



Rafael Marinho de Araújo

Impedância de Entrada de Antenas Cilíndricas Embutidas



Universidade Federal de Pernambuco

Recife
2022

Rafael Marinho de Araújo

Impedância de Entrada de Antenas Cilíndricas Embutidas

Trabalho apresentado ao Programa de Graduação em Engenharia da Computação do Centro de Informática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia da Computação.

Área de Concentração: Antenas

Orientador: Odilon Maroja da Costa Pereira Filho

Recife

2022

ABSTRACT

Embedded cylindrical antennas are antennas printed on dielectrics that fill cavities in cylindrical conductors. They have mechanical properties that decrease drag in aerospace applications, in addition to electrical properties such as loose coupling between elements of an array. In addition, hybrid antennas, which have 2 of their edges grounded, have the additional property of low cross polarization . This property is important in systems that use polarization-division multiplexing (2 signals occupying the same spectrum, in different polarizations). In this work, the numerical method called Method of Moments (MoM), implemented in Matlab, is used to estimate the input impedance of a built-in cylindrical antenna. The results obtained were compared with those obtained by P.C Ribeiro Filho.

Keywords: Antennas, Method of Moments, Embedded cylindrical antennas, Matlab

RESUMO

Antenas cilíndricas embutidas são antenas impressas sobre dielétricos que preenchem cavidades em condutores cilíndricos. Elas têm propriedades mecânicas que diminuem o arrasto em aplicações aeroespaciais, além de propriedades elétricas como baixo acoplamento entre elementos de um conjunto. Já antenas híbridas, possuem 2 de suas aristas aterradas, garantindo a propriedade extra de baixa polarização cruzada. Esta propriedade é importante em sistemas que utilizam multiplicidade de polarização (2 sinais ocupando o mesmo espectro, em polarizações distintas). Neste trabalho, é utilizado o método numérico denominado de Método dos Momentos (MoM), implementado em *Matlab*, para estimar a impedância de entrada de uma antena cilíndrica embutida. Os resultados obtidos foram comparados com os obtidos por P.C Ribeiro Filho.

Palavras-chave: Antenas, Método dos Momentos, Antenas Cilíndricas Embutidas, Matlab

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais que me apoiaram nessa jornada de 6 anos, que não acaba por aqui, especialmente por estarmos a 820Km de distância. Agradeço também aos meus parentes e amigos na "Terra da Alegria", Salvador, pela apoio dado nesses 6 anos.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Odilon, por me dar todo o apoio necessário na escrita deste trabalho, topei o desafio de abordar um tema um tanto quanto complexo e sem ele isso não seria possível. Gostaria de agradecer a Profa. Edna pelo imenso apoio dado a mim e tantos outros alunos na competição de sistemas embarcados, este foi um grande marco na minha vida acadêmica e sem ela não seria possível. Também gostaria de agradecer ao Prof. Abel que fez parte de praticamente toda minha vida acadêmica, fazem praticamente 6 anos que estou na monitoria de Sistemas Digitais e aprendi muito com isso. Por fim, gostaria de agradecer ao Prof. Alexandre já que foi através dele que dei meu pontapé inicial na vida acadêmica e os 2 anos de pesquisa com ele foram de muito aprendizado.

Gostaria de agradecer também aos meus amigos do CIn, por sempre estarem comigo enfrentando as dificuldades do curso. Um agradecimento especial a Raphael pelos deliciosos cafés e a todo pessoal do laboratório de hardware.

LISTA DE FIGURAS

1	Foto de uma antena cilíndrica embutida (Retirado de Prêntice [1]) . . .	10
2	Geometria da antena analisada.	14
3	Campo elétrico e vetor normal na região interna.	15
4	Corrente magnética no interior da superfície.	16
5	Campo elétrico e vetor normal na região externa.	16
6	Paredes $\phi = \phi_1$ e $\phi = \phi_2$	17
7	Paredes $z = z_1$ e $z = z_2$	18
8	Parede $\rho = a$	18
9	Corrente magnética e vetor normal internos.	22
10	Corrente magnética e vetor normal externos.	25
11	Função de base senoidal.	26
12	Função de base rooftop.	26
13	Função de base em diferentes valores de p	27
14	Geometria da fita de alimentação da antena.	29
15	Geometria da cavidade fechada.	34
16	Impedância de entrada em comparação com os resultados do Prêntice .	59
17	Impedância de entrada com parâmetros da tabela 3 comparada com parâmetros da tabela 4, ambas para $P.M_{max} = 24$ e $P.P_{max} = 1$	60
18	Impedância de entrada para $P.M_{max} = 14$ e $P.P_{max} = 1$ com parâmetros da tabela 4 comparada a $P.M_{max} = 24$ e $P.P_{max} = 1$ com parâmetros da tabela 3	61
19	Impedância de entrada para $P.M_{max} = 14$ e $P.P_{max} = 3$ comparada a $P.M_{max} = 14$ e $P.P_{max} = 1$, ambas com parâmetros da tabela 4	62

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros de truncamento e suas equações	38
Tabela 2 – Dimensões da cavidade e da antena	58
Tabela 3 – Parâmetros para a figura 16	59
Tabela 4 – Parâmetros para as figuras 17 a 19	60

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	CONTEXTO	10
1.2	OBJETIVOS	11
1.3	ESTRUTURA	11
2	UMA BREVE REVISÃO DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL	12
2.1	EQUAÇÕES DE MAXWELL	12
2.2	MONOPOLOS MAGNÉTICOS	12
2.3	EQUAÇÕES DE MAXWELL NO DOMÍNIO FASORIAL	13
3	FORMULAÇÃO TEÓRICA	14
3.1	GEOMETRIA	14
3.2	APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA	15
3.2.1	Região interna	15
3.2.2	Região externa	16
3.3	EXPANSÃO DOS CAMPOS NA CAVIDADE	16
3.3.1	Condições de contorno nas paredes $\phi = \phi_1$ e $\phi = \phi_2$	17
3.3.2	Condições de contorno nas paredes $z = z_1$ e $z = z_2$	18
3.3.3	Condições de contorno na parede $\rho = a$	18
3.3.4	Transformada do vetor potencial elétrico	19
3.3.5	Campos eletromagnéticos na cavidade	20
3.4	FUNÇÃO DE GREEN PARA CORRENTE MAGNÉTICA NA REGIÃO INTERNA	22
3.4.1	Condições de contorno em $\rho = b$	22
3.5	EXPANSÃO DOS CAMPOS EXTERNOS	23
3.6	FUNÇÃO DE GREEN PARA CORRENTES MAGNÉTICAS NA REGIÃO EXTERNA	25
3.7	FUNÇÕES DE BASE $M_Z(\phi, Z)$	26
3.7.1	Transformada de Fourier na região externa	28
3.8	EXCITAÇÃO	29
3.9	CONDIÇÕES DE CONTORNO	30
3.9.1	Expansão das correntes M_z em funções de base	30
3.10	ELEMENTOS DA MATRIZ [Z]	31
3.10.1	Campo interno	31
3.10.2	Campo externo	32
3.11	ELEMENTOS DA MATRIZ [V]	32

3.12	IMPEDÂNCIA DE ENTRADA	33
3.12.1	Impedância devido à corrente magnética	33
3.12.2	Impedância devido ao <i>probe</i>	34
4	IMPLEMENTAÇÃO	36
4.1	MOM.M - FUNÇÃO <i>MAIN</i>	36
4.2	PARAMS.M - CRIAÇÃO DE <i>STRUCT</i> COM PARÂMETROS GLOBAIS	38
4.3	BUILDMAT.M - CÁLCULO DA MATRIZ DE TENSÃO	40
4.4	BUILDZMAT.M - CÁLCULO DA MATRIZ DE IMPEDÂNCIA	40
4.5	V.M - TENSÃO	41
4.6	Z_IN_M.M - IMPEDÂNCIA DEVIDO À CORRENTE MAGNÉTICA . .	42
4.7	Z_IN_F.M - IMPEDÂNCIA DEVIDO AO <i>PROBE</i>	42
4.8	HZ_IN_PROJ.M - PRODUTO INTERNO DE H_z PELA FUNÇÃO DE TESTE NO INTERIOR DA CAVIDADE	43
4.9	HZ_OUT_PROJ.M - PRODUTO INTERNO DE H_z PELA FUNÇÃO DE TESTE NO EXTERIOR DA CAVIDADE	44
4.10	CGQ1.M - INTEGRAL POR QUADRATURA DE GAUSS	45
4.11	I3.M - COEFICIENTE I3	48
4.12	I4.M - COEFICIENTE I4	49
4.13	M_Z_TEF.M - TRANSFORMADA EXPONENCIAL-FOURIER DA CORRENTE MAGNÉTICA NA DIREÇÃO Z	50
4.14	J_VF_TSS.M - TRANSFORMADA SENO-SENO DA DENSIDADE VOLUMÉTRICA DE CORRENTE	50
4.15	G_MZ_TFD.M - TRANSFORMADA DA FUNÇÃO DE GREEN NA REGIÃO INTERNA	51
4.16	G_MZ_TF0.M - TRANSFORMADA DA FUNÇÃO DE GREEN NA REGIÃO EXTERNA	51
4.17	CINV.M - CORREÇÃO DE K_{RHO} PARA A SOLUÇÃO FÍSICA	53
4.18	THETA_1.M - COEFICIENTE Θ_1	53
4.19	THETA_3_RHO.M - COEFICIENTE $\Theta_{3\rho}$	54
4.20	DJ.M - DERIVADA DA FUNÇÃO DE BESSEL DO PRIMEIRO TIPO . .	56
4.21	DH2.M - DERIVADA DA FUNÇÃO DE HANKEL DO SEGUNDO TIPO	56
5	RESULTADOS	58
5.0.1	Impedância de entrada em diferentes parâmetros	60
6	CONCLUSÃO	63
6.1	TRABALHOS FUTUROS	63
A	ANÁLISE ASSINTÓTICA DAS FUNÇÕES Θ	64

REFERÊNCIAS 67

1

INTRODUÇÃO

1.1 Contexto

Antenas cilíndricas embutidas são antenas de formato cilíndrico impressas sobre materiais dielétricos que ocupam uma cavidade. Com esta técnica, a antena se conforma ao meio, garantindo propriedades mecânicas importantes para aplicações aeroespaciais, como diminuição do arrasto. Além disso, são garantidas propriedades elétricas como baixo acoplamento entre elementos de um conjunto. Já as antenas híbridas, são obtidas aterrando 2 de suas aristas e possuem uma propriedade extra de baixa polarização cruzada no plano H. Esta propriedade é particularmente desejada em sistemas de comunicação que utilizam multiplicidade de polarização, ou seja, 2 sinais ocupando o mesmo espectro, porém, em polarizações distintas. Na figura 1 é possível ver uma foto de uma antena cilíndrica embutida retirada de [1].

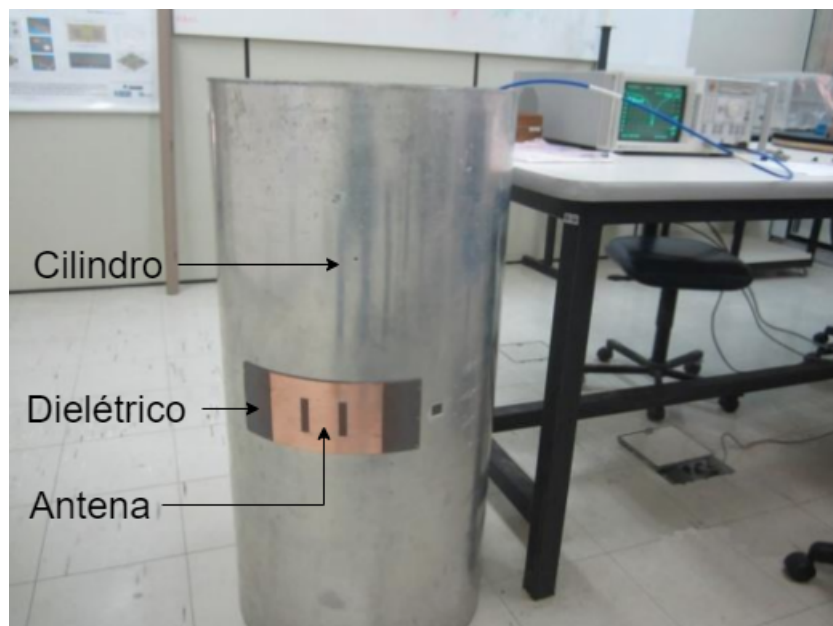


Figura 1: Foto de uma antena cilíndrica embutida (Retirado de Prêntice [1])

Calcular as propriedades de uma antena de forma analítica é virtualmente impossível, a menos que a geometria da antena seja muito simples. Com isso, surge a necessidade da utilização

de métodos numéricos para estimar suas propriedades. Existem algumas alternativas de métodos quando se trata de antenas, mas o Método dos Momentos (MoM) [2] funciona bem na geometria aqui abordada e portanto foi o método escolhido.

Alternativamente, é possível utilizar softwares específicos para modelagem ou simulação de antenas ou sistemas eletromagnéticos no geral. Entre eles destaca-se o HFSS.

Sendo assim, neste trabalho é apresentada uma formulação fundamentada no MoM para uma antena cilíndrica embutida, e a partir desta, foi feita uma implementação em Matlab [3] para estimar a impedância de entrada da antena. Os resultados são então comparados ao do Prêntice [1].

A impedância de entrada é uma das características mais importantes de uma antena, já que permite saber como ela se comporta como elemento de um circuito. Dessa forma, é possível projetar o circuito para casar a impedância de saída com a impedância de entrada da antena a fim de obter máxima transferência de potência.

1.2 Objetivos

Os objetivos gerais deste trabalho são:

Apresentar a formulação necessária para o MoM de uma antena cilíndrica embutida e sua implementação utilizando Matlab.

Os objetivos específicos deste trabalho são:

Estimar a impedância de entrada de uma antena cilíndrica embutida e avaliar os resultados comparando com outros trabalhos.

1.3 Estrutura

O trabalho está estruturado da seguinte forma: No capítulo 2 é feita uma breve revisão das equações de Maxwell. No capítulo 3 é apresentada a formulação teórica. No capítulo 4 é apresentada a implementação em Matlab e as aproximações numéricas necessárias. Por fim, no capítulo 5 são apresentados os resultados e comparações.

2

UMA BREVE REVISÃO DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

2.1 Equações de Maxwell

As equações de Maxwell são um conjunto de equações diferenciais nas quais se baseia todo o conhecimento de eletrodinâmica clássica (em conjunto com a lei da força de Lorentz). De [4] (1-1), as 4 equações são:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{D} &= q \\
 \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
 \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + J
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Onde \vec{D} é o campo deslocamento elétrico, \vec{B} é o campo magnético, \vec{E} é o campo elétrico, \vec{H} é o campo auxiliar H, q é a densidade volumétrica de carga e J é a densidade volumétrica de corrente.

2.2 Monopolos magnéticos

Nota-se que há uma quebra na simetria das equações de Maxwell. Nessa formulação, consideramos que cargas magnéticas, ou monopolos magnéticos, não existem. Até hoje, apesar da busca incessável, nenhum monopolo magnético foi encontrado [5]. Contudo, não está no escopo deste trabalho discutir a existência dos monopolos magnéticos, mas a inclusão deste nas equações de Maxwell nos fornece uma poderosa ferramenta analítica: o princípio da equivalência [4] (3-5).

O princípio da equivalência nos diz que podemos trocar uma distribuição de correntes em uma dada região por uma superfície imaginária com correntes (elétricas e magnéticas) equivalentes. A segunda configuração é dita como equivalente, já que produz os mesmos campos externos. Não só isso, mas podemos alterar os campos internos e até mesmo o material, e mesmo assim é possível obter uma configuração equivalente ao problema original.

De [6] (7.43) e das relações constitutivas $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ e $\vec{B} = \mu \vec{H}$ [6] (4.32), as equações de

Maxwell com adição de monopolos magnéticos são:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{D} &= q \\
 \nabla \cdot \vec{B} &= g \\
 \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - M \\
 \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + J
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Com a inclusão de monopolos magnéticos, precisamos adicionar um termo g ao divergente de \vec{B} que representa a densidade volumétrica de carga magnética. Na presença de monopolos magnéticos as linhas de campo de \vec{B} teriam início ou fim e por isso o divergente não é mais 0.

Além disso, da mesma forma que uma corrente elétrica influencia o rotacional de \vec{H} , uma densidade volumétrica de corrente magnética M teria influência no rotacional de \vec{E} .

2.3 Equações de Maxwell no domínio fasorial

Ao fazer análise de antenas, é comum trabalharmos no domínio fasorial. Dessa forma, reduzimos a complexidade da análise de 4 dimensões (3 espaciais e 1 temporal) para apenas 3. Sendo assim, precisamos transformar as equações de Maxwell para o domínio fasorial. De [4] (1-45):

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{D} &= q \\
 \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
 \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\vec{B} \\
 \nabla \times \vec{H} &= j\omega\vec{D} + J
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Adicionando cargas magnéticas:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{D} &= q \\
 \nabla \cdot \vec{B} &= g \\
 \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\vec{B} - M \\
 \nabla \times \vec{H} &= j\omega\vec{D} + J
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Esta é a forma das equações de Maxwell que é utilizada neste trabalho.

3

FORMULAÇÃO TEÓRICA

3.1 Geometria

A antena analisada neste trabalho é uma antena híbrida cilíndrica embutida do tipo M_z , o que significa que a corrente magnética está na direção z como será visto na sessão 3.2. A figura 2 mostra a geometria desta antena.

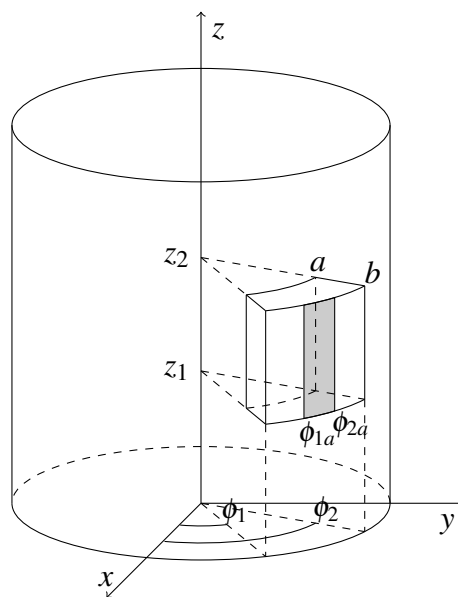


Figura 2: Geometria da antena analisada.

Nesta geometria, a cavidade é um setor cilíndrico formado no interior de um cilindro condutor perfeito de raio b . A cavidade se estende de z_1 a z_2 na direção z , entre os ângulos ϕ_1 e ϕ_2 e raio ρ de a a b . A cavidade é preenchida com um dielétrico sem perdas de permissividade relativa ϵ_r . O dielétrico será considerado sem perdas para evitar possíveis problemas computacionais nas rotinas do método dos momentos. As seguintes equações definem a cavidade:

$$\begin{cases} a \leq \rho \leq b \\ \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2 \\ z_1 \leq z \leq z_2 \end{cases}$$

Definimos então, $L = z_2 - z_1$ e $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$.

A antena é impressa sobre a superfície dielétrica de raio b entre z_1 e z_2 na direção z e entre os ângulos ϕ_{1a} e ϕ_{2a} , conforme as seguintes equações:

$$\begin{cases} \rho = b \\ \phi_{1a} \leq \phi \leq \phi_{2a} \\ z_1 \leq z \leq z_2 \end{cases}$$

Definimos $\Delta\phi_a = \phi_{2a} - \phi_{1a}$.

3.2 Aplicação do princípio da equivalência

A abordagem tomada neste trabalho é utilizar correntes magnéticas através do princípio da equivalência [4] (3-5). Para isso, substituímos a interface entre a cavidade e a região externa por um condutor elétrico perfeito e uma corrente magnética dada por:

$$\vec{M} = -\hat{n} \times \vec{E} \quad (3.1)$$

Onde \hat{n} é o vetor normal na interface e \vec{E} é o campo elétrico na interface.

3.2.1 Região interna

Na região interna da cavidade, o vetor normal da interface aponta para dentro do cilindro, e portanto para a direção radial negativa. Além disso, o campo elétrico está na direção ϕ e é tangencial a superfície $\rho = b$. A figura 3 mostra essa configuração.

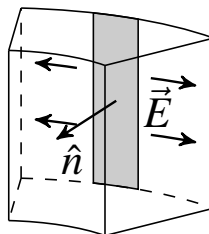


Figura 3: Campo elétrico e vetor normal na região interna.

Sendo assim, temos que $\hat{n} = -\hat{a}_\rho$ e $\vec{E} = E(b, \phi, z)\hat{a}_\phi$. Utilizando a equação (3.1):

$$\vec{M}_i = +\hat{a}_\rho \times (E(b, \phi, z)\hat{a}_\phi) = E(b, \phi, z)\hat{a}_z = M_z\hat{a}_z \quad (3.2)$$

Portanto, a corrente magnética superficial equivalente só tem direção \hat{a}_z , como mostrado na figura 4.

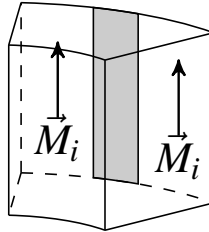


Figura 4: Corrente magnética no interior da superfície.

3.2.2 Região externa

O procedimento para a região externa é análoga à da região interna, porém o vetor normal está apontando na direção radial positiva, como mostra a figura 5.

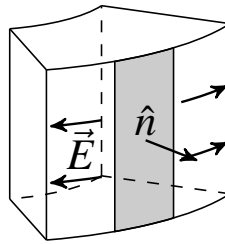


Figura 5: Campo elétrico e vetor normal na região externa.

Sendo assim, a corrente magnética é dada por:

$$\vec{M}_e = -E(b, \phi, z)\hat{a}_z = -M_z\hat{a}_z = -\vec{M}_i \quad (3.3)$$

Novamente, a corrente magnética tem apenas componente na direção z e nota-se que a corrente externa é o negativo da interna.

3.3 Expansão dos campos na cavidade

Como estamos trabalhando com correntes magnéticas, utilizaremos o potencial vetor elétrico \vec{F} , análogo ao potencial vetor magnético \vec{A} com correntes elétricas. Como mostrado nas equações (3.2) e (3.3), a corrente magnética possui apenas componentes na direção z e portanto $\vec{F} = F_z(\rho, \phi, z)\hat{a}_z$.

A partir de \vec{F} é possível achar todas as componentes dos campos elétricos e magnéticos. De Harrington [4] (5-19):

$$\begin{cases} E_\rho = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} & H_\rho = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 F_z}{\partial \rho \partial z} \\ E_\phi = \frac{\partial F_z}{\partial \rho} & H_\phi = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 F_z}{\partial \phi \partial z} \\ E_z = 0 & H_z = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_d^2 \right) F_z \end{cases} \quad (3.4)$$

$$k_d = \omega \sqrt{\mu \epsilon_d}$$

Nota-se que $F_z(\rho, \phi, z)$ satisfaz a equação de onda:

$$\nabla^2 F_z + k_d^2 F_z = 0 \quad (3.5)$$

A solução de $F_z(\rho, \phi, z)$ pode ser encontrada por separação de variáveis [4] (5-9):

$$F_z = h(\nu\phi) h_z(k_{z_d} z) B_\nu(k_{\rho_d} \rho) \quad (3.6)$$

As funções $h(\nu\phi)$ e $h_z(k_{z_d} z)$ são funções harmônicas e a função $B_\nu(k_{\rho_d} \rho)$ é uma combinação de funções de Bessel. Além disso $k_d^2 = k_{z_d}^2 + k_{\rho_d}^2$.

3.3.1 Condições de contorno nas paredes $\phi = \phi_1$ e $\phi = \phi_2$

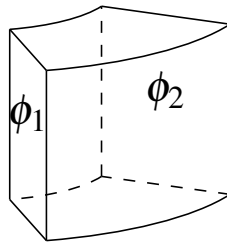


Figura 6: Paredes $\phi = \phi_1$ e $\phi = \phi_2$.

Nessas paredes os campos E_z e E_ρ são iguais a 0. Com isso:

$$E_\rho = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} = 0$$

Para $\phi = \phi_1$ e $\phi = \phi_2$, mudar os valores de z e ρ não altera E_ρ . Isto implica que:

$$\frac{dh(\nu\phi)}{d\phi} = 0$$

Aplicando ϕ_1 e ϕ_2 na derivada de $h(\nu\phi)$, através manipulação algébrica e ignorando as constantes, chegamos na equação:

$$h_n(\nu\phi) = \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \quad (3.7)$$

Onde $n = 0, 1, 2, \dots$ e $\nu = \frac{n\pi}{\Delta\phi}$.

3.3.2 Condições de contorno nas paredes $z = z_1$ e $z = z_2$

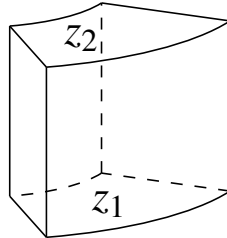


Figura 7: Paredes $z = z_1$ e $z = z_2$.

Nessas paredes os campos E_ϕ e E_ρ são iguais a 0. Com isso:

$$E_\rho = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} = -\frac{1}{\rho} \frac{dh(\nu\phi)}{d\phi} h_z(k_{z_d}z) B_\nu(k_{\rho_d}\rho) = 0$$

$$E_\phi = \frac{\partial F_z}{\partial \rho} = h(\nu\phi) h_z(k_{z_d}z) \frac{dB_\nu(k_{\rho_d}\rho)}{d\rho} = 0$$

Para $z = z_1$ e $z = z_2$, mudar os valores de ϕ e ρ não altera E_ρ nem de E_ϕ . Isto implica que:

$$h_z(k_{z_d}z) = 0$$

Analogamente ao caso anterior, chegamos na equação:

$$h_z(k_{z_d}z) = \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (3.8)$$

Onde $q = 1, 2, 3, \dots$ e $k_{z_d} = \frac{q\pi}{L}$.

3.3.3 Condições de contorno na parede $\rho = a$

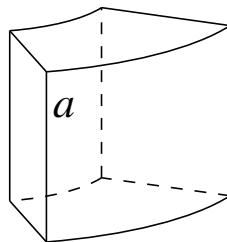


Figura 8: Parede $\rho = a$.

Nessa parede os campos E_ϕ e E_z são iguais a 0. Com isso:

$$E_\phi = \frac{\partial F_z}{\partial \rho} = h(\nu\phi)h_z(k_{z_d}z)\frac{d}{d\rho}B_\nu(k_{\rho_d}\rho) = 0$$

Para $\rho = a$, mudar os valores de z e ϕ não altera E_ρ . Isto implica que:

$$\frac{d}{d\rho}B_\nu(k_{\rho_d}\rho) = 0$$

Através se manipulação algébrica chegamos na seguinte equação:

$$B_\nu(k_{\rho_d}\rho) = d_{nq} \left(J_\nu(k_{\rho_d}\rho)H_\nu^{(2)'}(k_{\rho_d}a) - J_\nu'(k_{\rho_d}a)H_\nu^{(2)}(k_{\rho_d}\rho) \right) \quad (3.9)$$

Onde d_{nq} é um coeficiente a ser determinado dependendo da fonte e J_ν e $H_\nu^{(2)}$ são funções de Bessel. J_ν é a função de Bessel do primeiro tipo e $H_\nu^{(2)}$ é a função de Hankel do segundo tipo.

3.3.4 Transformada do vetor potencial elétrico

Substituindo (3.7), (3.8) e (3.9) em (3.6):

$$F(\rho, \phi, z) = \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) B_\nu(k_{\rho_d}\rho) \quad (3.10)$$

Onde $\nu = \frac{n\pi}{\Delta\phi}$ e $k_{\rho_d}^2 = k_d^2 - \left(\frac{q\pi}{L}\right)^2$

A solução geral da equação de onda (3.5) no interior da cavidade é:

$$F_{z_d}(\rho, \phi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} B_\nu(k_{\rho_d}\rho) \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (3.11)$$

A partir da equação (3.11), definimos o par de transformadas cosseno-seno:

$$\begin{aligned} F(\rho, \phi, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \hat{F}^{cs}(\rho, n, q) \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \\ \hat{F}^{cs}(\rho, n, q) &= \frac{\epsilon_n}{\Delta\phi} \frac{2}{L} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{z_1}^{z_2} F(\rho, \phi, z) \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) dz d\phi \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\text{Onde } \epsilon_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n \neq 1 \end{cases}$$

Comparando (3.11) (3.12):

$$\begin{aligned}\hat{F}^{cs}(\rho, n, q) &= B_V(k_{\rho_d}\rho) \\ &= d_{nq} \left[J_V(k_{\rho_d}\rho) H_V^{(2)'}(k_{\rho_d}a) - J_V'(k_{\rho_d}a) H_V^{(2)}(k_{\rho_d}\rho) \right]\end{aligned}\quad (3.13)$$

3.3.5 Campos eletromagnéticos na cavidade

Substituindo (3.12) e (3.13) em (3.4)

$$\begin{aligned}E_\rho &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} \Rightarrow \\ E_{\rho_d} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q)}{\rho} \frac{n\pi}{\Delta_\phi} \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta_\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right)\end{aligned}\quad (3.14)$$

A equação (3.14) pode ser identificada como uma transformada seno-seno, logo:

$$\begin{aligned}E_{\rho_d}(\rho, \phi, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \hat{E}_{\rho_d}^{ss}(\rho, n, q) \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta_\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \\ \hat{E}_{\rho_d}^{ss}(\rho, n, q) &= \frac{2}{\Delta_\phi} \frac{2}{L} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{z_1}^{z_2} E_\rho(\rho, \phi, z) \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta_\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) dz d\phi\end{aligned}\quad (3.15)$$

Comparando as equações (3.14) e (3.15):

$$\boxed{\hat{E}_{\rho_d}^{ss}(\rho, n, q) = \frac{n\pi}{\rho \Delta_\phi} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q)}\quad (3.16)$$

Analogamente para os outros casos:

$$\begin{aligned}E_\phi &= \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \Rightarrow \\ E_{\phi_d} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q) \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta_\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right)\end{aligned}\quad (3.17)$$

Identificando como transformada cosseno-seno, chegamos em:

$$\boxed{\hat{E}_{\phi_d}^{cs}(\rho, n, q) = \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q)}\quad (3.18)$$

$$\boxed{E_z = 0} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} H_\rho &= \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 F_z}{\partial \rho \partial z} \Rightarrow \\ H_{\rho d} &= \frac{1}{j\omega\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q) \frac{q\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta_\phi}(\phi - \phi_1)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Identificando como transformada cosseno-cosseno, chegamos em:

$$\boxed{\hat{H}_{\rho d}^{cc}(\rho, n, q) = \frac{q\pi/L}{j\omega\mu} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q)} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} H_\phi &= \frac{1}{j\omega\mu\rho} \frac{\partial^2 F_z}{\partial \phi \partial z} \Rightarrow \\ H_{\phi d} &= -\frac{1}{j\omega\mu\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q) \frac{n\pi}{\Delta_\phi} \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta_\phi}(\phi - \phi_1)\right) \frac{q\pi}{L} \cos\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Identificando como transformada seno-cosseno, chegamos em:

$$\boxed{\hat{H}_{\phi d}^{sc}(\rho, n, q) = -\frac{1}{j\omega\mu\rho} \frac{n\pi}{\Delta_\phi} \frac{q\pi}{L} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q)} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{1}{j\omega\mu} \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F_z \Rightarrow \\ H_{z d} &= \frac{1}{j\omega\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} k_{\rho d}^2 \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q) \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta_\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Identificando como transformada cosseno-seno, chegamos em:

$$\boxed{\hat{H}_{z d}^{cs}(\rho, n, q) = \frac{k_{\rho d}^2}{j\omega\mu} \hat{F}_{z_d}^{cs}(\rho, n, q)} \quad (3.25)$$

3.4 Função de Green para corrente magnética na região interna

3.4.1 Condições de contorno em $\rho = b$

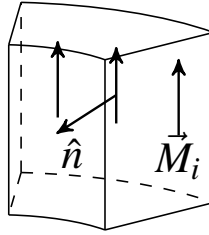


Figura 9: Corrente magnética e vetor normal internos.

Da equação (3.2) temos:

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_i &= M_z \hat{a}_z = -\hat{n} \times \hat{E}_d \\
 M_z \hat{a}_z &= +\hat{a}_\rho \times \left[E_{\phi_d} \hat{a}_\phi + E_{\rho_d} \hat{a}_\rho \right] \Big|_{\rho=b} \\
 \Rightarrow \boxed{M_z(\phi, z) = E_{\phi_d}(b, \phi, z)}
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Tomando a transformada cosseno-seno e utilizando as equações (3.18) e (3.13):

$$\begin{aligned}
 \hat{M}_z^{cs}(n, q) &= \hat{E}_{\phi_d}^{cs}(b, n, q) \\
 &= \frac{d}{d\rho} \hat{F}_{z_d}^{cs}(b, n, q) \\
 &= \frac{d}{d\rho} \left\{ d_{nq} \left[J_\nu(k_{\rho_d} b) H_\nu^{(2)'}(k_{\rho_d} a) - J_\nu'(k_{\rho_d} a) H_\nu^{(2)}(k_{\rho_d} b) \right] \right\} \\
 &= k_{\rho_d} d_{nq} \left[J_\nu'(k_{\rho_d} b) H_\nu^{(2)'}(k_{\rho_d} a) - J_\nu'(k_{\rho_d} a) H_\nu^{(2)'}(k_{\rho_d} b) \right]
 \end{aligned}$$

Chamando:

$$\boxed{\Theta_1(n, q) = J_\nu'(k_{\rho_d} b) H_\nu^{(2)'}(k_{\rho_d} a) - J_\nu'(k_{\rho_d} a) H_\nu^{(2)'}(k_{\rho_d} b)} \tag{3.27}$$

$$d_{nq} = \frac{\hat{M}_z^{cs}(n, q)}{k_{\rho_d} \Theta_1(n, q)} \tag{3.28}$$

Substituindo a equação (3.28) na equação (3.13):

$$\hat{F}_{M_z}^{cs}(\rho, n, q) = \hat{G}_{M_z}^{Fd}(\rho, n, q) \hat{M}_z^{cs}(n, q) \quad (3.29)$$

Onde:

$$\boxed{\hat{G}_{M_z}^{Fd}(\rho, n, q) = \frac{\Theta_{3\rho}(n, q)}{k_{\rho d} \Theta_1(n, q)}} \quad (3.30)$$

Sendo $\Theta_{3\rho}(n, q)$ definido por:

$$\Theta_{3\rho}(n, q) = J_\nu(k_{\rho d} \rho) H_\nu^{(2)'}(k_{\rho d} a) - J_\nu'(k_{\rho d} a) H_\nu^{(2)}(k_{\rho d} \rho) \quad (3.31)$$

Chamamos

A equação (3.30) é a transformada da função de Green para o potencial $F_{zd}(\rho, \phi, z)$ devido a uma corrente magnética na direção z na superfície $\rho = b$.

Uma vez determinado $\hat{F}_{M_z}^{cs}$ (3.29), é possível obter todas as componentes dos campos (equações 3.14 - 3.25).

3.5 Expansão dos campos externos

Já que a corrente magnética possui apenas direção z , então $\vec{F} = F_{z0} \hat{a}_z$. F_{z0} satisfaz a equação de onda:

$$\nabla^2 F_{z0} + k_0^2 F_{z0} = 0 \quad (3.32)$$

Onde $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$.

A solução por separação de variáveis é:

$$F_{z0}(\rho, \phi, z) = h(n\phi) h_z(k_z z) B_n(k_{\rho 0} \rho) \quad (3.33)$$

$h(n\phi)$ é uma função harmônica em ϕ que satisfaz a condição de periodicidade (período 2π):

$$h(n\phi) = e^{-jn\phi} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.34)$$

$h_z(k_z z)$ é uma função harmônica em z :

$$h_z(k_z z) = e^{-jk_z z} \quad k_z \in \mathbb{R} \quad (3.35)$$

$B_n(k_{\rho 0} \rho)$ é uma função de Bessel que satisfaz a condição de radiação ($\rho \rightarrow \infty$) z :

$$B_n(k_{\rho 0} \rho) = H_n^{(2)}(k_{\rho 0} \rho) \quad (3.36)$$

Onde:

$$k_{\rho_0} = \sqrt{k_0^2 - k_z^2} \quad (3.37)$$

Portanto:

$$F_{z_0}(\rho, \phi, z) = H_n^{(2)}(k_{\rho_0} \rho) e^{-jn\phi} e^{-jk_z z} \quad \begin{array}{l} n \in \mathbb{Z} \\ k_z \in \mathbb{R} \end{array} \quad (3.38)$$

Portanto, a solução geral para o potencial vetor magnético F_{z_0} é:

$$F_{z_0}(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{nk_z} H_n^{(2)}(k_{\rho_0} \rho) e^{-jn\phi} e^{-jk_z z} dk_z \quad (3.39)$$

Definindo o par de transformadas:

$$\begin{aligned} F_{z_0}(\rho, \phi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) e^{-jn\phi} e^{-jk_z z} dk_z \\ \hat{F}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F_{z_0}(\rho, \phi, z) e^{+jn\phi} e^{+jk_z z} d\phi dk_z \end{aligned} \quad (3.40)$$

Comparando (3.39) e (3.40):

$$\hat{F}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) = f_{nk_z} H_n^{(2)}(k_{\rho_0} \rho) \quad (3.41)$$

Os campos externos no domínio espacial são dados por (3.4). Podemos utilizar as mesmas equações no domínio da transformada ef (exponencial-Fourier) fazendo as seguintes substituições:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \phi} \rightarrow -jn \\ \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -jk_z \end{cases} \quad (3.42)$$

De (3.4) e (3.42):

$$\hat{E}_{\rho}^{ef}(\rho, n, k_z) = \frac{jn}{\rho} \hat{F}_{z_0}^{ef} \quad (3.43)$$

$$\hat{E}_{\phi}^{ef}(\rho, n, k_z) = \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{F}_{z_0}^{ef} \quad (3.44)$$

$$\hat{E}_z = 0 \quad (3.45)$$

$$\hat{H}_\rho^{ef}(\rho, n, k_z) = \frac{-k_z}{\omega\mu_0} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{F}_{z0}^{ef} \quad (3.46)$$

$$\hat{H}_\phi^{ef}(\rho, n, k_z) = -\frac{nk_z}{j\omega\mu_0\rho} \hat{F}_{z0}^{ef} \quad (3.47)$$

$$\hat{H}_z^{ef}(\rho, n, k_z) = \frac{k_{\rho_0}^2}{j\omega\mu_0} \hat{F}_{z0}^{ef} \quad (3.48)$$

Para obter os campos no domínio espacial basta substituir as equações (3.39) a (3.48) na equação (3.40).

3.6 Função de Green para correntes magnéticas na região externa

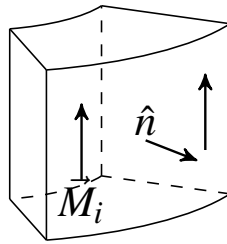


Figura 10: Corrente magnética e vetor normal externos.

Analogamente ao que foi feito na equação (3.26), temos:

$$\vec{M}_e = -E_\phi|_{\rho=b} \quad (3.49)$$

Utilizando a equação (3.3):

$$M_z = E_\phi|_{\rho=b} \quad (3.50)$$

Aplicando a transformada exponencial-Fourier:

$$\hat{M}_z^{ef}(n, k_z) = \hat{E}_\phi^{ef}(b, n, k_z) \quad (3.51)$$

Utilizando a equação (3.44):

$$\hat{M}_z^{ef}(n, k_z) = \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{F}_{z0}^{ef}(b, n, k_z) \quad (3.52)$$

Utilizando a equação (3.41):

$$f_{nk_z} = \frac{\hat{M}_z^{ef}(n, k_z)}{k_{\rho_0} H_n^{(2)'}(k_{\rho_0} b)} \quad (3.53)$$

Substituindo a equação (3.53) na equação (3.41):

$$\hat{F}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) = \hat{G}_{M_z}^{F_0}(\rho, n, k_z) \hat{M}_z^{ef}(n, k_z) \quad (3.54)$$

Onde:

$$\hat{G}_{M_z}^{F_0}(\rho, n, k_z) = \frac{H_n^{(2)}(k_{\rho_0} \rho)}{k_{\rho_0} H_n^{(2)'}(k_{\rho_0} b)} \quad (3.55)$$

A equação (3.55) é a transformada da função de Green para o potencial vetor $F_{z_0}(\phi, \rho, z)$ devido a uma corrente magnética na direção z na superfície de um condutor cilíndrico perfeito com $\rho = b$.

Uma vez determinado $\hat{F}_{z_0}^{ef}$ (3.54), todas as componentes dos campos (3.43 - 3.48) podem ser obtidas no domínio da transformada exponencial-Fourier, ou no domínio do espacial através da equação (3.40).

3.7 Funções de base $M_z(\phi, z)$

A abordagem tomada nesse trabalho foi utilizar funções de base senoidais da direção z e constantes na direção ϕ , como mostrado na figura 11. Outra opção é utilizar funções de base rooftop, como mostra a figura 12, mas é esperado que as funções senoidais deem melhores resultados e está fora do escopo deste trabalho comparar diferentes tipos de função de base.

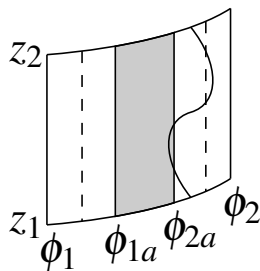


Figura 11: Função de base senoidal.

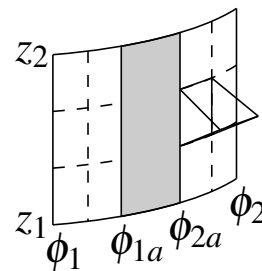


Figura 12: Função de base rooftop.

Definimos então M_z como:

$$M_{zmp}(\phi, z) = \sin \left[\frac{p\pi}{L}(z - z_1) \right] \quad \begin{array}{l} z_1 < z < z_2 \\ \phi_{1m} < \phi < \phi_{2m} \end{array} \quad (3.56)$$

Sendo que $m \in [1, M]$ e $p \in [1, P]$. A figura 13 mostra como a função de base se comporta em diferentes valores de p :

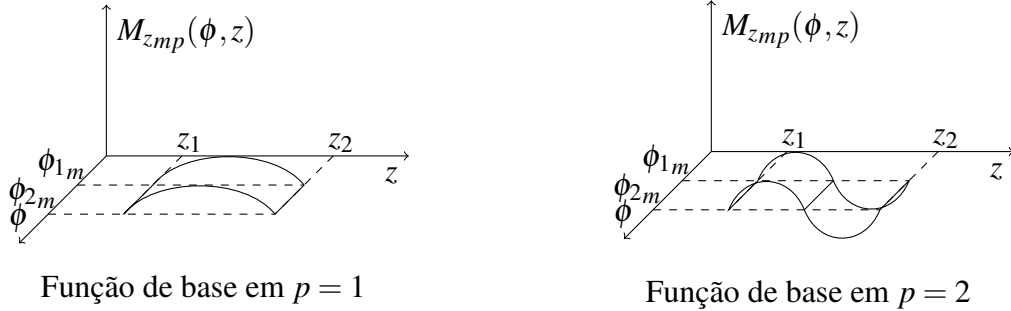


Figura 13: Função de base em diferentes valores de p .

A variável m é o índice das funções de base na direção ϕ e p é o modo de vibração. Os parâmetros M e P definem a resolução do método dos momentos, quanto maior forem estes parâmetros, mais o método converge, porém isso implica em maior custo computacional.

As variáveis ϕ_{1m} e ϕ_{2m} são determinadas a partir de m . Como as funções de base não são aplicadas sobre a antena (entre ϕ_{1a} e ϕ_{2a}), caso $m \leq M/2$:

$$\begin{aligned}\phi_{1m} &= \phi_1 + (m-1) \frac{\phi_{1a} - \phi_1}{M/2} \\ \phi_{2m} &= \phi_1 + m \frac{\phi_{1a} - \phi_1}{M/2}\end{aligned}$$

Caso $m > M/2$:

$$\begin{aligned}\phi_{1m} &= \phi_{2a} + (m-1-M/2) \frac{\phi_2 - \phi_{2a}}{M/2} \\ \phi_{2m} &= \phi_{2a} + (m-M/2) \frac{\phi_2 - \phi_{2a}}{M/2}\end{aligned}$$

Utilizando a equação (3.12) para transformar a equação (3.56):

$$\begin{aligned}\hat{M}_{zmp}^{cs}(n, q) &= \frac{\epsilon_n}{\Delta_\phi} \frac{2}{L} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{z_1}^{z_2} M_{zmp}(\phi, z) \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta_\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) dz d\phi \\ &= \frac{\epsilon_n}{\Delta_\phi} \frac{2}{L} \int_{z_1}^{z_2} \sin\left(\frac{p\pi}{L}(z - z_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) dz \int_{\phi_{1m}}^{\phi_{2m}} \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta_\phi}(\phi - \phi_1)\right) d\phi \\ &= \frac{\epsilon_n}{\Delta_\phi} \frac{2}{L} \left[\frac{L}{2} \delta_{pq} \right] [I_{3m}(n)]\end{aligned}\tag{3.57}$$

$$\Rightarrow \hat{M}_{zmp}^{cs}(n, q) = \frac{\epsilon_n}{\Delta_\phi} \delta_{pq} I_{3m}(n)$$

Onde:

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 1 & p = q \\ 0 & p \neq q \end{cases} \quad (3.58)$$

$$I_{3m}(n) = \begin{cases} \phi_{2m} - \phi_{1m} & n = 0 \\ \frac{1}{n\pi/\Delta\phi} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi_{2m} - \phi_1)\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi_{1m} - \phi_1)\right) \right] & n \neq 0 \end{cases} \quad (3.59)$$

3.7.1 Transformada de Fourier na região externa

Utilizando a equação (3.40):

$$\begin{aligned} \hat{M}_{zmp}^{ef}(n, k_z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_{zmp}(\phi, z) e^{+jn\phi} e^{+jk_z z} dz d\phi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{z_1}^{z_2} \sin\left(\frac{p\pi}{L}(z - z_1)\right) e^{+jk_z z} dz \int_{\phi_{1m}}^{\phi_{2m}} e^{+jn\phi} d\phi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi}{L}u\right) e^{+jk_z(u+z_1)} du \cdot I_{4m}(n) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Onde:

$$u = z - z_1 \quad (3.61)$$

$$I_{4m}(n) = \begin{cases} \phi_{2m} - \phi_{1m} & n = 0 \\ \frac{e^{jn\phi_{2m}} - e^{jn\phi_{1m}}}{jn} & n \neq 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

Utilizando a seguinte integral [7] (17.25.10):

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin(bx) dx &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin(bx) - b \cos(bx)] \\ &\begin{cases} a = jk_z \\ b = p\pi/L \end{cases} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Utilizando a equação (3.63) para resolver a equação (3.60):

$$\hat{M}_{zmp}^{ef}(n, k_z) = \frac{e^{jk_z z_1} (p\pi/L)}{(2\pi)^2 \left[\left(\frac{p\pi}{L} \right)^2 - k_z^2 \right]} \left[1 - e^{jk_z L} (-1)^p \right] I_{4m}(n) \quad (3.64)$$

3.8 Excitação

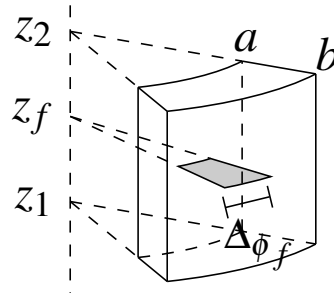


Figura 14: Geometria da fita de alimentação da antena.

A excitação da antena é feita através de um cabo coaxial modelado como uma fita condutora centrada em z_f e ϕ_f que se estende de $\rho = a$ até $\rho = b$. A largura angular da fita é $\Delta\phi_f = \phi_{2f} - \phi_{1f}$ e a largura média é dada por:

$$W_f = \frac{a+b}{2} \Delta\phi_f \quad (3.65)$$

Dessa forma, a densidade superficial de corrente na fita na direção \hat{a}_ρ é dada por:

$$J_{sf}(\rho, \phi) = \frac{I_0}{\rho \Delta\phi_f} \quad (3.66)$$

Já a densidade volumétrica é dada por:

$$J_{vf}(\rho, \phi, z) = \frac{I_0}{\rho \Delta\phi_f} \delta(z - z_f) \quad (3.67)$$

Utilizando a equação (3.15) obtemos a transformada seno-seno da densidade de corrente volumétrica:

$$\hat{J}_{vf}^{ss}(\rho, n, q) = \frac{2}{\Delta\phi} \frac{2}{L} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{z_1}^{z_2} J_{vf}(\rho, \phi, z) \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) dz d\phi \quad (3.68)$$

$$\hat{J}_{vf}^{SS}(\rho, n, q) = \frac{4I_0}{n\pi L\rho\Delta\phi_f} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi_f}(\phi_{1f} - \phi_1)\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi_f}(\phi_{2f} - \phi_1)\right) \right] \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z_f - z_1)\right) \quad (3.69)$$

3.9 Condições de contorno

A componente z do campo magnético é contínuo na interface dielétrico-ar. Sendo assim:

$$\overleftarrow{H}_z(M_z) + \overleftarrow{H}_z(J_{vf}) = \overrightarrow{H}_z(M_z) \quad (3.70)$$

Onde \overleftarrow{H} é o campo dentro da cavidade enquanto \overrightarrow{H} é o campo externo. A equação (3.70) é válida em:

$$\begin{cases} \rho = b \\ z_1 < z < z_2 \\ \phi_1 < \phi < \phi_{1a} \vee \phi_{2a} < \phi < \phi_2 \end{cases}$$

3.9.1 Expansão das correntes M_z em funções de base

Utilizando a equação (3.56):

$$M_z(\phi, z) = \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P d_{mp} M_{zmp}(\phi, z) \quad (3.71)$$

Substituindo a equação (3.71) na (3.70):

$$\sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P d_{mp} \left[\overleftarrow{H}_z(M_{zmp}) - \overrightarrow{H}_z(M_{zmp}) \right] = -\overleftarrow{H}_z(J_{vf}) \quad (3.72)$$

Em [2](5-20) é definido o produto simétrico para um campo elétrico e uma corrente elétrica que variam apenas em ϕ . Estendendo esta definição para campos magnéticos e correntes magnéticas variantes em ϕ e z :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi, z) g(\phi, z) b dz d\phi \quad (3.73)$$

Como função de teste, utilizamos a mesma equação da função de base:

$$M_{zst}(\phi, z) = \sin\left[\frac{t\pi}{L}(z - z_1)\right] \quad \begin{matrix} z_1 < z < z_2 \\ \phi_{1s} < \phi < \phi_{2s} \end{matrix} \quad (3.74)$$

Assim como m e p , $s \in [1, M]$ e $t \in [1, P]$, sendo s o índice da função de teste na direção ϕ e t o modo de vibração. As equações para ϕ_{1s} e ϕ_{2s} são análogas às de ϕ_{1m} e ϕ_{2m} da função de base.

Substituindo a equação (3.74) na (3.72):

$$\sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P d_{mp} \left\langle \overset{<}{H}_z(M_{z_{mp}}) - \overset{>}{H}_z(M_{z_{mp}}), M_{z_{st}} \right\rangle = - \left\langle \overset{<}{H}_z(J_{vf}), M_{z_{st}} \right\rangle \quad (3.75)$$

Arranjando na forma matricial:

$$[Z][d] = [V] \quad (3.76)$$

Onde:

$$Z_{st,mp} = \left\langle \overset{<}{H}_z(M_{z_{mp}}), M_{z_{st}} \right\rangle - \left\langle \overset{>}{H}_z(M_{z_{mp}}), M_{z_{st}} \right\rangle \quad (3.77)$$

$$V_{st} = - \left\langle \overset{<}{H}_z(J_{vf}), M_{z_{st}} \right\rangle \quad (3.78)$$

A matriz $[Z]$ é chamada de matriz de impedância e a matriz $[V]$ de matriz de tensão. Porém esta nomenclatura é enganosa, e estas matrizes nada tem a ver com a impedância de entrada de antena ou com a tensão de alimentação. Já a matriz $[d]$, após o sistema ser resolvido, contém os coeficientes necessários para achar a corrente na superfície da antena, e com isso, calcular a impedância de entrada.

3.10 Elementos da matriz $[Z]$

3.10.1 Campo interno

Utilizando uma fonte $M_{z_{mp}}(\phi, z)$ com as equações (3.12), (3.25) e (3.29):

$$\overset{<}{H}_z(M_{z_{mp}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{k_{\rho_d}^2}{j\omega\mu} \hat{G}_{M_z}^{Fd}(\rho, n, q) \hat{M}_{z_{mp}}^{cs}(n, q) \right) \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (3.79)$$

Tomando o produto simétrico (3.73) e utilizando a equação (3.12):

$$\left\langle \overset{<}{H}_z(M_{z_{mp}}), M_{z_{st}} \right\rangle = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overset{<}{H}_z(M_{z_{mp}}) M_{z_{st}}(\phi, z) b dz d\phi \quad (3.80)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{K_{\rho_d}^2 b \Delta\phi L}{j\omega\mu \epsilon_n 2} \hat{G}_{M_z}^{Fd}(b, n, q) \hat{M}_{z_{mp}}^{cs}(n, q) \hat{M}_{z_{st}}^{cs}(n, q)$$

Utilizando a equação (3.57):

$$\left\langle \hat{H}_z(M_{zmp}), M_{zst} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_{\rho_d}^2 b \epsilon_n L}{j\omega\mu \Delta\phi} \frac{\hat{G}_{M_z}^{F_d}(b, n, q) \delta_{1p} I_{3m}(n) I_{3s}(n)}{2} \quad (3.81)$$

3.10.2 Campo externo

Utilizando uma fonte $M_{zmp}(\phi, z)$ com as equações (3.40), (3.48) e (3.54):

$$\hat{H}_z(M_{zmp}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}^{ef}(\rho, n, k_z) e^{-jn\phi} e^{-jk_z z} dk_z \quad (3.82)$$

Tomando o produto simétrico (3.73) e utilizando a equação (3.40):

$$\left\langle \hat{H}_z(M_{zmp}), M_{zst} \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{\rho_0}^2 b}{j\omega\mu} \hat{G}_{M_z}^{F_0}(b, n, k_z) \hat{M}_{zmp}^{ef}(n, k_z) (2\pi)^2 \hat{M}_{zst}^{ef}(-n, -k_z) dk_z \quad (3.83)$$

Onde $k_{\rho_0}^2 = k_0^2 - k_z^2$.

Sendo assim, os elementos da matriz [Z] estão determinados, bastando apenas substituir as equações (3.81) e (3.83) em (3.77).

3.11 Elementos da matriz [V]

Da equação (3.73):

$$V_{st} = \left\langle \hat{H}_z(J_{vf}), M_{zst} \right\rangle = - \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}_z(J_{vf})(b, \phi, z) M_{zst}(\phi, z) b dz d\phi \quad (3.84)$$

A densidade volumétrica de corrente magnética é dada por:

$$M_{vzst}(\rho, \phi, z) = M_{zst}(\phi, z) \delta(\rho - b) \quad (3.85)$$

Utilizando a densidade volumétrica na equação (3.84) e aplicando os limites da cavidade:

$$V_{st} = - \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{z_1}^{z_2} \int_a^b \hat{H}_z(J_{vf}) M_{zst}(\phi, z) \delta(\rho - b) \rho d\rho dz d\phi \quad (3.86)$$

Nota-se que em coordenadas cilíndricas $\rho d\rho dz d\phi = d\tau$ e o teorema da reciprocidade [4] (3-36) diz que:

$$\iiint (E^a \cdot J^b - H^a \cdot M^b) d\tau = \iiint (E^b \cdot J^a - H^b \cdot M^a) d\tau$$

Ou seja, podemos relacionar os campos E^a e H^a gerado pelas fontes "a" (J^a e M^a) com os campos E^b e H^b gerado pelas fontes "b" (J^b e H^b). Portanto, utilizando o princípio da equivalência na equação (3.86):

$$V_{st} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{z_1}^{z_2} \int_a^b \hat{E}_\rho(M_{z_{st}}) J_{vf}(\rho, \phi, z) \rho \, d\rho \, dz \, d\phi \quad (3.87)$$

Utilizando as equações (3.14), (3.29), (3.57) e (3.68):

$$V_{st} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \hat{G}_{M_z}^{F_d}(\rho, n, t) \frac{n\pi L}{\Delta_\phi} \frac{1}{2} I_{3s}(n) \hat{J}_{vf}^{ss}(\rho, n, t) \, d\rho \quad (3.88)$$

3.12 Impedância de entrada

Expandindo [4](7-90) para 3 dimensões, temos que a impedância de entrada é dada por:

$$Z_{in} = -\frac{1}{I_0^2} \int \int \int_v \left[\vec{E}(\vec{M}_s) + \vec{E}(J_{vf}) \right] \cdot \vec{J}_{vf} \, dv \quad (3.89)$$

Podemos separar as contribuições das correntes magnéticas e do *probe*:

$$Z_{in} = Z_{in}^M + Z_{in}^f \quad (3.90)$$

Onde:

$$Z_{in}^M = -\frac{1}{I_0^2} \int \int \int_v \vec{E}(\vec{M}_s) \cdot \vec{J}_{vf} \, dv \quad (3.91)$$

$$Z_{in}^f = -\frac{1}{I_0^2} \int \int \int_v \vec{E}(J_{vf}) \cdot \vec{J}_{vf} \, dv \quad (3.92)$$

3.12.1 Impedância devido à corrente magnética

Substituindo a equação (3.71) na (3.91):

$$Z_{in}^M = -\frac{1}{I_0^2} \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P d_{mp} \int \int \int_v \vec{E}(M_{z_{mp}}) \cdot \vec{J}_{vf} \, dv \quad (3.93)$$

Comparando com a equação (3.87):

$$Z_{in}^M = -\frac{1}{I_0^2} \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P d_{mp} V_{mp} \quad (3.94)$$

3.12.2 Impedância devido ao *probe*

Z_{in}^f é chamado de auto-impedância do *probe*. A abordagem tomada nesse trabalho é calcular esse valor de forma aproximada como a impedância de entrada da cavidade fechada. A seguinte figura mostra a geometria da cavidade:

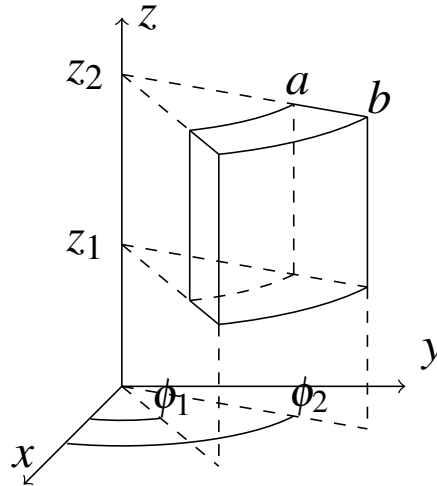


Figura 15: Geometria da cavidade fechada.

A parte interna da cavidade está preenchida com um dielétrico de permissividade $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ sem perdas e as paredes são condutores perfeitos.

Como $(b - a)$ é muito pequeno assumi-se que os campos não variam com ρ . Sendo assim, o problema pode ser reduzido à uma versão 2D do que já foi feito na sessão 3.3 considerando ρ como constante. Portanto, da equação (3.14):

$$E_{\rho_{nq}}(\phi, z) = A_{nq} \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (3.95)$$

A equação (3.95) é solução da equação de onda:

$$\left(\frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_{nq}^2\right) E_{\rho_{nq}} = 0 \quad (3.96)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= (a + b)/2 \\ k_{nq} &= \sqrt{\left(\frac{n\pi}{\rho_0 \Delta\phi}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{L}\right)^2} \end{aligned} \quad (3.97)$$

No interior da cavidade o campo satisfaz:

$$\left(\frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_d^2\right) E_\rho = j\omega\mu J_{vf} \quad (3.98)$$

Expandido o campo no interior da cavidade e substituindo a equação (3.95):

$$E_\rho(\phi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} A_{nq} \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (3.99)$$

Substituindo a equação (3.99) na (3.98) e utilizando a equação (3.96):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (k_d^2 - k_{nq}^2) A_{nq} \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) = j\omega\mu J_{vf} \quad (3.100)$$

Multiplicando por $\sin\left(\frac{n'\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q'\pi}{L}(z - z_1)\right)$, integrando de z_1 a z_2 e ϕ_1 a ϕ_2 e utilizando a equação (3.68):

$$A_{nq} = \frac{j\omega\mu}{k_d^2 - k_{nq}^2} \hat{J}_{vf}^{ss}(\rho_0, n, q) \quad (3.101)$$

Substituindo a equação (3.101) na (3.99):

$$E_\rho(\phi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{j\omega\mu}{k_d^2 - k_{nq}^2} \hat{J}_{vf}^{ss}(\rho_0, n, q) \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi - \phi_1)\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z - z_1)\right) \quad (3.102)$$

Substituindo a equação (3.102) na (3.92):

$$Z_{in}^f = -\frac{1}{I_0^2} \frac{j\omega\mu\Delta\phi L}{4} (b-a)\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\left(\hat{J}_{vf}^{ss}(\rho_0, n, q)\right)^2}{k_d^2 - k_{nq}^2} \quad (3.103)$$

4

IMPLEMENTAÇÃO

Neste capítulo é apresentado o código para o Método dos Momentos na linguagem Matlab. A maioria das funções é uma implementação direta das equações apresentadas no capítulo 3, porém, devido às limitações do padrão IEE754 [8], algumas funções retornam valores inúteis para entradas muito grandes ou muito pequenas e precisam ser calculadas utilizando limites assintóticos ou utilizando alguma propriedade matemática.

O código pode ser acessado no repositório <https://github.com/rma6/tg-mom>.

4.1 mom.m - função *main*

Este código é a função *main* da implementação. A fim de reduzir o tempo de execução, o código foi implementado utilizando *multithreading*, onde cada *thread* é responsável por calcular uma matriz de impedância (função *buildZMat*) ou de tensão (função *buildVMat*) dada uma frequência. Lembrando que o nome das matrizes é enganoso, e elas não tem relação com a impedância de entrada ou tensão na antena.

Quando as matrizes $[Z]$ e $[V]$ terminam de ser calculadas, o sistema linear é resolvido para obter a matriz $[d]$. Para resolver o sistema, partimos da equação (3.76) e multiplicamos pela esquerda pelo inverso de $[Z]$, como mostra a seguinte equação:

$$[Z][d] = [V] \longrightarrow [Z]^{-1}[Z][d] = [Z]^{-1}[V] \longrightarrow [d] = [Z]^{-1}[V]$$

A partir das matrizes $[d]$ e $[V]$ é possível calcular a impedância de entrada conforme a equação (3.90):

$$Z_{in} = Z_{in}^M + Z_{in}^f$$

Já que o *Matlab* não recomenda a utilização de variáveis globais [9] [10], todos os parâmetros são colocados em uma *struct* que é passada para as outras funções. Essa *struct* é criada pela função *params* que aceita um valor de frequência como entrada.

Código 4.1: mom.m

```
clear;

P=params();
```

```
%sets up multithreading
pool = gcp();
q = parallel.pool.DataQueue();
afterEach(q, @disp);

%frequency space
freqs = linspace(2.3,2.5,80)*10^9;
freqs_ghz = freqs/10^9;

%starts jobs
fprintf("Total number of jobs: %i\n", size(freqs, 2)*2)
for it = 1:size(freqs, 2)
    Zjobs(it) = parfeval(pool, @buildZMat, 1, params(freqs(it))
        , q);
    Vjobs(it) = parfeval(pool, @buildVMat, 1, params(freqs(it))
        , q);
end

%colects jobs results
Zs = fetchOutputs(Zjobs);
Vs = fetchOutputs(Vjobs);

%calculates D matrix and input impedance
Ds = cell(size(Zs));
zinf = zeros(1, size(Zs, 1));
zinm = zeros(1, size(Zs, 1));
zin = zeros(1, size(Zs, 1));
for it = 1:size(Zs, 1)
    Ds{it} = Zs{it}\Vs{it};
    zinf(it) = z_in_f(params(freqs(it)));
    zinm(it) = z_in_m(Ds{it}, Vs{it}, params(freqs(it)));
    zin(it) = zinf(it) + zinm(it);
end

%plots results
plot(freqs_ghz, real(zin), 'color', '#0072BD')
hold on
plot(freqs_ghz, imag(zin), 'color', '#D95319')
```

```

hold on
title("Z_{in}")
legend("Re", "Im")
xlabel('GHz')
ylabel('\Omega')
xlim([freqs_ghz(1) freqs_ghz(end)])
ylim([-40 70])
grid on

```

4.2 params.m - Criação de *struct* com parâmetros globais

A função *params* é responsável por criar uma struct que contém as constantes físicas, parâmetros geométricos, parâmetros de alimentação, limites assintóticos, parâmetros de truncamento e quantidade de funções de base e de teste.

Os parâmetros de truncamento e quantidade de funções de base e de teste mostrados neste código são somente um exemplo, eles foram variados e os resultados são discutidos no capítulo 5.

Os parâmetros de truncamento e suas respectivas equações estão listados na seguinte tabela:

Parâmetro	Equação
$P.its.z_i n_f.n$	(3.103)
$P.its.Hz_i n_{proj}$	(3.81)
$P.its.Hz_{out} n_{proj}.n$	(3.83)
$P.its.Nkz$	(3.83)
$P.its.V.n$	(3.88)

Tabela 1: Parâmetros de truncamento e suas equações

Código 4.2: params.m

```

function P = params(freq)
%constants
P.mu = 4*pi*10.^-7;
P.epsilon_0 = 8.85e-12;
P.epsilon_d = 2.55*P.epsilon_0;

%geometric parameters
P.z1 = 0;
P.z2 = 59.49e-3;
P.a = 250e-3;
P.b = 253.048e-3;

```

```
P.phi1 = -0.0482;
P.phi2 = 10.9435 * pi/180+0.0482;
P.phi_1a = 0 * pi/180;
P.phi_2a = 10.9435 * pi/180;
P.phi_1f = 4.013411 * pi/180 -0.005;
P.phi_2f = 4.9245889 * pi/180 -0.005;
P.z_f = 28.87e-3;

%source parameters
if nargin > 0
    P.omega = freq*2*pi;
else
    P.omega = 2.45e9*2*pi;
end
P.I0 = 1;

%aliases
P.L = P.z2 - P.z1;
P.delta_phi = P.phi2 - P.phi1;
P.delta_phi_a = P.phi_2a - P.phi_1a;
P.delta_phi_f = P.phi_2f - P.phi_1f;
P.kd = P.omega*sqrt(P.mu*P.epsilon_d);
P.k0 = P.omega*sqrt(P.mu*P.epsilon_0);

%theta parameters
P.argmax = 400;
P.expmin = 200;
P.gamma = 1.781072418;

%number of segments and harmonics of test and base functions
P.Mmax = 14;
P.Pmax = 1;

%truncation parameters
P.its.z_in_f.n = 50;
P.its.Hz_in_proj = 50;
P.its.Hz_out_proj.n = 50;
P.its.Nkz = 50;
P.its.Hz_out_proj.kz = P.its.Nkz*P.k0;
```



```
P.its.V.n = 30;
```

4.3 buildVMat.m - Cálculo da matriz de tensão

A função *buildVMat* cria a matriz de tensão de tamanho $Mmax \cdot Pmax$ por 1. Os elementos da matriz são dados pela função *V*. As variáveis m , p , s e t são os índices da função de base e função de teste.

Código 4.3: buildVMat.m

```
function r = buildVMat(P, q) %builds V matrix
    r = cell(1);
    Vmatrix = zeros(P.Mmax*P.Pmax, 1);

    for m = 1:P.Mmax
        for p = 1:P.Pmax
            for s = 1:P.Mmax
                for t = 1:P.Pmax
                    Vmatrix((s-1)*P.Pmax+t, 1) = V(s, t, P);
                end
            end
        end
    end

    send(q, sprintf("finished buildVMat@%f at %s", P.omega/(2*
        pi), string(datetime)));

    r{1} = Vmatrix;
end
```

4.4 buildZMat.m - Cálculo da matriz de impedância

A função *buildZMat* cria a matriz de impedância de tamanho $Mmax \cdot Pmax$ por $Mmax \cdot Pmax$. Os elementos da matriz são dados pela equação (3.77):

$$Z_{st,mp} = \left\langle \overset{<}{H}_z(M_{zmp}), M_{zst} \right\rangle - \left\langle \overset{>}{H}_z(M_{zmp}), M_{zst} \right\rangle$$

Assim como em *buildVMat*, m , p , s e t são os índices da função de base e função de teste.

Código 4.4: buildZMat.m

```
function r = buildZMat(P, q) %builds Z matrix
```

```

r = cell(1);
Zmatrix = zeros(P.Mmax*P.Pmax, P.Mmax*P.Pmax);
in = zeros(P.Mmax*P.Pmax, P.Mmax*P.Pmax);
out = zeros(P.Mmax*P.Pmax, P.Mmax*P.Pmax);

for m = 1:P.Mmax
    for p = 1:P.Pmax
        for s = 1:P.Mmax
            for t = 1:P.Pmax
                in((s-1)*P.Pmax+t, (m-1)*P.Pmax+p) =
                    Hz_in_proj(m, p, s, t, P);
                out((s-1)*P.Pmax+t, (m-1)*P.Pmax+p) =
                    Hz_out_proj(m, p, s, t, P);
                Zmatrix((s-1)*P.Pmax+t, (m-1)*P.Pmax+p) =
                    in((s-1)*P.Pmax+t, (m-1)*P.Pmax+p) - out
                    ((s-1)*P.Pmax+t, (m-1)*P.Pmax+p);
            end
        end
    end
end

send(q, sprintf("finished buildZMat@%f at %s", P.omega/(2*
    pi), string(datetime)));

r{1} = Zmatrix;
end

```

4.5 V.m - Tensão

A função V calcula a tensão de acordo com a equação (3.88):

$$V_{st} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \hat{G}_{M_z}^{F_d}(\rho, n, t) \frac{n\pi L}{\Delta\phi} \frac{1}{2} I_{3s}(n) \hat{J}_{vf}^{ss}(\rho, n, t) d\rho$$

Aqui encontramos um problema: os somatórios são infinitos. Sendo assim, o somatório é truncado para P .its.V.n iterações, como definido em `params.m`.

Código 4.5: V.m

```
function r = V(s, t, P) %eq 94
```

```

r = pi*P.L/(P.delta_phi*2)*summation();

function acc = summation()
    acc = 0;
    for n = 1:P.its.V.n
        fun = @(rho) G_Mz_TFd(rho, n, t, P)*n*I3(n, s, P).*
            J_vf_Tss(rho, n, t, P);
        acc = acc + integral(fun, P.a, P.b);
    end
end
end
end

```

4.6 $z_{in_m.m}$ - Impedância devido à corrente magnética

A função z_{in_m} calcula a contribuição da corrente magnética à impedância de entrada de acordo com a equação (3.94):

$$Z_{in}^M = -\frac{1}{I_0^2} \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P d_{mp} V_{mp}$$

Código 4.6: $z_{in_m.m}$

```

function r = z_in_m(dMatrix, Vmatrix, P) %eq 99
    r = -1/P.I0^2*(Vmatrix' * dMatrix);
end

```

4.7 $z_{in_f.m}$ - Impedância devido ao *probe*

A função z_{in_f} calcula a contribuição do *probe* à impedância de entrada de acordo com a equação (3.103):

$$Z_{in}^f = -\frac{1}{I_0^2} \frac{j\omega\mu\Delta_\phi L}{4} (b-a)\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\left(\hat{J}_{vf}^{ss}(\rho_0, n, q)\right)^2}{k_d^2 - k_{nq}^2}$$

O somatório em n é truncado para $P.its.z_{in_f.n}$ e o somatório em q é truncado para $P.Pmax$.

Código 4.7: $z_{in_f.m}$

```

function r = z_in_f(P) %eq 108
    rho0 = (P.a+P.b)/2;

```

```

r = -1/P.I0^2*1j*P.omega*P.mu*P.delta_phi*P.L/4*(P.b-P.a)*
    rho0*summation();

function acc = summation()
    acc = 0;
    for n = 1:P.its.z_in_f.n
        for q = 1:P.Pmax
            k_nq = sqrt((n*pi/(rho0*P.delta_phi))^2+(q*pi/P
                .L)^2);
            acc = acc + J_vf_Tss(rho0, n, q, P)^2/(P.kd^2-
                k_nq^2);
        end
    end
end
end
end
%ok

```

4.8 Hz_in_proj.m - Produto interno de H_z pela função de teste no interior da cavidade

A função *Hz_in_proj* calcula o produto interno de H_z pela função de teste no interior da cavidade de acordo com a equação (3.81):

$$\left\langle \hat{H}_z(M_{zmp}), M_{zst} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_{\rho_d}{}^2 b \in_n L}{j\omega\mu \Delta_\phi 2} \hat{G}_{M_z}^{F_d}(b, n, q) \delta_{lp} I_{3m}(n) I_{3s}(n)$$

O somatório é truncado para P.its.Hz_in_proj iterações.

Código 4.8: Hz_in_proj.m

```

function r = Hz_in_proj(m, p, s, t, P) %eq 88
    if t == p
        k_rhod2 = P.kd^2 - (p*pi/P.L)^2; % q == p

        r = k_rhod2*P.b/(1j*P.omega*P.mu)*1/P.delta_phi*P.L/2*
            summation();
    else
        r = 0;
    end
end

```

```

function acc = summation()
    acc = 0;
    for n = 0:P.its.Hz_in_proj
        acc = acc + En(n)*G_Mz_TFd(P.b, n, p, P)*I3(n, m, P
            )*I3(n, s, P);
    end
end

function r = En(n)
    if n == 0
        r = 1;
    else
        r = 2;
    end
end
end
end

```

4.9 Hz_out_proj.m - Produto interno de H_z pela função de teste no exterior da cavidade

A função *Hz_out_proj* calcula o produto interno de H_z pela função de teste no exterior da cavidade de acordo com a equação (3.83):

$$\left\langle \hat{H}_z(M_{zmp}), M_{zst} \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{p0}^2 b}{j\omega\mu} \hat{G}_{M_z}^{F_0}(b, n, k_z) \hat{M}_{zmp}^{ef}(n, k_z) (2\pi)^2 \hat{M}_{zst}^{ef}(-n, -k_z) dk_z$$

Nesta implementação, foi feita uma mudança de variável de forma que os limites do somatório e da integral sejam de 0 a ∞ . O somatório é truncado para *its.Hz_out_proj.n* iterações e a integral é truncada para *P.its.Nkz* iterações. Como as funções na equação (3.83) são pares, chegamos na implementação atual. A vantagem de implementar dessa forma é que a quantidade de integrais é reduzida, sendo que está é uma operação custosa. Além disso o método de integração escolhido foi o de quadratura de Gauss [11] (capítulo 4.6) que é um bom balanço entre precisão e velocidade. Nota-se que o domínio de integração foi segmentado, embora isso aumente o tempo de execução, garante resultado melhores.

Código 4.9: Hz_out_proj.m

```

function r = Hz_out_proj(m, p, s, t, P) %eq 89
    r = P.b/(1j*P.omega*P.mu)*(2*pi)^2*summation();

```

```

function acc = summation()
    acc = 0;
    for n = 0:P.its.Hz_out_proj.n
        if n == 0
            fun = @(kz) G_Mz_TF0(P.b, 0, kz, P).*(M_z_Tef(
                0, kz, m, p, P).*M_z_Tef(0, -kz, s, t, P) +
                M_z_Tef(0, -kz, m, p, P).*M_z_Tef(0, kz, s,
                t, P));
        else
            fun = @(kz) G_Mz_TF0(P.b, n, kz, P).*(M_z_Tef(n
                , kz, m, p, P).*M_z_Tef(-n, -kz, s, t, P) +
                M_z_Tef(n, -kz, m, p, P).*M_z_Tef(-n, kz, s,
                t, P) + M_z_Tef(-n, kz, m, p, P).*M_z_Tef(n
                , -kz, s, t, P) + M_z_Tef(-n, -kz, m, p, P)
                .*M_z_Tef(n, kz, s, t, P));
        end

        cZzz2 = 0;
        for k=1:P.its.Nkz
            rkz1 = (k-1)*P.k0;
            rkzu = k*P.k0;
            cZzz2 = cZzz2 + CGQ1(fun, rkz1, rkzu, 16);
        end

        acc = acc + cZzz2;
    end
end
end
end

```

4.10 CGQ1.m - Integral por quadratura de Gauss

A função *CGQ1* calcula a integral por quadratura de Gauss [11] (capítulo 4.6).

A integral por quadratura de gaussiana aproxima uma integral da função de interesse ($f(x)$) multiplicada por uma função peso ($W(x)$) a um somatório de pesos (W_n) e "nós" (x_n) aplicados a função de interesse.

$$\int_a^b W(x)f(x)dx = \sum_{n=1}^N W_n f(x_n)$$

Essa aproximação é exata para polinômios de ordem até $2N - 1$ (incluso), e para os polinômios de ordem maior a aproximação converge conforme o valor de N aumenta. Dessa forma, devido à complexidade da função integrada, um valor arbitrariamente alto de N é utilizado.

O procedimento para calcular os pesos e nós é descrito em [11] (capítulo 4.6.1).

Para poupar tempo, os pesos foram previamente calculados e colocados na variável QG do código.

Código 4.10: CGQ1.m

```
function CVAL = CGQ1(CF,XL,XU,N) %Gaussian quadrature
NQ = [2, 4, 8, 10, 12, 16, 24, 32];
NS = [1, 3, 7, 15, 25, 37, 53, 77];
QG = [.288675134594812882E0, 0.5E0, .43056815579702629E0,
      .17392742256872693E0, .16999052179242813E0,
      .32607257743127307E0,
      .....
      ...
      0.48014492824876812E0, .50614268145188130E-1,
      .39833323870681337E0, .11119051722668724E0,
      .26276620495816449E0, ...
      .15685332293894364E0, .9171732124782490E-1,
      .18134189168918099E0, .48695326425858586E0,
      .3333567215434407E-1, ...
      .43253168334449225E0, .747256745752903E-1,
      .3397047841496122E0, .10954318125799102E0,
      .2166976970646236E0, ...
      .13463335915499818E0, .74437169490815605E-1,
      .14776211235737644E0, 0.49078031712335963E0,
      .23587668193255914E-1, ...
      .45205862818523743E0, .53469662997659215E-1,
      .38495133709715234E0, .8003916427167311E-1,
      .29365897714330872E0, ...
      .10158371336153296E0, .18391574949909010E0,
      .11674626826917740E0, .62616704255734458E-1,
      .12457352290670139E0, ...
      .49470046749582497E0, .13576229705877047E-1,
      .47228751153661629E0, .31126761969323946E-1,
      .43281560119391587E0, ...
      .47579255841246392E-1, .37770220417750152E0,
      .62314485627766936E-1, .30893812220132187E0,
      .7479799440828837E-1, ...
      .22900838882861369E0, .8457825969750127E-1,
```

```
.14080177538962946E0, .9130170752246179E-1,  
.47506254918818720E-1, ...  
.9472530522753425E-1, 0.49759360999851068E+0,  
0.61706148999935998E-2, 0.48736427798565475E+0,  
0.14265694314466832E-1, ...  
0.46913727600136638E+0, 0.22138719408709903E-1,  
0.44320776350220052E+0, 0.29649292457718890E-1,  
0.41000099298695146E+0, ...  
0.36673240705540153E-1, 0.37006209578927718E+0,  
0.43095080765976638E-1, 0.32404682596848778E+0,  
0.48809326052056944E-1, ...  
0.27271073569441977E+0, 0.53722135057982817E-1,  
0.21689675381302257E+0, 0.57752834026862801E-1,  
0.15752133984808169E+0, ...  
0.60835236463901696E-1, 0.95559433736808150E-1,  
0.62918728173414148E-1, 0.32028446431302813E-1,  
0.63969097673376078E-1, ...  
0.49863193092474078E+0, 0.35093050047350483E-2,  
0.49280575577263417E+0, 0.81371973654528350E-2,  
0.48238112779375322E+0, ...  
0.12696032654631030E-1, 0.46745303796886984E+0,  
0.17136931456510717E-1, 0.44816057788302606E+0,  
0.21417949011113340E-1, ...  
0.42468380686628499E+0, 0.25499029631188088E-1,  
0.39724189798397120E+0, 0.29342046739267774E-1,  
0.36609105937014484E+0, ...  
0.32911111388180923E-1, 0.33152213346510760E+0,  
0.36172897054424253E-1, 0.29385787862038116E+0,  
0.39096947893535153E-1, ...  
0.25344995446611470E+0, 0.41655962113473378E-1,  
0.21067563806531767E+0, 0.43826046502201906E-1,  
0.16593430114106382E+0, ...  
0.45586939347881942E-1, 0.1196436814006854E+0,  
0.46922199540402283E-1, 0.72235980791398250E-1,  
0.47819360039637430E-1, ...  
0.24153832843869158E-1, 0.48270044257363900E-1];
```

```
L = find(NQ==N);  
if ~isempty(L)
```



```

NP = NS(L);
NE = NP+N-1;
AX = 0.5*(XU+XL);
BX = XU-XL;

DX = QG(NP:2:NE)*BX;
CVAL = BX*(CF(AX+DX)+CF(AX-DX))*QG((NP:2:NE)+1)';
return
else
    error("Integration not possible")
end
end
end

```

4.11 I3.m - Coeficiente I3

A função *I3* calcula o coeficiente I3 de acordo com a equação (3.59):

$$I_{3m}(n) = \begin{cases} \phi_{2m} - \phi_{1m} & n = 0 \\ \frac{1}{n\pi/\Delta\phi} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi_{2m} - \phi_{1m})\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi}(\phi_{1m} - \phi_{1m})\right) \right] & n \neq 0 \end{cases}$$

A depender do valor de *m*, o segmento pode estar à direita ou à esquerda da antena, que é levado em conta para calcular *deltaphim*, *phi_1m* e *phi_2m*.

Código 4.11: I3.m

```

function r = I3(n, m, P) %eq 62
    if m <= (P.Mmax/2)
        deltaphim = (P.phi_1a - P.phi1)/(P.Mmax/2);
        phi_1m = P.phi1 + (m-1)*deltaphim;
        phi_2m = P.phi1 + m*deltaphim;
    else
        deltaphim = (P.phi2 - P.phi_2a)/(P.Mmax/2);
        phi_1m = P.phi_2a + (m-P.Mmax/2-1)*deltaphim;
        phi_2m = P.phi_2a + (m-P.Mmax/2)*deltaphim;
    end

    if n == 0
        r = phi_2m-phi_1m;
    else

```

```

    r = P.delta_phi / (n*pi) * (sin(n*pi/P.delta_phi * (phi_2m - P.
        phi_1)) - sin(n*pi/P.delta_phi * (phi_1m - P.phi_1)));
end
end

```

4.12 I4.m - Coeficiente I4

A função *I4* calcula o coeficiente I4 de acordo com a equação (3.62):

$$I_{4m}(n) = \begin{cases} \phi_{2m} - \phi_{1m} & n = 0 \\ \frac{e^{jn\phi_{2m}} - e^{jn\phi_{1m}}}{jn} & n \neq 0 \end{cases}$$

Assim como em I3.m, levamos em conta de que lado está o segmento para calcular *deltaphim*, *phi_1m* e *phi_2m*.

Código 4.12: I4.m

```

function r = I4(n, m, P) %eq 67 ok
    if m <= (P.Mmax/2)
        deltaphi = (P.phi_1a - P.phi_1) / (P.Mmax/2);
        phi_1m = P.phi_1 + (m-1)*deltaphi;
        phi_2m = P.phi_1 + m*deltaphi;
    else
        deltaphi = (P.phi_2 - P.phi_2a) / (P.Mmax/2);
        phi_1m = P.phi_2a + (m-P.Mmax/2-1)*deltaphi;
        phi_2m = P.phi_2a + (m-P.Mmax/2)*deltaphi;
    end

    if n == 0
        r = deltaphi;
    else
        r = (exp(1j*n*phi_2m) - exp(1j*n*phi_1m)) / (1j*n);
    end
end
%ok

```

4.13 M_z_Tef.m - Transformada exponencial-Fourier da corrente magnética na direção z

A função M_{z_Tef} calcula a transformada exponencial-Fourier da corrente magnética na direção z de acordo com a equação (3.64):

$$\hat{M}_{zmp}^{ef}(n, k_z) = \frac{e^{jk_z z_1} (p\pi/L)}{(2\pi)^2 \left[\left(\frac{p\pi}{L} \right)^2 - k_z^2 \right]} \left[1 - e^{jk_z L (-1)^p} \right] I_{4m}(n)$$

Código 4.13: M_z_Tef.m

```
function r = M_z_Tef(n, kz, m, p, P) %eq 72; kz might be array
    r = exp(1j*kz*P.z1) * (p*pi/P.L) ./ ((2*pi)^2 * ((p*pi/P.L)^2 - kz.^2)) .* (1 - exp(1j*kz*P.L) * (-1)^p) * I4(n, m, P);
end
```

4.14 J_vf_Tss.m - Transformada seno-seno da densidade volumétrica de corrente

A função J_{vf_Tss} calcula a transformada seno-seno da densidade volumétrica de corrente de acordo com a equação (3.69):

$$\hat{J}_{vf}^{ss}(\rho, n, q) = \frac{4I_0}{n\pi L \rho \Delta\phi_f} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi_f}(\phi_{1f} - \phi_1)\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{\Delta\phi_f}(\phi_{2f} - \phi_1)\right) \right] \sin\left(\frac{q\pi}{L}(z_f - z_1)\right)$$

Código 4.14: J_vf_Tss.m

```
function r = J_vf_Tss(rho, n, q, P) %eq 77
    r = 4*P.I0 ./ (n*pi*P.L*rho*P.delta_phi_f) * (cos(n*pi/P.delta_phi*(P.phi_1f-P.phi1)) - cos(n*pi/P.delta_phi*(P.phi_2f-P.phi1))) * sin(q*pi/P.L*(P.z_f-P.z1));
end
```

4.15 G_Mz_TFd.m - Transformada da função de Green na região interna

A função G_{Mz_TFd} calcula a transformada da função de Green na região interna de acordo com a equação (3.30):

$$\hat{G}_{M_z}^{Fd}(\rho, n, q) = \frac{\Theta_{3\rho}(n, q)}{k_{\rho d} \Theta_1(n, q)}$$

Código 4.15: G_Mz_TFd.m

```
function r = G_Mz_TFd(rho, n, q, P) %eq 33: rho and q might be
arrays
    k_rho = sqrt(P.kd.^2 - (q*pi/P.L).^2);
    k_rho = cinv(k_rho);

    r = theta_3_rho(n, q, P.kd, rho, P)/(k_rho.*theta_1(n, q, P
.kd, P));
end
```

4.16 G_Mz_TF0.m - Transformada da função de Green na região externa

A função G_{Mz_TF0} calcula a transformada da função de Green na região externa definida pela equação (3.55):

$$\hat{G}_{M_z}^{F0}(\rho, n, k_z) = \frac{H_n^{(2)}(k_{\rho_0} \rho)}{k_{\rho_0} H_n^{(2)'}(k_{\rho_0} b)}$$

Porém, uma implementação direta não é possível já que para valores pequenos ou grandes de argumento as funções de Bessel estouram, o que leva a um resultado inútil. Contudo, matematicamente o resultado total da função é pequeno o suficiente para ser representado pelo padrão IEEE754 [8]. Sendo assim, para computar os valores de G_{Mz_TF0} para argumentos muito pequenos ou muito grandes foi utilizada uma análise assintótica apresentada no Apêndice A.

Código 4.16: G_Mz_TF0.m

```
function r = G_Mz_TF0(rho, n, kz, P) %eq 56: kz might be array
A_k_rho = sqrt(P.k0.^2 - kz.^2);
A_k_rho = cinv(A_k_rho);
```

```

if n == 0
    argmin = 2*10^(-P.expmin);
else
    argmin = 2*10^((c_log(n)-P.expmin)/(1+n));
end

r = zeros(size(A_k_rho));
for it = 1:size(A_k_rho, 2)
    k_rho = A_k_rho(it);

    if imag(k_rho*P.b) == 0 && abs(real(k_rho*P.b)) <=
        argmin
        if n == 0
            r(it) = k_rho^2*P.b*(1j*pi/2 + log(P.gamma*real
                (k_rho*P.b)/2));
        else
            r(it) = -k_rho^2*P.b/n;
        end
    elseif real(k_rho*P.b) == 0 && abs(imag(k_rho*P.b)) <=
        argmin
        if n == 0
            r(it) = k_rho^2*P.b*log(P.gamma*imag(-k_rho*P.b
                )/2);
        else
            r(it) = -k_rho^2*P.b/n;
        end
    elseif real(k_rho*P.b) == 0 && abs(imag(k_rho*P.b)) >=
        P.argmax
        r(it) = 1j*k_rho;
    else
        r(it) = k_rho*besselh(n, 2, k_rho*rho)/dH2(n, k_rho
            *P.b);
    end
end

function r = c_log(ni)
    r = sum(log10(2:ceil(ni)))-log10(2*pi);
end
end

```

4.17 `cinv.m` - Correção de $k_r h_0$ para a solução física

Ao calcular k_{ρ_0} ou k_{ρ_d} é necessário utilizar uma raiz quadrada (equações 3.10 e 3.83) e há a possibilidade do resultado ser um número complexo. A questão é que este número complexo pode ter parte imaginária positiva ou negativa, porém só o resultado com parte imaginária negativa é fisicamente possível, a outra solução faria a onda ganhar energia enquanto se propaga. Sendo assim, a função `cinv` verifica se a parte imaginária é positiva e inverte o número caso seja.:

Código 4.17: `cinv.m`

```
function r = cinv(arr) %inverts complex number if imaginary
    part is positive
    for i = 1:size(arr, 2)
        if imag(arr(i)) > 0
            arr(i) = -arr(i);
        end
    end
    r = arr;
end
```

4.18 `theta_1.m` - Coeficiente Θ_1

A função `theta_1` calcula o coeficiente Θ_1 definido pela equação (3.27):

$$\Theta_1(n, q) = J'_v(k_{\rho_d} b) H_v^{(2)'}(k_{\rho_d} a) - J'_v(k_{\rho_d} a) H_v^{(2)'}(k_{\rho_d} b)$$

Esta função sofre do mesmo problema que `G_Mz_TF0.m`. A solução para computar a função é análise assintótica, que se encontra no Apêndice A.

Código 4.18: `theta_1.m`

```
function r = theta_1(n, q, k, P) %eq 30': adição de K aos parâ
    metros para diferenciar região interna de externa (kd | k0);
    q might be array
    ni = n*pi/P.delta_phi;

    A_k_rho = sqrt(k.^2 - (q*pi/P.L).^2);
    A_k_rho = cinv(A_k_rho);

    if ni == 0
        argmin = 2*10^(-P.expmin);
    else
```

```

    argmin = 2*10^((c_log(ni)-P.expmin)/(1+ni));
end

r = zeros(size(A_k_rho));
for it = 1:size(A_k_rho, 2)
    k_rho = A_k_rho(it);

    if abs(k_rho*P.a) > P.argmax
        r(it) = 2j/(pi*k_rho*sqrt(P.a*P.b))*((1+1/(4*k_rho
            ^2*P.a*P.b))*sin(k_rho*(P.b-P.a))+(1/(2*k_rho*P.
            b)-1/(2*k_rho*P.a))*cos(k_rho*(P.b-P.a)));
    elseif abs(k_rho*P.a) < argmin && ni == 0
        r(it) = 1j/pi*(P.b/P.a-P.a/P.b);
    elseif abs(k_rho*P.a) < argmin && ni ~= 0
        r(it) = 1j*ni/(pi*k_rho^2)*((P.a/P.b)^(ni-1)/P.b^2
            - (P.b/P.a)^(ni-1)/P.a^2);
    else
        r(it) = dJ(ni, k_rho*P.b)*dH2(ni, k_rho*P.a) - dJ(
            ni, k_rho*P.a)*dH2(ni, k_rho*P.b);
    end
end

function r = c_log(ni)
    r = sum(log10(2:ceil(ni)))-log10(2*pi);
end
end

```

4.19 theta_3_rho.m - Coeficiente $\Theta_{3\rho}$

A função *theta_3_rho* calcula o coeficiente $\Theta_{3\rho}$ definido pela equação (3.31):

$$\Theta_{3\rho}(n, q) = J_\nu(k_{\rho_d}\rho)H_\nu^{(2)'}(k_{\rho_d}a) - J_\nu'(k_{\rho_d}a)H_\nu^{(2)}(k_{\rho_d}\rho)$$

A equação $\Theta_{3\rho}$ é a equação de Θ_3 (A.2) com *b* substituído por ρ . Esta função sofre do mesmo problema que *G_Mz_TF0.m*. A solução para computar a função é análise assintótica, que se encontra no Apêndice A.

Código 4.19: *theta_3_rho.m*

```

function r = theta_3_rho(n, q, k, rho, P) %eq 30': adição de K
    aos parâmetros para diferenciar região interna de externa (

```

```

kd | k0); q and rho might be arrays
ni = n*pi/P.delta_phi;

A_k_rho = sqrt(k.^2 - (q*pi/P.L).^2);
A_k_rho = cinv(A_k_rho);

if ni ==0
    argmin = 2*10^(-P.expmin);
else
    argmin = 2*10^((c_log(ni)-P.expmin)/(1+ni));
end

if size(rho, 2) > 1
    k_rho = A_k_rho;

    if abs(k_rho*P.a) > P.argmax
        r = -2j./(pi*k_rho*sqrt(P.a*rho)).*(sin(k_rho*(rho-
            P.a))/(2*k_rho*P.a)+cos(k_rho*(rho-P.a)));
    elseif abs(k_rho*P.a) < argmin && ni == 0
        r = -2j/pi*(1/(k_rho*P.a)+k_rho*P.a/2*log(P.gamma*
            k_rho*rho/2));
    elseif abs(k_rho*P.a) < argmin && ni ~= 0
        r = -1j/(pi*k_rho)*((rho/P.a).^ni/P.a + (P.a./rho)
            .^(ni-1)./rho);
    else
        r = besselj(ni, k_rho*rho)*dH2(ni, k_rho*P.a) - dJ(
            ni, k_rho*P.a)*besselh(ni, 2, k_rho*rho);
    end
else
    r = zeros(size(A_k_rho));
    for it = 1:size(A_k_rho, 2)
        k_rho = A_k_rho(it);

        if abs(k_rho*P.a) > P.argmax
            r(it) = -2j/(pi*k_rho*sqrt(P.a*rho))*(sin(k_rho
                *(rho-P.a))/(2*k_rho*P.a)+cos(k_rho*(rho-P.a)
                ));
        elseif abs(k_rho*P.a) < argmin && ni == 0
            r(it) = -2j/pi*(1/(k_rho*P.a)+k_rho*P.a/2*log(P

```



```

        .gamma*k_rho*rho/2));
elseif abs(k_rho*P.a) < argmin && ni ~= 0
    r(it) = -1j/(pi*k_rho)*((rho/P.a)^ni/P.a + (P.a
        /rho)^(ni-1)/rho);
else
    r(it) = besselj(ni, k_rho*rho)*dH2(ni, k_rho*P.
        a) - dJ(ni, k_rho*P.a)*besselh(ni, 2, k_rho*
        rho);
end
end
end

function r = c_log(ni)
    r = sum(log10(2:ceil(ni)))-log10(2*pi);
end
end

```

4.20 dJ.m - Derivada da função de Bessel do primeiro tipo

A função *dJ* calcula a derivada da função de Bessel do primeiro tipo de acordo com a equação (D-14) de [4]:

$$B'_\nu(x) = \frac{\nu}{x}B_\nu - B_{\nu+1}$$

Código 4.20: dJ.m

```

function r = dJ(ni, x) %derivative of bessel function of the
    first kind
    r = (ni*besselj(ni, x))/x - besselj(ni + 1, x);
end

```

4.21 dH2.m - Derivada da função de Hankel do segundo tipo

A função *dH2* calcula a derivada da função de Hankel do segundo tipo de acordo com a equação (D-14) de [4]:

$$B'_\nu(x) = \frac{\nu}{x}B_\nu - B_{\nu+1}$$

Código 4.21: dH2.m

```
function r = dH2(ni, x) %derivative of hankel function of the
    second kind
    r = (ni*besselh(ni, 2, x))/x - besselh(ni + 1, 2, x);
end
```

5

RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos de impedância de entrada da antena para diferentes parâmetros. Estes parâmetros controlam o truncamento dos somatórios e integrais infinitos e a quantidade de funções de base e de teste. A escolha adequada dos parâmetros é essencial para obter um bom resultado em um curto espaço de tempo ¹. Caso sejam escolhidos valores muito pequenos, o resultado não vai convergir, afinal os parâmetros de truncamento estão diretamente ligados às expansões de Fourier, porém se forem escolhidos valores muito altos, além do programa demorar mais tempo para executar, podem aparecer erros numéricos.

As dimensões da cavidade e da antena são as mostrados nas Figuras 2 e 14 e estão listados na tabela 2. A permissividade relativa da cavidade $\epsilon_r = 2.55$.

Parâmetro	Valor	Unidade
z_1	0	mm
z_2	59.49	mm
a	250	mm
b	253.048	mm
ϕ_1	-0.0482	rad
ϕ_2	0.2392	rad
ϕ_{1a}	0	rad
ϕ_{2a}	0.1910	rad
ϕ_{1f}	0.0650	rad
ϕ_{2f}	0.0810	rad
z_f	28.87	mm

Tabela 2: Dimensões da cavidade e da antena

Já os parâmetros utilizados são os seguintes:

¹Não é objetivo deste trabalho analisar o tempo de execução do algoritmo, porém vale comentar que antes de otimizar os parâmetros de iteração, levava alguns dias para se obter um resultado, porém com os parâmetros aqui apresentados os gráficos são gerados em apenas algumas horas.

Parâmetro	Valor
P.Mmax	24
P.Pmax	1
P.its.z_in_f.n	100
P.its.Hz_in_proj	100
P.its.Hz_out_proj.n	100
P.its.Nkz	100
P.its.V.n	50

Tabela 3: Parâmetros para a figura 16

Um detalhe importante é que os resultados do Prêntice são para uma geometria um pouco diferente da analisada neste trabalho. A antena deste trabalho é o que o Prêntice chama de *Antena Híbrida com Duas Fendas (AHDF_{cz})*, enquanto o gráfico de impedância de entrada que ele fornece é para *Antena Híbrida em Cavidade (AHC_{cz})* na qual há uma camada de dielétrico em volta das paredes z_1 e z_2 da antena. Os detalhes da antena *AHC_{cz}* podem ser encontrados em [1](Figura 4.38 e Tabela 4.15). Mesmo com essa diferença, é esperado que as características dessas antenas seja semelhantes visto que os campos na região eliminada são desprezíveis [1] (Figura 4.38(c)) e os coeficientes de reflexão são praticamente iguais [1] (Figura 4.36).

A figura 16 apresenta o resultado obtido pelo MoM (em azul e marrom) e o resultado do Prêntice (em preto e vermelho).

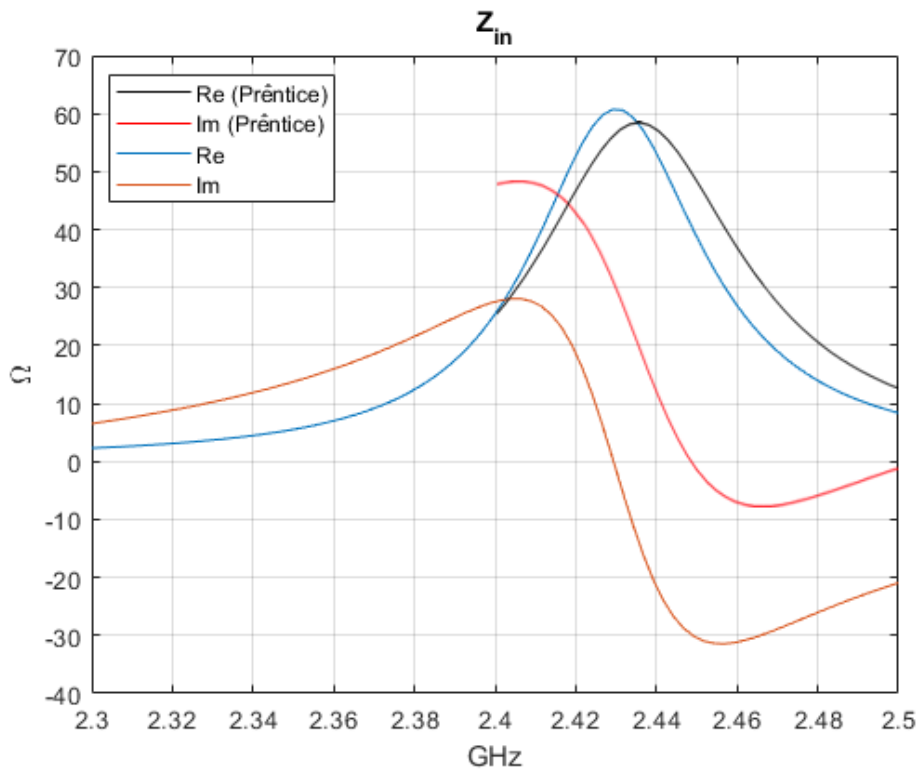


Figura 16: Impedância de entrada em comparação com os resultados do Prêntice

Vemos que os picos das partes reais da impedância estão bem próximos. O MoM apresenta o pico em 2.43 GHz, enquanto o Prêntice apresenta o pico em aproximadamente 2.437 GHz. Já as partes imaginárias, por mais que tenham um formato semelhante, estão com um deslocamento de aproximadamente 20Ω .

5.0.1 Impedância de entrada em diferentes parâmetros

Como a figura 16 foi gerada com $P.M_{max} = 24$ e $P.P_{max} = 1$, caso fossem utilizados parâmetros menores, o resultado não seria tão bom. A figura 17 foi gerada com os parâmetros da tabela 4.

Parâmetro	Valor
P.its.z_in_f.n	50
P.its.Hz_in_proj	50
P.its.Hz_out_proj.n	50
P.its.Nkz	50
P.its.V.n	30

Tabela 4: Parâmetros para as figuras 17 a 19

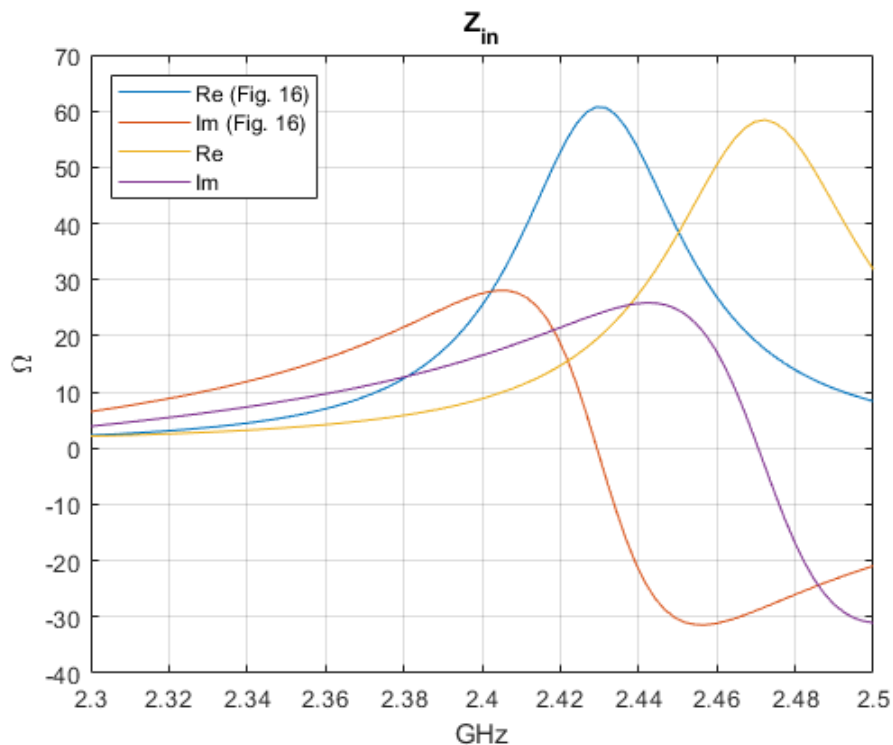


Figura 17: Impedância de entrada com parâmetros da tabela 3 comparada com parâmetros da tabela 4, ambas para $P.M_{max} = 24$ e $P.P_{max} = 1$

Neste caso, o pico da parte real da impedância foi descolado para direita em relação a figura 16. Isso se deve aos parâmetros estarem baixos para esses valores de $P.M_{max}$ e $P.P_{max}$, e portanto o MoM não consegue convergir. Por este motivo, os parâmetros utilizados para a Figura 16 são maiores.

As figuras 18 e 19 foram geradas com os parâmetros da tabela 4, mas com valores diferentes de P.Pmax.

A figura 18 mostra a impedância de entrada para P.Mmax = 14 e P.Pmax = 1 em comparação aos resultados da figura 16.

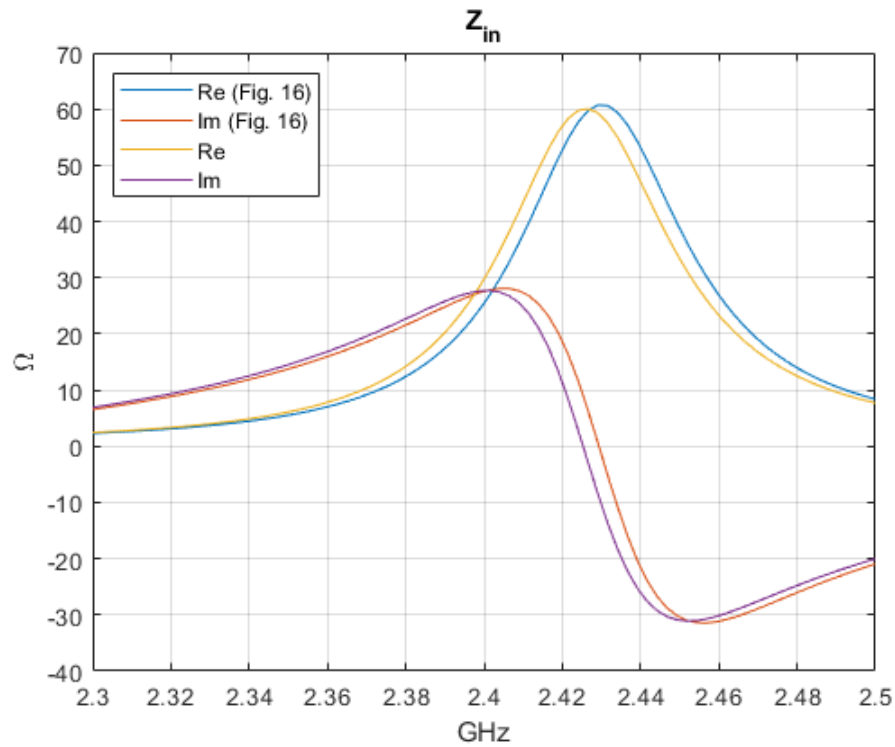


Figura 18: Impedância de entrada para P.Mmax = 14 e P.Pmax = 1 com parâmetros da tabela 4 comparada a P.Mmax = 24 e P.Pmax = 1 com parâmetros da tabela 3

Vemos que o pico da parte real da impedância está levemente deslocado à esquerda em relação a Figura 16. O pico ocorre em 2.427 GHz.

A figura 19 mostra a impedância de entrada para P.Mmax = 14 e P.Pmax = 3 em comparação com a figura 18.

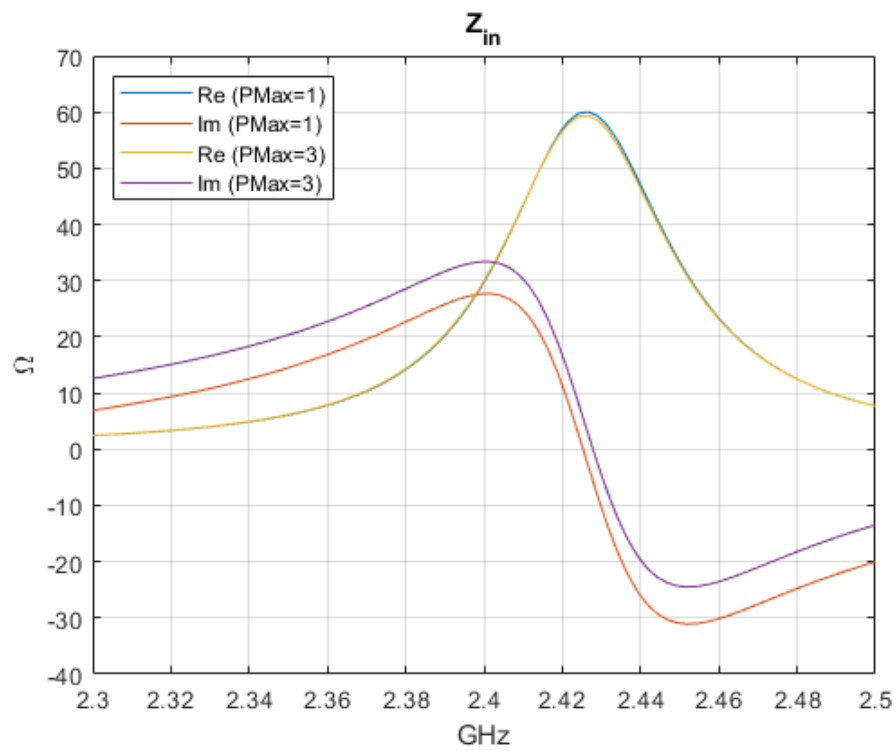


Figura 19: Impedância de entrada para P.Mmax = 14 e P.Pmax = 3 comparada a P.Mmax = 14 e P.Pmax = 1, ambas com parâmetros da tabela 4

Nota-se que aumentar P.Pmax não tem muita influência sobre a parte real da impedância, mas tem um impacto perceptível na parte imaginária.

6

CONCLUSÃO

O método dos momentos é uma ferramenta poderosa para computar problemas complexos. Embora tenha sido necessário um desenvolvimento teórico extensivo, os resultados se mostraram bons em comparação a outros trabalhos. É importante salientar que a escolha de parâmetros para o MoM é muito importante para obter bons resultados e evitar erros numéricos. Além disso, devido a forma dos computadores lidarem com números reais, é preciso contornar tais limitações destrinchando as equações de forma que o computador consiga computar os resultados com precisão.

6.1 Trabalhos futuros

- **Otimização dos parâmetros de iteração**

Os parâmetros de iteração escolhidos neste trabalho foram totalmente arbitrários, simplesmente foram escolhidos valores grandes o suficiente para retornar um resultado plausível e pequenos o suficiente para o algoritmo executar em horas em vez de dias. Sendo assim, determinar quais os melhores parâmetros traria tanto benefícios para o tempo de execução quanto para a precisão do algoritmo.

- **Comparação com HFSS**

Embora os resultados do Prêntice tenham sido gerados pelo HFSS, a geometria da antena não é exatamente a mesma. Dessa forma, seria interessante utilizar o HFSS para obter a impedância de entrada de entrada da geometria deste trabalho para fazer uma comparação direta entre os resultados.

- **Diagrama de radiação**

Além da impedância de entrada, o diagrama de radiação é uma das características mais importantes de uma antena. A princípio, a formulação teórica do capítulo 3 tem todas as equações necessárias para calcular o diagrama de radiação, sendo apenas necessário fazer uma conversão de coordenadas cilíndricas para esféricas.



ANÁLISE ASSINTÓTICA DAS FUNÇÕES Θ

As funções Θ que estamos interessados em analisar são:

$$\Theta_1(n, q) = J'_v(k_\rho b) H_v^{(2)'}(k_{\rho_d} a) - J'_v(k_{\rho_d} a) H_v^{(2)'}(k_\rho b) \quad (\text{A.1})$$

$$\Theta_3(n, q) = J_v(k_\rho b) H_v^{(2)'}(k_{\rho_d} a) - J'_v(k_{\rho_d} a) H_v^{(2)}(k_\rho b) \quad (\text{A.2})$$

Onde $v = \frac{n\pi}{\Delta\phi}$ e $k_\rho = \sqrt{k^2 - \frac{q\pi^2}{L}}$. k pode ser k_0 ou k_d a depender da região na qual a função Θ está sendo usada.

De acordo com [4] (D-9), para argumentos pequenos e ordem 0:

$$\begin{aligned} J_0(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \\ N_0(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma x}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Onde $\gamma = 1.781$ é a constante de Euler [4] (D-8).

Para argumentos pequenos e ordem diferente de 0 [4] (D-10):

$$\begin{aligned} J_v(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{v!} \left(\frac{x}{2}\right)^v \\ N_v(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{(v-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^v \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Para $Re(v) > 0$ e $|fase(x)| < \pi$, as assíntotas para argumentos grandes ficam [4] (D-11):

$$\begin{aligned} J_v(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{v\pi}{2}\right) \\ N_v(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{v\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A função de Hankel do segundo tipo é definida como [4] (D-12):

$$H_v^{(2)}(x) = J_v(x) - jN_v(x) \quad (\text{A.6})$$

E suas assíntotas são dadas por:

$$\begin{aligned}
H_0^{(2)}(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 - j \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{\gamma x}{2} \right) \\
H_\nu^{(2)}(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{x}{2} \right)^\nu + j \frac{(\nu-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x} \right)^\nu \\
H_\nu^{(2)}(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2j}{\pi x}} j^\nu e^{-jx}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Já as derivadas das funções de Bessel são definidas pela seguinte expressão genérica [4] (D-14):

$$B'_\nu(x) = B_{\nu-1} - \frac{\nu}{x} B_\nu = -B_{\nu+1} + \frac{\nu}{x} B_\nu \tag{A.8}$$

Onde B_ν é uma função de Bessel qualquer.

A partir das equações anteriores podemos calcular os limites assintóticos das derivadas das funções de Bessel. Os limites para argumentos pequenos e ordem 0 são apresentados nas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
J'_0(x) &= -J_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{x}{2} \\
N'_0(x) &= -N_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \frac{1}{x} \\
H_0^{(2)}(x) &= J'_0(x) - jN'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{x}{2} - j \frac{2}{\pi} \frac{1}{x}
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Os limites para argumentos pequenos e ordem diferente de 0 são apresentados a seguir:

$$\begin{aligned}
J'_\nu(x) &= J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\nu}{\nu!} \frac{x^{\nu-1}}{2^\nu} \\
N'_\nu(x) &= N_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} N_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\nu!}{\pi} \frac{2^\nu}{x^{\nu+1}} \\
H_\nu^{(2)}(x) &= J'_\nu(x) - jN'_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\nu}{\nu!} \frac{x^{\nu-1}}{2^\nu} - j \frac{\nu!}{\pi} \frac{2^\nu}{x^{\nu+1}}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Para calcular os limites para argumentos grandes tomamos a derivada da equação (A.5).

$$\begin{aligned}
J'_\nu(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{1}{2x} \cos \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\
N'_\nu(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[-\frac{1}{2x} \sin \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Com os limites assintóticos das funções de Bessel e os limites de suas derivadas em mãos, podemos calcular os limites das funções Θ .

Para argumentos pequenos e ordem 0 temos que:

$$\Theta_1(0, q) \xrightarrow{k_\rho \rightarrow 0} j \frac{1}{\pi} \left[\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right] \tag{A.12}$$

$$\Theta_3(0, q) \xrightarrow{k_\rho \rightarrow 0} -j \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{k_\rho a} + \frac{k_\rho a}{2} \ln \left(\frac{\gamma}{2} k_\rho b \right) \right] \tag{A.13}$$

Para argumentos pequenos e ordem diferente de 0:

$$\Theta_1(n, q) \xrightarrow[k_\rho \rightarrow 0]{} j \frac{\nu}{\pi} \frac{1}{k_\rho^2} \left[-\frac{1}{a^2} \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu-1} - \frac{1}{b^2} \left(\frac{a}{b}\right)^{\nu-1} \right] \quad (\text{A.14})$$

$$\Theta_3(n, q) \xrightarrow[k_\rho \rightarrow 0]{} -j \frac{\nu}{\pi k_\rho} \left[\frac{1}{a} \left(\frac{b}{a}\right)^\nu + \frac{1}{b} \left(\frac{a}{b}\right)^{\nu-1} \right] \quad (\text{A.15})$$

Para argumentos grandes:

$$\Theta_1(n, q) \xrightarrow[k_\rho \rightarrow \infty]{} \frac{2j}{\pi k_\rho \sqrt{ab}} \left[\left(1 + \frac{1}{4k_\rho^2 ab}\right) \sin(k_\rho(b-a)) + \left(\frac{1}{2k_\rho b} - \frac{1}{2k_\rho a}\right) \cos(k_\rho(b-a)) \right] \quad (\text{A.16})$$

$$\Theta_3(n, q) \xrightarrow[k_\rho \rightarrow \infty]{} \frac{-2j}{\pi k_\rho \sqrt{ab}} \left[\frac{1}{2k_\rho a} \sin(k_\rho(b-a)) + \cos(k_\rho(b-a)) \right] \quad (\text{A.17})$$

Por fim, precisamos definir quando utilizar cada equação, ou seja, formalizar o que está sendo considerado como argumento pequeno ou grande.

Para pequenos argumentos e ordem 0, vemos que entre $J'_0(x)$ e $N'_0(x)$, a primeira cai mais rápido. Portanto, se $x < \text{argmin}$ utilizamos as expressões assintóticas de ordem 0 e argumento pequeno. Definimos *argmin* como:

$$\frac{\text{argmin}}{x} = 10^{-\text{expmin}} \Rightarrow \text{argmin} = 2 \cdot 10^{-\text{expmin}} \quad (\text{A.18})$$

Onde *expmin* é um valor arbitrário.

Analogamente, para argumento pequeno e ordem diferente de 0:

$$\text{argmin} = 2 \cdot 10^{\frac{1}{\nu+1}} \left[\log_{10} \left(\frac{\nu!}{2\pi} \right) - \text{expmin} \right] \quad (\text{A.19})$$

Computacionalmente, não é ideal calcular $\log(x!)$ diretamente, já que o fatorial seria computado antes e pode estourar. Para resolver esse problema utilizamos propriedades dos logaritmos para chegar na seguinte equação:

$$\log(x!) = \sum_{n=1}^x \log(n) \quad (\text{A.20})$$

Já para argumentos grandes, é escolhido um valor arbitrário *argmax*.

Portanto, se o argumento for menor que *argmin* e a ordem for 0, utilizamos as equações (A.12) e (A.13). Se o argumento for menor que *argmin* e a ordem for diferente de 0, utilizamos as equações (A.14) e (A.15). Se o argumento for maior que *argmax*, utilizamos as equações (A.16) e (A.17). Se o argumento estiver entre os 2 limites, utilizamos as equações (A.1) e (A.2).

REFERÊNCIAS

- [1] Prêntice RIBEIRO FILHO. Análise e projeto de antenas de microfita híbridas. Master's thesis, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2014.
- [2] Roger F. Harrington. *Field Computation by Moment Methods*. IEEE Press, 1993.
- [3] Matlab. <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>. Acessado em 01/05/2022.
- [4] Roger F. Harrington. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. IEEE Press, 2001.
- [5] Arttu Rajantie. The search for magnetic monopoles. *Physics Today*, 69(10):40–46, 2016.
- [6] David J. Griffiths. *Eletrodinâmica*. Pearson Universidades, 2010.
- [7] John Liu Murray R. Spiegel, Seymour Lipschutz. *Manual de fórmulas e tabelas matemáticas*. Bookman, 2012.
- [8] Microprocessor Standards Committee. IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic. *IEEE Std 754-2019 (Revision of IEEE 754-2008)*, pages 1–84, 2019.
- [9] Matlab. Avoid Unnecessary Copies of Data. https://www.mathworks.com/help/matlab/matlab_prog/avoid-unnecessary-copies-of-data.html. Acessado em 09/04/2022.
- [10] Matlab. Share Data Between Workspaces. https://www.mathworks.com/help/matlab/matlab_prog/share-data-between-workspaces.html. Acessado em 09/04/2022.
- [11] William H. Press, et al. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computings*. Cambridge University Press, 2007.