma de números complexos, 512
- Poliestireno, capacitores de, 151
- Polifásicas, fontes, 320
- Ponto, convenção de, 415-416
- Positiva (abc), seqüência de fases, 324
- Potência, 6-9  
aparente, 305-306, 313  
complexa, 308-312  
conservação da, 310  
conservação da (teorema de Tellegen), 26, 34-35, 300  
de pico, 295  
em quadratura, 309  
fonte que absorve, 10-11  
fonte que entrega, 10-11  
instantânea, 8, 17-18, 295  
definição, 7, 17  
em circuitos em série, 26-28  
expressão alternativa para, 18  
gráfico da, 16-17  
máxima, 295  
periódica, 295-297  
média, 17, 295-300  
fator de potência, 305-308  
superposição e, 300-303  
valor eficaz, 304-305  
wattímetro e, 312-313  
medição da, 312-313, 336-339  
em circuitos em regime permanente ca, 312-313  
em circuitos trifásicos, 336-339  
reativa, 309, 313
- Potência, fator de, 305-308
- Potência, ângulo do fator de, 305-306
- Potência nominal, 17
- Potência, transferência máxima de, 111-113
- Potencial, diferença de, 7
- Potencial (tensão), bobina de, 312
- Potencial, zero, 61
- Primário, enrolamento, 414, 422-423
- Proporcionalidade, princípio da, 92-95  
aplicado a circuitos fasoriais, 281
- Própria, indutância, 414
- Práticos, dielétricos, 151
- Prótons, 5
- PSpice (programa), 80-84, 519  
*Veja também* SPICE, análise com;  
SPICE, programa
- Q**
- Quadrada, onda, 184, 440, 441
- Quadratura, componente em, 309
- Quadratura, potência em, 309
- Quadrípulo(s), 362-378  
aplicações dos, 369-374  
associações de, 374-378  
em cascata, 376-378  
em paralelo, 374-375  
paralela-série, 378  
série, 375-376  
série-paralela, 378  
com terminação dupla, 370-372
- Quilograma, 2, 3
- Quilo-ohms, 16
- Quilovolt-ampère, 306
- R**
- Radiano, frequência em, 239-241
- Ramos de gráficos, 121
- Rampa, função, 186
- RC, circuito(s):  
com entrada de degrau de tensão, 185-186  
constantes de tempo de, 165-168, 169-170  
em regime permanente cc, 167-168  
excitados, 172-174, 178-179  
resposta de tensão para, 174  
resposta de tensão em, 164  
sem fontes, 162-164  
superposição para análise de, 189-192
- Reais, fontes, 106-110
- Reais, resistores, 40-41
- Realimentação, operação com, 52
- Reatância, 257  
capacitiva e indutiva, 258
- Reativa, potência, 309, 312-313
- Rede, função(ões) de, 354-378, 385-386, 464  
definição, 354  
fator de escala das, 397-400  
frequências naturais das, 360-362  
função de transferência, 354  
pólos e zeros da, 356-358  
resposta natural da, 358-360  
superposição para definir, 355  
transformadas de Laplace e, 497-501  
*Veja também* Fourier, métodos de;  
Frequência, resposta(s) em
- Rede, topologia de, 120
- Rede(s):  
com excitação senoidal, em ressonância, 391  
definição, 2  
de três terminais (aterrada), 362  
escada, 94  
não-recíprocas, 366  
para a LKC generalizada, 23  
planar, análise de malha de, 128-129  
quadrípulo, 362-378  
aplicações dos, 369-374  
associação em paralelo de, 374-375  
associação paralela-série de, 378  
associação série de, 375-376  
associação série-paralela de, 378  
com terminação dupla, 370-372  
conexão em cascata de, 376-377  
recíproca, 366  
ruído em, 304-305  
T, 363
- Redes, ruído em, 305
- Redes, teoremas de, 91-118  
aplicados a circuitos fasoriais, 277-281  
circuitos equivalentes de Thévenin e SPICE, 113-114  
circuitos lineares, 92-95  
princípio da superposição, 95-100  
teoremas de Thévenin e Norton, 91, 100-106  
fontes reais, 106-110  
transferência máxima de potência, 111-113
- Referência (dados), nó de, 61
- Referência, fasor de, 282
- Refletida, impedância, 425-427
- Resistivos, circuitos, 14-45  
amperímetros, voltmímetros e ohmímetros, 37-39  
características nos terminais de, 134  
circuitos fasoriais *versus*, 270  
lei de Ohm e, 15-19, 46  
leis de Kirchhoff e, 19-24, 60, 61  
lei da corrente (LKC), 20-21, 23-24  
lei da irradiação, 60  
lei da tensão (LKT), 21-24  
resistência em paralelo e divisão de corrente, 29-33  
resistência em série e divisão de tensão, 24-29  
resistores reais, 40-41
- Resistência(s), 257  
de condutores, 15  
de Thévenin, 101  
dualidade entre condutância e, 78  
em paralelo, 29-33  
em série, 25-29, 78  
equivalente, 25, 30, 32, 48  
em resistências em série, 78  
interna, 107  
negativa, 48
- Resistor(es), 48-49  
atribuição de tensão, 17  
definição, 15  
linear, 16-17  
definição, 92  
não-linear, 16-17  
potência nominal, 17  
reais, 40-41  
circuito integrado, 41  
resistor composto de carbono ou filme de carbono, 40  
símbolo de circuito para, 16  
*Veja também* Ohm, lei de; RC, circuito(s); RLC, circuito(s)
- Resposta(s):  
ao degrau, 185-189  
completa, 215-218, 239  
de corrente, em circuitos RL, 170  
de tensão, em circuitos RC, 164, 174  
em amplitude (módulo), 385  
em fase, 385  
em frequência, 384-410  
atenuação, 401  
com SPICE, 403-404  
decibel, 401-402  
diagramas de pólos e zeros de, 395-397  
fator de escala de rede, 397-400  
filtros, 387-390  
funções passa-faixa, 392-395  
índice de mérito, 392-395  
respostas em amplitude e fase, 385-387  
ressonância, 390-392, 394-395  
em regime permanente, 174  
forçada, 205, 211-213, 239  
a excitações periódicas, 449-452  
de circuitos excitados, 162, 173-174  
*Veja também* Fasor(es); Senóide(s)  
natural, 205-207, 239  
de circuitos excitados, 173  
de circuitos sem fontes, 162, 164  
de funções de rede, 358-360  
no domínio do tempo, 465  
transitória, 174  
análise com SPICE para circuitos de segunda ordem, 229-232  
análise com SPICE para circuitos simplificados, 192-194
- Ressonância, 390-392  
efeito do índice de mérito na, 394-395
- Ressonância, frequência de, 221, 390-392
- Retangular, forma de números complexos, 511
- RL, circuito(s):  
circuito fasorial, 284  
contendo fontes dependentes de tensão, 171  
em regime permanente ca, 299-300  
excitado, 177-178  
excitação senoidal em, 243-244  
resposta a função de excitação, 188

- resposta de corrente, 169  
sem fontes, 168-172  
superposição para análise de, 189-192
- RLC**, circuito(s):  
em paralelo, 218-223, 390-392  
caso com amortecimento crítico, 222-223  
caso subamortecido, 220-222  
caso super-amortecido, 219-220  
em série, 223-226
- S**
- Saída, terminal de, 50  
Secundário, enrolamento, 414, 422-423  
Segunda ordem, circuitos de, 201-237  
circuitos com dois elementos  
armazenadores de energia, 202-204  
frequências naturais, 207-210  
com amortecimento crítico, 209-210  
excitação em, 213-215  
subamortecimento, 209, 220-222  
super-amortecimento, 208, 219-220  
métodos alternativos para se obter as equações representativas, 226-229  
resposta completa de, 215-218  
resposta forçada de, 211-213  
**RLC**, circuito:  
equações diferenciais de segunda ordem e, 202, 203, 204-205  
resposta natural (solução complementar) de, 205-207  
paralelo, 218-223  
SPICE para respostas transitórias, 229-232  
série, 223-226  
Segunda ordem, equações diferenciais de, 202, 203, 204-205  
Segundo, 2  
Segundo (s), definição, 3  
Seletividade em circuitos ressonantes, 393-395  
Semicondutores, 41, 151  
Sem perdas, elementos, 298  
Senóide(s):  
amortecida, 345-347  
impedância e admitância da, 350-353  
representação fasorial da, 348-349  
propriedades da, 239-243  
Senoidais, integrais para funções, 297  
Senoidal, excitação, 238-268  
amortecida, 358  
análise com números complexos, 244-247  
*Veja também* Fazor(es)  
em circuitos *RL*, 243-244  
excitações complexas, 247-250  
fazor(es), fasorial(is), 250-265  
associações de impedâncias, 259-262  
circuitos, 262-265  
impedância e admitância, 256-259  
leis de Kirchhoff aplicadas a, 259-262  
relações tensão-corrente para, 252-256  
resolução de problemas no domínio do tempo usando, 252  
propriedades das senóides, 239-243  
ressonância, 390-391
- Veja também* Ca, potência em regime permanente
- Senoidal, onda, 239  
onda completa e meia onda, 440, 441  
Senoidal, tensão, 250  
Separação (amostragem) da função impulso, propriedade da, 482  
Série, associações em:  
de capacitores, 139-141  
de quadripolos, 375-376  
Série, circuito *RLC* em, 223-226  
Série, indutores em, 146-148  
Série-paralela, associação de quadripolos, 377-378  
Série, resistências em, 24-29, 78  
*Seven Bridges of Königsberg*, *The* (Euler), 119  
Siemens (S), 18  
Siemens, Werner e William, 18  
Simetria dos métodos de Fourier, propriedades de, 446  
Simplificados, circuitos, 61, 161-200  
circuito resistivo com um só par de nós, 29-33  
constantes de tempo de, 165-168, 169-170  
definição, 24-29  
funções de excitação e, 172-175  
função de grau unitário, 181-184  
laço único, 24-29  
método do fator de integração, 175-178  
procedimento simplificado para cálculo de correntes e tensões em, 178-181  
resposta ao degrau de, 185-189  
sem fonte, 162-164, 168-172  
SPICE para cálculo da resposta transitória para, 192-194  
superposição aplicada a, 189-192  
*Veja também* RC, circuito(s); *RLC*, circuito(s)  
Simétricos, componentes, 328  
Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis. *Veja* SPICE, análise com; SPICE, programa  
Simultâneas, soluções para equações:  
usando determinantes, 505-507  
usando eliminação de Gauss, 508-510  
Singulares, circuitos, 138, 145, 153-156  
Singulares, funções, 181  
Síntese, circuito (rede), 12  
Soldagem, entrada de, 361  
Soma de números complexos, 512-513  
SPICE, análise com, 80-84  
de circuitos trifásicos, 339-340  
de transformadores, 433-435  
para circuitos em regime permanente ca, 285-286  
para circuitos equivalentes de Thévenin, 113-114  
para resposta em frequência, 403-404  
para respostas transitórias:  
de circuitos de segunda ordem, 229-232  
de circuitos simplificados, 192-194  
para série de Fourier, 466-468  
SPICE, programa, 519-526  
declarações de controle da saída, 525-526  
declarações de controle da solução, 523-525  
declarações de dados, 519-523  
declarações de fim, 526  
declarações de título e comentários, 519  
Steinmetz, Charles Proteus, 238, 250  
Subamortecido, caso de frequências naturais, 209, 220-222  
Subgráfico, 122
- Substituição, 509  
Subtração de números complexos, 513  
Sucessiva, transformação de fontes, método da, 108-110  
Super-amortecido, caso de frequências naturais, 208, 219-220  
Supernós, 67  
Superposição:  
de circuitos fasoriais, 277-278  
de circuitos lineares, 95-100  
para definir funções de rede, 355  
potência média e, 300-303  
Susceptância, 258
- T**
- T, rede, 363  
Teflon, capacitores de, 151  
Telefone, 384  
Telégrafo, 201  
Tellegen (conservação da potência), teorema de, 26, 34-35, 300  
Tempo, constantes de, 165-168, 169-170  
Tempo, diferenciação no, 462-463  
Tempo, problemas no domínio do, resolução com fasores, 251-252  
Tempo, respostas no domínio do, 465  
Tempo, translação no, 477  
Tensão(ões), 6-9  
análise nodal da, 61-66  
atrasada, 254-255  
convenção de polaridade, 7  
de fase, 324-325  
definição, 2, 7  
de linha, 325  
de ramos, 123-125  
de sequência negativa (acb), 324  
de sequência positiva (abc), 324  
divisão, 24-29  
dualidade entre corrente e, 78  
em capacitores, 134-135, 138  
fasorial, 252-256  
mudanças abruptas ou instantâneas na, 56-58  
nó, 61  
nó de não-referência, 126  
representações, 7  
senoidal, 250  
em fase com corrente senoidal, 252-253  
sistema equilibrado de, 320, 324  
transformada, 492  
valor eficaz, 304  
Tensão-corrente, relações, 8  
para elementos passivos, 270  
Tensão, divisão de, 48  
Tensão, divisor de, 26  
Tensão, equações independentes de, 123-126  
Tensão, fasores de, 282-283  
Tensão, fonte(s) de:  
análise nodal de circuitos contendo, 66-69  
circuitos contendo, análise nodal de, 66-69  
constante, 10-11  
controlada por corrente (FTCC), 47, 48, 53, 54  
controlada por tensão (FTCT), 47, 48, 52, 70-71  
dependente (controlada), 11, 47, 48  
circuito *RL* contendo, 171  
independente, 10-11  
matar, 96  
prática, 106-108  
máxima potência entregue, 111  
Tensão, ganho de, 47  
Tensão nominal (de trabalho) de capacitores, 151  
Tensão (potencial), bobina de, 312

- Tensão, resposta de:  
  para circuito RC, 163-164  
  para circuitos RC excitados, 174
- Tensão, seguidor de, 52-53
- Tensões de ramos, 123-125
- Terra, 51
- Tesla, Nikola, 319, 411
- Thévenin, Charles Leon, 101
- Thévenin, circuito equivalente de, 101  
  SPICE e, 113-114
- Thévenin, teorema de, 91, 100-106  
  aplicado a circuitos fasoriais, 278-281
- Tolerância, 40
- Topologia, rede, 120
- Transferência, função de, 354
- Transferência, impedâncias de, 363
- Transformado, circuito, 492-497
- Transformador(es), 320, 411-438  
  acoplamento unitário, 421  
  análise com SPICE de, 433-435  
  armazenamento de energia em, 420-422  
  circuito com chave contendo, 422-423  
  circuito fasorial para, 417  
  circuitos com, 422-425  
  circuitos equivalentes, 432-433  
  com núcleo de ferro, 427  
  definição, 412  
  ideal, 374, 412, 427-432  
  impedância refletida, 425-427  
  indutância mútua, 412-419  
  isolamento cc dos enrolamentos
- primários e secundários, 422-423
- marcas de polaridade nos, 415-417
- Transistor(es), 2
- Transitória(s), resposta(s), 174  
  análise com SPICE:  
  de circuitos de segunda ordem, 229-232  
  de circuitos simplificados, 192-194
- Translação:  
  em frequência, 476-477  
  no tempo, 477-478
- Transmissão, parâmetros de, 367-368
- Trifásicos, circuitos, 319-343  
  conexão em delta, 329-332  
  medição da potência, 336-338  
  sistemas Y-Y, 324-329  
  desequilibrado, 328-329  
  equilibrado, 325-328  
  SPICE para análise de, 339-340  
  transformações Y-, 332-336
- Três terminais (aterradas), redes com, 362
- U**
- Um só par de nós, circuito resistivo com, 29-33
- Único, circuitos com laço, 34
- Unitário, função degrau, 181-184
- Unitário, função impulso, 481
- Unitário, transformador com acoplamento, 421
- V**
- Vail, Alfred, 201
- VA, medidor de, 313
- Variáveis, estado, 228
- Volt, 1
- Volta, Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio, 1, 7
- Volt-ampères (VA), 305
- Voltímetros, 37-40  
  ideal, 38  
  sensibilidade a corrente de, 39
- W**
- Watson, Thomas, 384
- Watt, James, 3
- Wattímetro, 312-313, 336-339
- Watt (w), definição, 3
- Westinghouse, George, 319, 411
- Y**
- Y, parâmetros, 365
- Y-, transformações, 332-336
- Y-Y, sistemas trifásicos, 324-329  
  equilibrados, 325-329
- Z**
- Z, parâmetros, 363
- Zeros das funções de rede, 356-358